目　录

第Ⅰ部分　数学与自然科学相互作用总览

第 I 部 分

数学与自然科学相互作用总览

第一章　什么是应用数学？

本章旨在让读者领会应用数学的本质．我们试图把处理问题的主要过程讲解清楚，并且把在各种物理问题中运用应用数学的经验介绍给读者．

我们并不打算把本书写成一本方法汇编，因为所谓汇编无论如何是不可能完备的．相反，我们相信，读者领会应用数学家的方法之后，就有了一个充实其知识的清晰骨架，同时也具备了创新精神．这些东西比之一本方法汇编要有价值得多．

1.1 节首先相当详细地论述了应用数学的本质，随后概述本书所要介绍的应用数学的课题．1.2 节是研究星系结构的一个导引；1.3 节分析了一群阿米巴菌的突然聚集．1.2 和 1.3 节的主要目的，是要使读者对应用数学目前所研究的问题类型有一个初步感受．（这些专题是作者从当前感兴趣的问题中选取的．）至少在初读时，读者不要过分去注意细节，而应该集中精力以便获得一个总的印象．

恒星的行为与阿米巴的行为看起来并无共同之处．因为事实上人们只有用显微镜才能看到阿米巴之间的间隙，而最靠近的恒星却有若干光年之遥．但是我们将会看到，恒星与阿米巴的行为呈现出它们的质量好象都是连续分布似的．把上述二种情况看作是连续分布，这正是应用数学功能的一个极好例证．因而，把连续介质这类理想数学模型说成是"错误的"，这种说法是不妥当的．真正的问题是：这种理想化所带来的误差对预言所研究的现象是否造成重大的影响？

对于恒星和阿米巴来说，连续介质模型的理想化是特别令人惊异的，因为首先使这些现象变得特别明显的正是它们的颗粒状态．的确，水和空气看起来象连续介质，（大多数人知道有分子的

存在，是听说的．)不过，连续介质模型对于研究涉及这些介质的现象来说，当然也是非常有用的．

1.2 节和 1.3 节的例子之间的另一相似之处是，两者都需要对有组织的结构给出解释．星系的旋涡图式单是从美学的理由也需要加以研究，但更基本的理由是这些图式对所涉及的力的性质提供了重要线索．研究阿米巴的形态(形状的形成)运动，是由于这种运动能为组织细胞的运动提供线索，而组织细胞的运动是发育生物学的基本问题．在上述两个领域中，我们的认识还是非常不够的．

1.1 应用数学的本质

数学起源于一些简单的实际问题，例如在家族成员之间分配一群牲畜(数论)和丈量田亩(几何学)．随之，逐步形成了一些初等观念，并演化成逻辑结构．在早期成就中，最杰出的例子是欧几里德几何学．希腊人认识到，数学定理的研究，可以建立在某些公理的基础上．不过，在很久以后人们才搞清楚，依靠经验并不能完全而决定性地验证一些公理(诸如平行假设)．事实上，也正是通过改变平行假设才创立了非欧几何学；从而派生了许多重要分支．毫无疑问，纯粹数学的这些进展具有极为重要的应用．

由于数学中独立于理论科学而发展起来的部分日益增大，纯粹数学这个名词就出现了．纯粹数学家的创造性成果无疑给人留下深刻的印象，但是无论用何种方式来限制我们对数学的研究，都是令人遗憾的．把数学和它的应用结合在一起研究，其内容更为丰富，对智力的要求也就更高了．此外，这种研究还可以促进新的数学方法和理论的发展．而其中有些发展同样又会在各种科学上得到应用．

应用数学是以数学和科学之间相互依赖这一精神和信念为指南的．声称全部数学都具有这种依赖关系这是不正确的，但人们在应用数学的研究中必须优先考虑这些部分．这一方针是以下列设想为根据的：直接从科学问题的研究中成长起来的数学领域极

有可能再被应用于其他科学问题. 举个例子来说，在本章末节我们会看到，偏微分方程的稳定性理论可以应用于当前发育生物学的问题. 而这种理论最初是从流体力学和弹性理论的经典领域中发展起来的.

在历史上,数学和物理学的发展具有十分密切的联系. 经典的例子可以在牛顿(见第二章)、高斯、欧拉和柯西等人的著作中找到,较近期的例子则遍布于相对论、布朗运动、统计力学及其有关的理论——协变性、概率论和广义调和分析的研究之中. 为什么在数学和物理类科学之间存在着这样密切的关系呢?

通常给于这个哲理性问题的一种回答是[1]

"上帝是一个数学家"

换句话说,人们相信自然界中存在着一种基本的、和谐的秩序. 所以自然现象的描述可以用数学的逻辑法则加以条理化;然而,在社会和经济问题中,由于人们为了追求最佳的效益,人为地规定了某种逻辑,或许正是由于这种逻辑,数学才发挥了如此巨大的作用.

应用数学的范围、目的与实践

应用数学的范围是非常广的，可以借用爱因斯坦的如下一段话来恰当地加以描述:

"它的范围相应地可以定义为我们全部知识中能够用数学语言表达出来的那个部分"[2].

这一句话是爱因斯坦用来定义物理学的. 按照字义，这个定义当然也包括生物学、经济学、通讯工程等学科中的数学理论，因而用它来描述应用数学则更为恰当.

现在我们试图简要地叙述一下应用数学的目的和方法论，并

1) "上帝就是数"——毕达哥拉斯;"上帝历来就是几何化的"——柏拉图;"上帝历来就是算术化的"——雅可比;"宇宙的伟大缔造者现在开始以一个数学家姿态出现了"——琼斯. 引语（并不完全赞同）出自 E. T. 贝尔所著的 "Man of Mathematics" (London: Penguin, 1953), p.21.

2) *Out of My Later Years* (New York: Philosophical Library, 1950), p. 98.

把它们与纯粹数学和理论科学的目的和方法论作一对比.

应用数学的目的在于运用数学来阐明科学概念和描述科学现象,并以此推动新数学的发展. 利用数学来加深对科学的理解,简便起见,我们可以把这个过程分为如下三步:

(i) 用数学语言**表述**科学问题;

(ii) **求解**这些数学问题;

(iii) 用科学语言**解释**上述求解结果及其经验验证.

存在着普遍的误解: 认为第二步是最重要的, 一个应用数学家最有价值的东西乃是运算技巧. 然而,一般地讲,这三步是同样重要的. 在某一类给定的问题中,或许某一步会突出来,显得比另外两步更为重要,或更为困难.

通晓各种方法和熟练运算技巧显然是必要的. 一个对各种方法具有渊博知识的人可以为运用数学的其他科学家提供有益的帮助. 但是,必须认识到,作为一个独立的科学家而进行工作的应用数学家来说, 仅仅具有这种知识还是不够的. 他必须也能在下列几个方面运用判断力,即在表述问题方面,在决定着手解决哪些问题方面, 以及选取何种理想模型和近似方法去简化问题而不失其本质方面. 因而一个有抱负的应用数学家, 甚至应该比培养运算技巧更加刻苦地去培养正确的判断力.

最后,*从数学理论中提炼出恰当的科学结论及科学涵义,以供经验验证,并尽量把结论约化成最简单的形式,以最贴切的语言来表达,这一步是最重要的.* 它是全部努力的顶峰,同时也是将来前进的基础. 这样便得到了新的认识,获得了透彻的了解,展现了新的前景, 这些比起仅仅导出某些公式和编纂某些有用的数值表来要重要得多,而且也更令人快慰. 当然,必须把积累具体的定量资料看作是达到目的的一种手段.

讲到这里, 显然可知: 对问题的科学动机的理解和运用试探式推理的能力,以及运算技巧,这些在应用数学的实践中都是十分重要的. 事实上,上述三点比起完成一个严格证明的能力来说,更为重要. 在很多情况下, 一个数学理论的严格表述可能要历时好

几年．在此期间，应用数学家必须不管逻辑结构是否完整而向前推进．但是在他的推理中，他必须力求正确，尽可能地细心．

应用数学与纯粹数学的对比

纯粹数学与应用数学之间在动机和目的上的差异，以及由此引起的着重点和态度上的差异，必须充分予以认识．在纯粹数学中，人们往往处理这样的抽象概念，逻辑乃是用来判断一个理论是否正确的唯一工具．但在应用数学中，经验验证则是一个必需而有力的判据．

然而，两门学科之间仍然存在着密切的关系． 在某些情况下（例如天体力学中），有一些严格的定理能够得到证明，对于实用的目的来说，它们也是有价值的．另一方面，有很多例子，其中新的数学观念和新的数学理论是由应用数学家或理论科学家提出的．分布理论就是最近的一例．

如果一个科学问题不能用现有的数学概念恰当地表述出来，那末必将产生新的概念，冯·诺依曼的抽象"博奕"便是一例．如果所表述的数学问题不能用现有的方法来解决，或其解答的性质不能根据现有的理论恰当地加以理解，那末就必定要发展新的方法和新的理论．（许多非线性问题就属于这一类．）因而，我们把应用数学的第四部分记之为

(iv) 通过创造、推广、抽象和公理化来产生科学上相关的新数学[1]．

应该认识到，当数学理论正在发展时，最初所证明的少数几个定理不会对纯粹数学产生重大影响，但对于应用数学的目的来说，必须把它们看作是有实用价值的成就．另一方面，许多第二流的

---

1) 有些人认为这第四部分才是唯一的应用数学，并把前三部分看作是科学而不是数学． 另一些人则以为可以归之为第四部分的大多数工作同科学没有什么真正的关系（因而应该主要根据其数学价值作出评价）．作者并非教条主义者，但他们更倾向于后一观点． 因而除了第二章的某些题材外，本书把注意力集中在(i)—(iii) 部分，因为文献中的空缺之处正是在这里．

纯粹数学也是以应用数学的面貌出现的（反之亦然）。总而言之，如果要具备良好的素质的话，知识和趣味总是需要的。

应用数学与理论科学的对比

理论科学家与应用数学家之间的区别往往是模糊不清的，因为各自都可以本着对方的精神工作．一个理论物理学家，当他不能正面攻克问题时，有时便得从事有关数学模型问题的研究，为了在理解实际物理问题的数学方面建立起信心和判断，甚至达到遵循纯粹数学家做法的地步．应用数学家为了他们自己的问题也往往要做这类工作．同时，应用数学家还要从自己的理论中引出科学结论，以便与经验证据作比较．为了有效地这样做，他必须掌握关于他正在研究的那个问题的大量科学知识．

常常有这样的情况，从特定课题的长期研究中，一个理论科学家具有关于某门学科的较深的知识．相反，一个应用数学家可以在不止一门学科中进行工作，并可使各门学科互相补充而得以丰富．的确，在当今日趋专门化的时期中，使各门学科互相补充而得以丰富乃是一个应用数学家最为有用和最为满意的活动之一．

一般来说，发现新的物理定律和原理对（例如）理论物理学家更具有吸引力，因而他对有关这方面的研究更具有鉴别能力，即使在他的尝试仅仅得到部分成功的时候也是如此．他的工作性质往往具有较强的归纳性和揣测性．应用数学家则对现象的恰当的数学描述更感兴趣．他势必会导出已知定律和原理的许多结果．

举例来说，飓风的起源不会是一个近代物理学家感兴趣的主要课题，因为飓风的机理大概完全可以用经典力学和热力学原理加以描述．可是，对应用数学家来说，这仍是一个非常具有吸引力的课题，因为他欣赏其中非线性问题的挑战和这一现象的内在科学意义．

工程学中的应用数学

理解基本概念对工程师来说，与对科学家一样有用．但对工

程师，理解基本概念仅仅是达到下列目的的一种手段，即是为设计结构、机器以及设计有效而可靠地完成某些任务的程序．为了建立起详细的设计准则，常常必不可少地要做浩繁的数值计算．然而工程师至少也要懂得本书所叙述的建立更为定性模型的方法，这样他就可以利用有关的理论结果．当然，作为一个崇高的目标，工程师可以热切期望，与他的同行大师们那样，把应用数学与科学的见解和实践性结合起来[1]．

本卷计划

在附录 1.1 中，读者会看到其他一些人关于应用数学的本质、教学和实践的见解．本书作者的观点已概述如上；就某种意义来说，本书的其余部分就是这种概述的细致推敲．

本书分为三部分．第一部分为应用数学提供了一个鸟瞰，相比之下，不如其它部分那么详细．如上所述，它是由应用数学本质的一个短论开始的．接下去介绍了应用数学中现时研究的两个例子．第二章和第三章把确定性过程与概率性过程作一对比；前者以质点动力学方程为例子，后者以随机走动的研究为例子．第 I 部分末尾的两章讲述了傅立叶级数，这是一个不仅仍然有用而且还在继续发展的经典课题．此处阐明的主要概念是叠加原理．

第 II 部分试图阐明应用数学的某些重要方法和思路的实质．特别是第六章关于基本简化过程和尺度化的讨论，这涉及到打算弄清某些方法，而这些方法过不久就会“人人皆知”的，但现有书刊中却很少论述．所讲的那些过程有很大的直观成分，但是通过详细考究它们的内容，仍可学到某些东西．

第 II 部分既讨论了正则扰动理论，又讨论了奇异扰动理论，同时也讨论了相平面方法．用两章仔细讨论了一些并非无价值的例

1) 关于这样的一位大师的一本饶有趣味性和参考意义的传记是 T. 冯·卡门（该书的主角）和 L. 安迪生写的 The Wind and Beyond (Boston: Little, Brown, 1967)．冯·卡门采用基本的应用数学研究去估算工程系统的性能，因而在飞机设计（从最早期到喷气时代）以及涡轮、泵、堤坝、风洞和桥梁的设计中起了重要的作用．

子，这些例子涉及各种技巧，能表明应用数学在起作用的一些过程，其中的一个例子是生理学中感兴趣的渗透驱动流；另一个例子考虑生化动力学的某些重要方面．整个第 II 部分只考虑了常微分方程，因而基本观念是用比较简单的行文来加以说明的．

第 III 部分是连续介质力学的一个引论．对于应用数学家，在该经典理论中的训练是重要的，主要理由是：(1)连续介质力学就其本身的作用而言仍是一门重要的学科，并且它的方法(象我们在本卷中将要好几次看到的那样)继续被应用于新的领域；(2) 在理论分析中可能达到的深度，必须用成熟的研究领域为例来加以说明．连续介质力学就是这样的一个领域，并且(不象量子力学那样)，它处理的物理现象人们较为熟悉．

第 III 部分是以连续介质的一个简单而有启发性的研究讲起的，它所涉及的一维问题是在研究弹性杆的纵向运动中提出的．然后用两章叙述支配一般连续介质行为的主要场方程组［例如质量守恒、(线)动量平衡］的仔细推导．再把另外的本构方程加进场方程，这样就对“无粘”流体作了完整的数学描述．第十五章处理涉及无粘流动的各种例子(分层流体的稳定性、声波、物体绕流)．最后一章研究位势理论，用格林函数来分析声波通过一个屏上的小孔所发生的衍射现象作为本卷的结尾．偏微分方程是这一部分的数学核心．

把应用数学统一起来的某些概念

我们的表述方式并不象一本手册那样组织严谨，而是(有点象交响乐那样）围绕着某些重点主题展开的．我们不去罗列所有的主题及它们之间的关系，这些留待读者去发现；这应当是他们的一部分训练和乐趣．不过我们举一个例子来说明我们的用意，纯粹数学家把偏微分方程分为如下类型：

$$\text{椭圆型}\left(\text{例如 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\right),$$

$$\text{抛物型}\left(\text{例如 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial y}=0\right),$$

$$双曲型\ \left(例如\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\right).$$

而应用数学家往往宁可采用(与上述分类)互补的观点，即把自然现象看作是说明平衡、扩散和波动传播实例的观点，我们将看到，通过揭露表面上根本不同的问题的共同特征，这些主题以及其他诸如稳定性、随机性和最优化这类主题是如何有助于把应用数学统一起来的.

1.2 星系结构分析导引

在本节中，我们要指出理论分析是如何能够开始解释星系结构的各个方面的. 正如所有自然现象的数学理论一样，我们要求知道: (i) 有关的基本物理定律，(ii) 所研究体系的特征.

要求 (i) 可以简短地予以说明，因为要用到的定律就是经典物理学定律. 为了满足要求 (ii)，我们要向读者简短地介绍一下宇宙的定量概貌. 而后再比较详细地介绍一下能够预言横越银盘的恒星分布的这样一个问题的表述和解答. 最后，我们十分粗略地讲一下关于螺旋结构(这是许多星系的一种特征)起因的某些新观念.

支配星系行为的物理定律

研究星系所用到的基本物理定律就是经典物理学定律: (i) 所有经典力学都要遵循的牛顿运动定律以及牛顿万有引力定律; (ii) 麦克斯韦的电动力学定律以及 (iii) 热力学定律.

读者应注意，以经验为基础的基本定律用得非常少. 不过，为了研究某些物理问题，我们常需引入新的数学概念. 例如，在本节末尾的特例中，仅仅用到牛顿时代的物理定律. 但是我们欲要用到诸如相空间以及相空间中的密度这样一些更为近代的数学概念.

现在我们转而概述一下关于我们宇宙的某些事实. 应该指出，我们引用的定性与定量的知识乃是几世纪以来大量科学努力的成果.

宇宙的构造组元

我们膨胀着的宇宙年龄大约为一百亿(10^{10})年·现时,它大约由一百亿个星系组成,星系便是它的构造组元.这些星系是气体和恒星的一种轮廓分明的集合,它们大体均匀地分布在(看来是浩瀚无垠的)宇宙中. 不过还有一定程度的不均匀性: 星系通过相互之间的引力吸引作用形成了一些星团. 我们所处的星系——银河系,就是由十七个星系组成的星团中的一员.

让我们把银河系的一些特征引述一下，以使读者对于星系的本性有一个总印象. 银河系形如一薄盘，在其中心有一个大体是球状的核.(太阳差不多位于银河系的边缘上,离中心约有 10,000 个秒差距[1].) 离中心大约 1,5000 秒差距的地方，银河系的物质密度变得十分小了. 银河系处于旋转之中；在太阳附近的线速度约有 250 公里/秒.

最近的恒星约有 4 光年 (1.3pc) 之遥. 对比而言，冥王星的轨道约为 40A.U. (2×10^{-4}pc). 因而，太阳系好像是单原子气体中的一个原子，这种气体是相当稀薄的，至少在我们附近是这样.

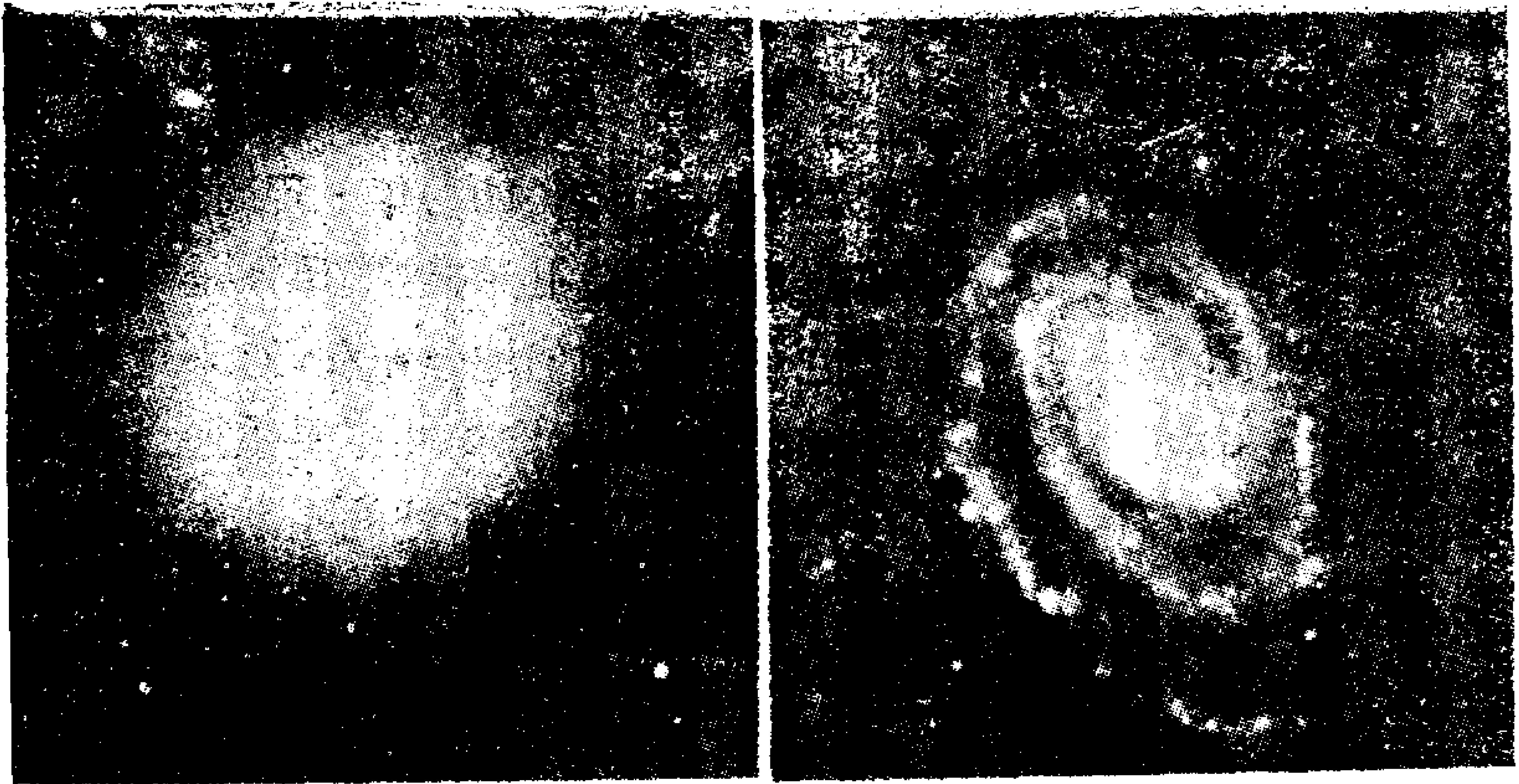
星系分类

根据外貌,可把星系分为下列四类: (i) 椭圆形(包括球状)的, (ii) 正规螺旋状(盘状)的, (iii) 棒状螺旋的,以及 (iv) 不规则的. 这些星系的例样示于图 1.1 中. 其它的例样示于卷首的插图中.

可以按照诸如图 1.2 所示的命名方案对星系加以分类. 星系的分类最初仅是根据几何外貌作出的,而详细的研究结果表明: 几

---

1) 1 秒差距 (pc) = 3×10^{18}厘米,地球绕日轨道的半径 (称作天文单位 A. U.)对于这段距离所张开的角度为一秒(以弧度为单位). 因此它约为 2×10^{5}A. U., 一光年约为 0.3pc. 一个以 1 公里/秒的速度运动的物体大约经过一百万年才走了 1 秒差距的距离.





何特征是与其它物理参数(例如气体含量)有关的．这表明，持续甚久(几百亿年)的星系外貌上的差异是有其动力学基础的．

盘状星系由于要保持其形状而必然处于急速旋转之中．球形星系大概没有净旋转．不同扁度的椭圆形星系具有不同程度的旋转．棒状星系处于匀速旋转之中，但不是绕对称轴转动．由引力维系着的这种旋转系统的经典例子是由数学家雅可比（Jacobi 1804—1851）发现的．

星系的组成

每个星系约由一百亿个恒星(更精确地说，由 10^9—10^{11} 个恒星)组成．我们的银河系属于最大之列．太阳是一个普通的恒星，年龄大约为五十亿年． 大质量恒星，例如质量 40 倍于太阳的恒星，极其明亮，它们很快会耗尽其核燃料，因而必定形成得较晚(比方说是在过去一千万年这段期间内)．太阳的演化是十分缓慢的；它的核能再过一百亿年也消耗不完．

在星系中还存在着大量的气体——在不规则星系中可达百分之二十以上，在 Sc 螺旋星系中要少些，而在 Sa 螺旋星系中则减少到百分之一或二，在巨大的椭圆星系中几乎没有了． 我们银河系的气体含量约为百分之三到四．

在这样大的尺度上，气体就像是一种完全电导体，虽则仅有少量气体电离，并且按地球范围的标准来衡量，导电性也很小．由星际气体中的电流产生的宇宙磁场仅有几个微高斯(即 10^{-6}高斯，高斯是磁场的 cgs 单位)．

宇宙线粒子与各种波长的电磁辐射(从 α 射线到 X 射线，再到可见光，直至无线电波)弥漫于星际空间．这些对于气体和磁场都可能有影响．因而我们采用“星际介质”这一名词来描述整个体系，它与恒星体系之间仅有微弱的相互作用．的确，恒星与气体之间

图 1.1 各类星系的例样：(左上图)椭圆形星系 Eopec. NGC 4486；(右上图) 正规螺旋 SC NGC5364；(中图) 棒状星系 SBb(s)，NGC 1300；(下图)不规则星系 IrrI，大麦哲伦云．(海尔天文台提供照片．)

的主要动力学相互作用是引力作用.

恒星体系的动力学

为了分析星系的结构(例如解释螺旋结构),我们首先必须把它放在适当的数学位置上. 怎样着手处理如此复杂的一个体系呢?

早已说过,首要的一步是建立一个理想化的模型. 只有把有关的经验事实以及支配我们所研究的体系的普遍规律搞清楚之后,才能着手完成这一步.

表 1.1 列出了关于星系的一系列重要事实,我们可以看到下列各种成分对能量密度的贡献是依次递减的: (i) 恒星体系(占了特别突出的比例), (ii) 气体, (iii) 磁场,以及 (iv) 宇宙线粒子和其它形式的辐射. 这样,我们就应该从能量最大的部分,即恒星体系的动力学的表述开始. 现在就来讲述这种表述.[1)]

表 1.1 银河系中的能量密度

源　　由	能量密度(单位: 10^{-12} 尔格/厘米^3)
总辐射(星光)	0.7
气体的湍流运动	0.5
星系旋转的总能量	1300
宇宙线	1
磁场 (10^{-5} 高斯)	4

引自 P. Morrison, *Rev. Mod. Phys.* **29**, 235 (1957).

恒星之间距离的数量级是它们的半径的 10^6—10^7 倍 (这一距离是恒星最外层行星半径的许多倍),相距如此遥远的这样一组恒星的集合,可以看作是一组受到引力吸引的质点集. 这样就可以按照牛顿运动定律和万有引力定律写出支配它们行为的动力学方程组. 在第二章中,我们将仔细讨论这种方程组. 然而,用这种方法描写星系显然是不恰当的,因为我们不能指望去追踪百亿个恒

1) 关于支配星系动力学的一组完备的方程,可以参阅下面的一篇综述文章: C. C. Lin, J. Appl. Math., **14**, 876—921 (1966).

星中的每一个恒星的运动．我们必须以某种集体方式，也就是以统计描述方式去研究它们．

为简单起见，我们考虑恒星质量相同的理想情况．（关于这一理想化的正确性的讨论必须留给这方面的专著去完成．）既然一个恒星的运动是由它的位置和速度决定的，因而我们考虑在一给定的位置和速度范围中的恒星数目．为了作出精确的数学表述，我们把位置坐标和速度坐标合在一起，引进六维 $(x, y, z; u, v, w)$ 的相空间．我们这样来定义时刻 t 在这一相空间中的恒星的相空间数密度或分布函数 $\phi(x, y, z; u, v, w; t)$，使得 $\phi(x, y, z; u, v, w; t)\,dxdydzdudvdw$ 给出了这样的一些恒星的数目．它们的三维空间坐标分别处在 $(x, x+dx)$，$(y, y+dy)$，$(z, z+dz)$ 这一范围中，而三个速度分量落在 $(u, u+du)$，$(v, v+dv)$，$(w, w+dw)$ 这一范围中．这样，分布函数 ϕ 就给出了任何时刻恒星体系的一个完备描述[1]：为了描写动力学过程，我们必须考虑这一分布函数随着时间的变化．

恒星质量密度 $\rho(x, y, z, t)$ 可用分布函数 ϕ 表示出：

$$\rho(x, y, z, t) = m_* \iiint_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y, z; u, v, w; t)\, dudvdw, \quad (1)$$

式中 m_* 是单个恒星的质量．这一方程仅仅表示为了得出总的质量密度，我们必须把具有各种速度的所有恒量的质量加起来．

每一恒星是在所有其它恒星的总引力场中运动着．除去恒星之间的切近碰撞[2]之外，一个恒星的单独运动基本上只受到物质的弥漫分布（其密度由 (1) 式给出）所产生的引力场的作用．这种引力场由引力势 $V(x, y, z, t)$ 的负梯度给出，$V(x, y, z, t)$ 与密度 ρ 之间的关系式为

---

1) 根据 13.1 及 14.5 两节中的材料，读者便能了解我们所以采用分布函数 ϕ，是因为就星系范围而言，星际距离是小的，但是两次碰撞之间的典型距离则不小．

2) 关于切近碰撞需作专门处理，然而在现在讨论的问题中，它们的净效应是可以忽略的．参阅 S. Chandrasekhar, Principles of Stellar Dynamics (New York: Dover, 1960).

$$V(x, y, z, t) = -G\iiint \frac{\rho(x_0, y_0, z_0, t)dx_0dy_0dz_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}, \quad (2)$$

此处 G 是万有引力常数 ($G = 6.7 \times 10^{-8}$cgs 单位)。

这样,每个恒星的运动方程可以写作

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w,$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (3)$$

进而再考虑到质量守恒以及假定不存在碰撞,便可断言:相空间某一部分中的质量增加必定是由穿过该部分的边界的物质流所引起的. 正如练习 14.1.12 或 14.1.13 所证明的那样,这意味着:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + u\frac{\partial\phi}{\partial x} + v\frac{\partial\phi}{\partial y} + w\frac{\partial\phi}{\partial z} - \left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial w}\right) = 0. \quad (4)$$

注意,引力场 $-\nabla V$ 是通过 (1) 与 (2) 式与分布函数 ϕ 联系起来的,因而(4)式括号中的各项是 ϕ 的二次型;也就是说,如果以 $\alpha\phi$ (α 为常数) 代替 ϕ,那么相当于在这些项前面乘以一个因子 α^2. 因此(4)式是一个非线性方程.

单个恒星运动所遵循的方程(3),与所有恒星集体运动所遵循的方程 (4) 之间存在着密切的关系. 用偏微分方程理论的语言来说,方程组(3)是描述方程(4)的特征曲线的.

倘若知道了 ϕ,由于利用(1)与(2)式可以算出引力势,因而根据(4)式便可求出任何时刻的 $\frac{\partial\phi}{\partial t}$. 所以从发展的眼光来看,一旦给定了某一时刻的 ϕ,可以认为 (4) 式充分描述了其后的恒星体系. 要想对上述说法从数学理论上给予证明,就要困难多了,尤其是当我们提出像稳定性这类问题的时候. 所谓稳定性,指的是如果稍微改变一下最初给定的分布函数,那么解的变化是否仍是微

小的？这类问题往往不能严格解决；但是应用数学家仍然必须把他的工作进行下去．当然，除了诉诸于他所希望的但不是现存的数学定理之外，他还要作另外的仔细考虑，从而对于他的工作是有意义的这一点他必须有相当把握．

横越银盘的恒星分布

作为应用上述方程组的一个比较简单但是真实的例子，让我们考虑横越银盘的恒星分布．这一问题至今尚未完全解决，在我们银河系太阳的附近，看来存在着“物质失落”．[1] 下面给出的解，通常是作为检验观察结果的主要基础的．

银盘的半径达 10 千秒差距（$=10^4$秒差距），但其厚度仅有 600 秒差距．因而在极好的近似程度上，我们可以把银河系在垂直于银盘方向上的变化看作是十分局部的．我们把这一垂直方向取作 z 轴，把盘心取为 $z=0$．那么在稳态情况下，$\phi=\phi(z, w)$，而(4)式变为

$$\boxed{w\frac{\partial\phi}{\partial z}-\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial w}=0.} \tag{5a}$$

可以证明(16.1节)，位势 $V(z)$ 满足泊松微分方程

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=4\pi G\rho(z).} \tag{5b}$$

现在，我们集中考虑（5a）与（5b）两式所提出的这一确定的数学问题(对于解的某些附加要求也将在下面谈到)．将分两步去处理这些方程．

对于方程（5a），可以采用一阶偏微分方程的拉格朗日的标准求积法求解．让我们简单地回忆一下这一方法的要点．

对于下列形式的偏微分方程

---

1) 例如参阅，*Relativity and Astrophysics*, Vol II (Provideuce, R. I.: America Mathematical Society, 1967) 中 L. Woltzer 的论文

$$P(z, w, \phi)\frac{\partial\phi}{\partial z} + Q(z, w, \phi)\frac{\partial\phi}{\partial w} = R(z, w, \phi), \qquad (6a)$$

拉格朗日的特征线方法是以下列特征方程为基础的.

$$\frac{dz}{P} = \frac{dw}{Q} = \frac{d\phi}{R}. \qquad (6b)$$

令 $f_1(z, w, \phi) = c_1$ 与 $f_2(z, w, \phi) = c_2$ 为 (6b) 式所包含的任何两个互相独立的常微分方程的解. (此处 c_1 与 c_2 是常量.) 于是可以证明 f_1 和 f_2 便确定了满足 (6a) 的函数 ϕ. 因此 f_1 与 f_2 给出了 (6a) 式所描述的现象的常量或积分. 曲面 $f_1 = c_1$, $f_2 = c_2$ 的交线便是特征曲线. [1]

(6a) 式的通解为

$$F(f_1, f_2) = 0.$$

在我们所讨论的情况下, $R = 0$, 因而一个积分关系式是 $\phi = c_1$ [这显然是 (5a) 式的一个解]. 第二个特征方程为

$$\frac{dz}{w} = \frac{dw}{-\partial V/\partial z}, \qquad (7)$$

马上便可得到它的积分式为

$$\frac{1}{2}w^2 + V(z) = E, \qquad (8)$$

此处 E 是一个常量,它给出了每一单位恒星质量的总能量. 因而 (5a) 式的通解为

$$\varphi = f(E) = f\left[\frac{1}{2}w^2 + V(z)\right]. \qquad (9)$$

(9)式的一种特殊形式与观察到的速度的高斯分布是吻合的. 我们应取

$$f(E) = A_0 e^{-\beta E}, \qquad (10)$$

其中 A_0 与 β 是合适的常数. 常数 β 是由速度分布确定的. 而且把 (1) 式化为一维形式之后, A_0 必定通过下式与局域密度联系了

1) 把这些话稍作推广,便可证明(3)式便是(4)式的特征曲线. 这一点已在前面讲过.

起来:

$$\rho = m_* \int_{-\infty}^{\infty} \phi dw. \tag{11}$$

事实上,我们求得的密度分布呈下列形式:

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-\beta V(z)}, \tag{12}$$

其中 ρ_0 是 $V(z) = 0$ 处的密度,在 $z = 0$ 处,即银盘中心,我们把 $V(z)$ 取作零.[1]量 ρ_0 与 A_0 及 β 的关系为

$$\rho_0 = A_0 m_* \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}. \tag{13}$$

以(12)式为基础,可以通过观察来确定 ρ_0,(12) 式是从(5a)式推得的,并未用到泊松方程 (5b). 从(12)式可以定出 $V(z)$,由此也可求得它的二阶微商为

$$\frac{d^2V}{dz^2} = -\frac{1}{\beta}\frac{d^2}{dz^2}\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right). \tag{14}$$

应用(10)式,可以从恒星的速度分布中定出 β,并且通过观察还能得到单位体积内的恒星数目(正比于 ρ). 这样便可计算出表达式(14). 而且对于任何种类的恒星[2]我们都可以这样做. 因而把 (14) 与 (5b) 两式合并之后,我们有可能确定恒星的总质量.前已说过,现有的知识显示出相当大的偏差. 按照这一动力学方法所确定的质量比直接观察所确定的质量约大 1.7 倍.

方程 (5b) 还未考虑. 为了作出完整的分析,尚须求解方程

$$\frac{d^2V}{dz^2} = 4\pi G\rho_0 e^{-\beta V(z)}. \tag{15}$$

为此,两边乘以 dV/dz,再进行积分就行了,不过尚要规定

$$V = \frac{dV}{dz} = 0, \text{ 在 } z = 0 \text{ 处}, \tag{16}$$

---

1) 由于位势的梯度才是有意义的,因而只能把位势确定到差一附加常数的程度.

2) 根据恒星光谱线的观察,恒星可以分为若干不同的种类. 这些种类从根本上说来相应于不同性质(诸如质量、组分以及年代等)的恒星.

这是由于在银盘中心，引力也等于零．这样便可毫不困难地证明密度的分布最终呈下列形式(练习 1):

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\operatorname{sech}^2\frac{z}{z_0}, \tag{17}$$

其中 z_0 为

$$z_0^2=(2\pi G\rho_0\beta)^{-1}. \tag{18}$$

从我们的理论分析中可以得到些什么？最要紧的是关于 ρ_0 值的理论与观察之间存在着偏差．天真的读者可能以为这种偏差证明了我们的分析没有什么价值．但是事实恰恰相反．实验结果与一种似乎合理的理论之间大体一致的话，就会有基本上相符的结果．但是它们之间产生了**不一致**，这就意味着**还有比我们眼睛观察到的更多的东西**．黑体字排印的这一句话跟这儿有加倍的关系、因为预言的质量超过了观察到的质量，这是由于必定还有某些未曾看到的物质存在．主要的两种猜测认为多余的质量或者是由氢分子或者是由暗星提供的．直至本书写作之时，还没有分辨出这些物质．

星系螺旋的密度波理论

除了上面所讲的以外，要对恒星体系作出更进一步的分析，这就超出本书范围了．然而，我们将在这儿简短地报道一下以恒星动力学和气体动力学为基础的星系螺旋理论方面的某些新进展，以此作为数学分析威力的另一例子．

星系光亮的旋臂是由年轻的大质量恒星构成的．大家知道，这些大质量恒星在星系内层比在外层要转得快些．如果旋臂是“物质的”，亦即如果总是由同样的恒星组成的话，那么我们必定会陷入著名的“蜷曲迷径”（Winding dilemma）之中．对于曳引螺旋构样[1]而言，旋臂越蜷越紧．不过，哈勃的分类不单是根据蜷曲的

1) 如果螺旋构样在恒星旋转方向的尾部是断开的，那么称为“曳引的”（trailing），反之称为“导引的”（leading）．由于差动旋转的效应，导引的物质螺旋构样将会是松蜷的．

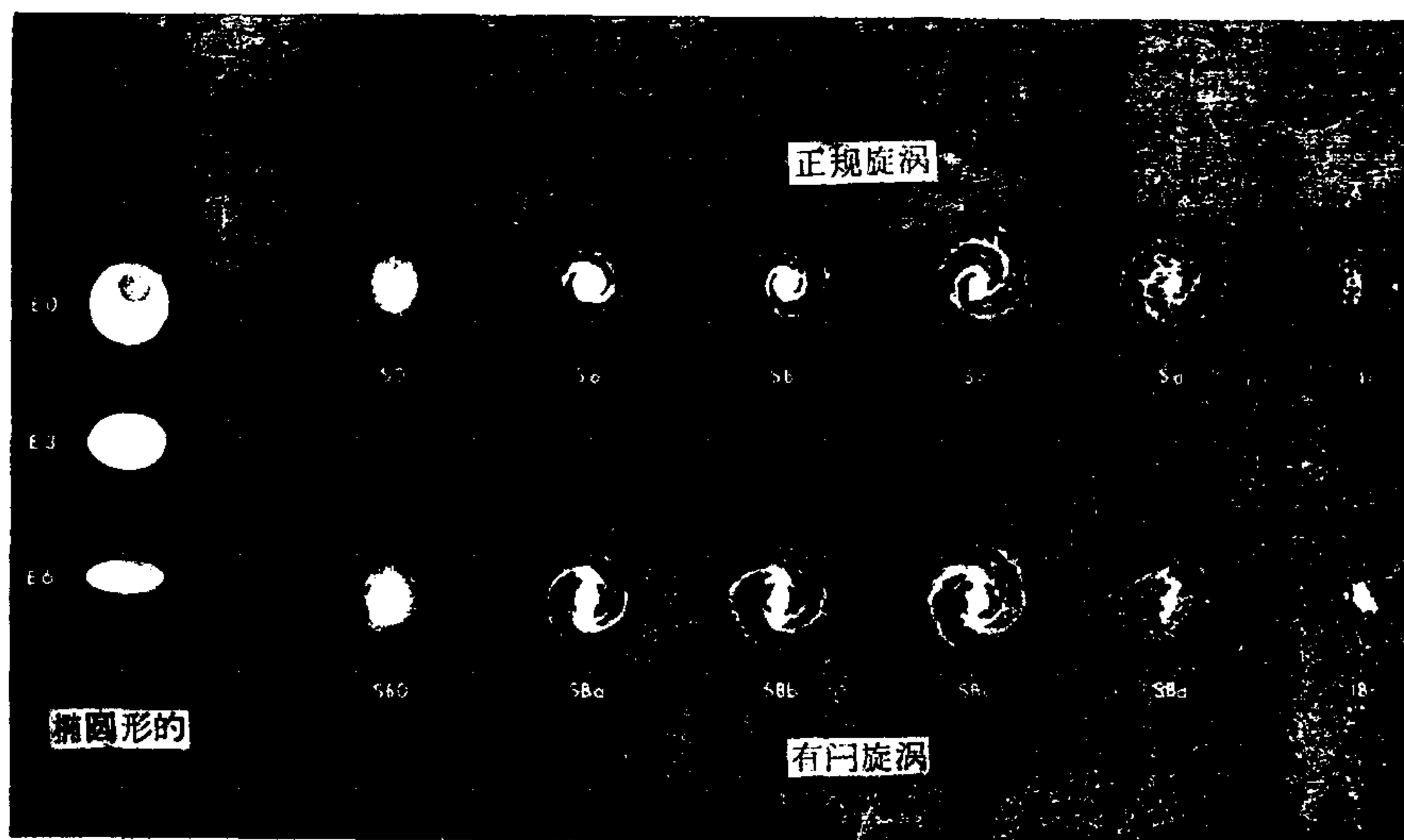


图 1.2　哈勃 (Hubble) 与德·沃库勒尔斯 (de Vaucouleurs) 星系分类方案的总图. (海尔天文台提供照片.)

紧度作出的,而且同样还要考虑其它物理参量. 此外,这些物理参量不可能像物质旋臂的几何形状那样变化得那么快. 因而,我们必须接受这样的假设,即螺旋构样是准定形的 (quasi-permanent).

二十世纪二十年代,瑞典天文学家 Bertil Lindblad 提出,在恒星体系中存在着"密度波",这是观察到的螺旋结构的产生原因.由于恒星自引力 (Self-gravitation) 作用,存在着周期性的暂时集中.定性地说,它们跟声波相似,但这两种情况所涉及的物理机制是不同的. Lindblad 对这些恒星的集体行为并未作出任何详细的数学分析. 因而他对密度波只能作出一般的揣测, 其中难免有不正确的地方. 因而他的思想在很长时期中未被大家所接受.

二十世纪六十年代, 林家翘和 Frank H. Shu 使密度波理论获得了新生. 他们成功地计算了银河系的一种螺旋结构,跟观察结果符合得很好. 这一方法还被应用于其它星系, 推出了其它若干观察结果,并跟天文资料作了核对. (参阅图 1.3.) 关于这一理论情况的总结报告, 可以参考在国际天文协会的第十四届全会上



图1.3 这是与扉画相同的一张照片，不过加上了一些曲线，用以标记出 D. S. Mathewson, P. C. van der Kruit, 与 W. N. Brouw 观察到的同步加速器发射的峰值位置，曲线与尘埃经迹相符合，这是有利于星系螺旋的密度波理论的强有力的明证． 本图得到了许可，是从 *Astron. and Astrophys.* **17**, 468 (1972)上复制下来的．

的 B. J. Bok 与林家翘所作的全会报告.[1] 这里,只要注意到下列一点便已足够了: 密度波的理论研究提出了富有挑战性的数学问题. 事实上,这些数学问题是与研究电磁等离子体中的波动时所碰到的数学问题是相类似的. (与此相似,一个恒星体系可以称作是"引力等离子体".)因而,要了解星系就需要对一些颇为难解的一类问题作出广泛的数学分析.同时,这对于在其它重要问题中有用的某些数学方法和理论的研究,也有促进作用.

练　　习

1. (a) 推导出穿越银盘的恒星密度分布的关系式(17). 试画出略图.

   (b) 求得引力势的分布:

$$V(z) = 4\pi G\rho_0 z_0^2 \ln\cosh\frac{z}{z_0}. \tag{19}$$

   (c) 求出"远"离银河平面处的引力场. 讨论一下"远"的含义是什么?

1.3 粘菌阿米巴的聚集

我们在本节中要建立一个数学模型,以描述粘菌阿米巴的聚集,从而我们对近来发育生物学所关注的一个现象便有了某种了解. (发育生物学包括胚胎学,后者研究单个细胞如何发育成一个复杂的胚胎的,但也包括那种还不能说成胚胎的较简单的有机体的发育过程.)我们首先介绍一些粘菌阿米巴方面的事实,这是我们数学模型的依据.

关于粘菌阿米巴的一些事实[2]

我们先来描述处于孢子阶段的粘菌阿米巴的生命循环,此时

---

1) 发表在 *Highlights of Astronomy*, Vol II. (Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company, 1971). 关于螺旋结构的一般知识,包括对于密度波理论的描述,可以参阅 B. J. Bok 在 *Amer. Scientist* **60**, 708—22 (1972) 上的论文: *"Updating Galactic Spiral Structure"*.

2) "哲学无不以对现象的认识为依据,不过要想从这种认识中得到好处,就绝对必需成为一个数学家"——丹尼尔·伯努利. 转引自 C. Truesdell, *Essays in the History of Mechanics* (New York: Springer. 1968) 一书的 p. 318.

每个阿米巴在保护层中蛰伏着. 在顺利的条件下，一个阿米巴便从它的孢子中钻出来. 阿米巴是一种形状不定的单细胞有机体，大小约为 10 微米(即 10^{-3} 厘米)数量级，它依靠伸开伪足(它自己的可伸缩的部分)蠕动.

阿米巴性喜污物或粪便，它们吞噬细菌为食，是地球食物链中的重要一环. 如果食物丰富，阿米巴便不断吞食，通过有丝分裂(分裂为二)的方式繁殖起来. 如果食物耗尽了，那么它就处于一个分裂间期 (interphase period)，无规则地并且有点儿虚弱地蠕动着，或多或少地遍布在一块对它有利的地方. 在这一时期中，食物供应的中断促使阿米巴产生了某种变化. 这种内部变化的细节还不清楚，但是可以毫不困难地观察到它所引起的惊人的外部现象. 几小时后，阿米巴开始聚集到若干集中点上. 典型之处在于[1]：其分布多少是有规则的，相距几百微米. （参看扉页上的照片. 图 1.4 给出一个关于聚集开始时是什么样子的观念，这是在细胞密度较低的情况之下.）

聚集过程完成之后，已经集中于一点(在实验室的实验中，集中点的数目从几个到 200,000 个)的阿米巴形成了一个多细胞的聚集体. 虽然在这一聚集体中，以前自由生活着的阿米巴仍保持着它们的细胞壁，但是这一聚集体以整体的方式蠕动. 然后，这一聚集体停住了，并且竖起一根囊柄，囊柄顶端有一个装孢子的圆球. 至此，完成了一个循环.

造成阿米巴有组织聚集的原因何在？这是一个重要问题，因为"有目的"的运动在发育过程中是常常出现的. 在一个发育着的有机体内部进行这种运动是相当难以观察到的，而粘菌阿米巴的细胞愿意在实验盘中表演一番，使我们易于观察它们，还可以用它们做实验.

已经发现，阿米巴喜欢朝着由它自已分泌的一种化学物质的

1）细胞构成的粘质型有好几种，不同种类的特性各不相同【参阅 J. T. Bonner *The Cellular Slime Molds* 一书】，我们所描述的是研究得最多的一种，即 Dictyostelium discoideum.

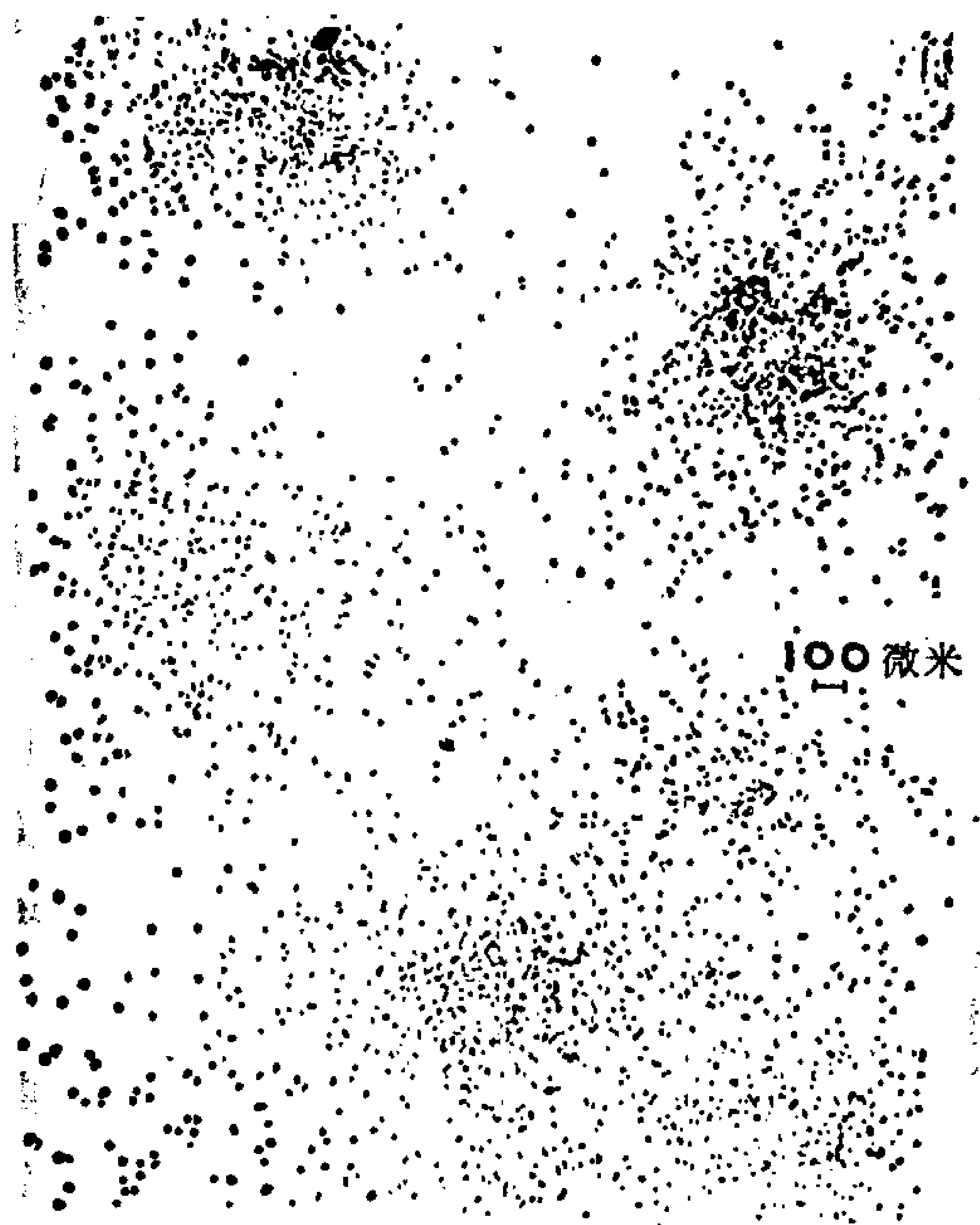


图 1.4 阿米巴刚开始聚集时的布居. 图中以一条 100 微米的线段作为标尺.
(B. Shaffer 供图)

浓度较高的地方蠕动. 对于某些种类而言，这种诱饵物最近已被证认为环状的 3′, 5′腺-磷 (AMP)*，这是一种具有许多重要生物功能的化学物质，(由于 E. W. Sutherland 的工作阐明了环状 AMP 的某些作用，因而他荣获了 1971 年诺贝尔奖金的医学奖.) 并且还知道在一定量的诱饵物中加进一点儿某种物质，它便失效了. 这一点归之于能够改变 AMP 的特性的一种酶的活性.

大体说来，阿米巴是由于它们朝着诱饵物浓度高的地方蠕动而聚集的. 但是，开始蠕动的时刻是由什么决定的呢? 聚集中心的间距由什么决定的? 我们能否定量地描述这一过程? 为了回答这类问题，就需要一个数学模型. 我们着手建立一个可以合理地

---

* 通常记作 cAMP，这儿的符号 AMP 的含义中并未包括"环状"一词——译者注.

假定它与这一现象有关的最简单的数学模型[1]. 如若这一模型的分析对读者起了鼓励作用,那么读者以后可作详细钻研. 为此,可以参阅刚才所引的文章以及后来在该杂志上接连发表的许多作者的文章.

数学模型的表述

由于阿米巴之间的距离小于聚集中心之间的典型距离,因而我们采用连续介质模型. 假定聚集过程发生在 (x, y) 平面上. 为简单起见,我们假设各种量在 y 方向没有变化,而只需要考虑 x 方向的变化. 练习 3 表明这种单维假定完全不影响事物的本质,但能使解释变得更为容易.

令 $a(x, t)$ 表示时刻 t、位于 x 处、单位面积上的阿米巴数目. 考虑位于 $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+\Delta x$ 区域中的阿米巴,此处 Δx 为任意一个数(不必是小的). 现在我们写出这一区域中的**普遍平衡定律**; 这一定律说的是: a 的数目在区域中的净变化率等于穿过区域边界的 a 的流量再加上这一区域中 a 的净产生率. 在现在的情况下, a 指的是阿米巴,而阿米巴的净产生率等于出生率减去死亡率. 不过平衡定律是"普遍的",它可以应用于任何一种物质. 因为一个区域中的物质除了产生出来的或穿过区域边界流进去之外,怎么还能通过其它方式增加呢?

为了进行下去,我们必须定义**通量密度** $J(x_1, t)$. 这个量给出 a 通过直线 $x = x_1$ 上的单位长度的净穿透率. 如果朝着 x 增加的方向穿过的阿米巴多于朝着 x 减小的方向穿过的阿米巴的话,那么把 J 定义为正的. 再令 $Q(x, t)$ 为单位面积中 a 的净产生率. 那么就可写出所需的平衡定律了. 考虑图 1.5 中的长方形,便得

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} a(x, t)dx = J(x_0, t) - J(x_0+\Delta x, t)$$

---

1) 这些材料取自 E. F. Keller 与 L. A. Segel 的一篇论文,参 *J. theoret. Biol.* **26**, 399—415 (1970).

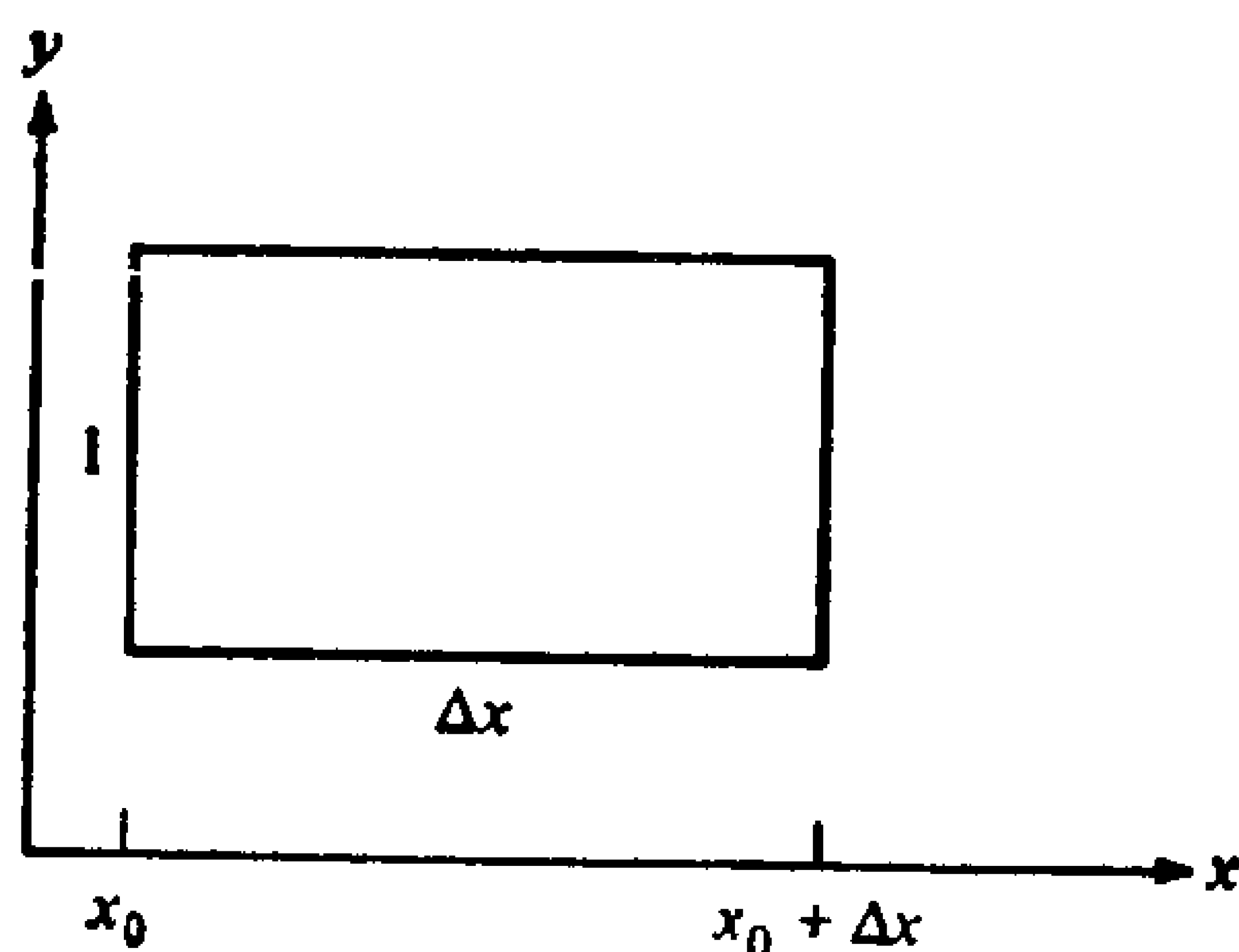


图 1.5　在沿着 y 不发生变化的情况下，平衡定律(3)研究了长度为 Δx、宽度为 1 的一个长方形中的质量变化率.

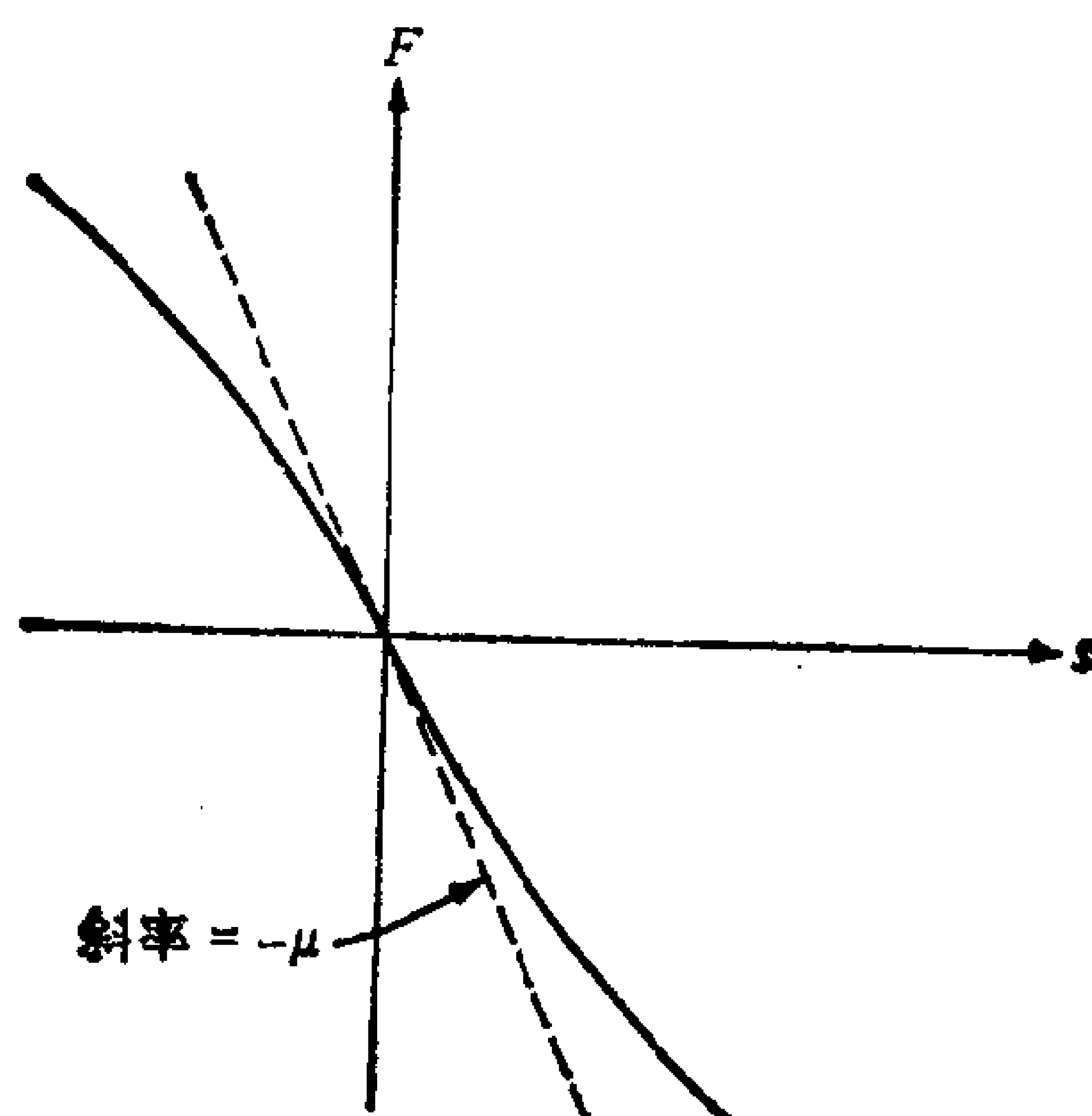


图 1.6　(5)式定义的函数 F 的一种可能曲线. 对于 $s>0$，图象给出负值，这是因为如果阿米巴的密度在 x 越大的地方越高的话，那么通量应是向左(负)的. 对于 $s<0$ 的情况，可作类似的解释.

$$+ \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} Q(x, t)dx. \tag{1}$$

宜用积分中值定理（附录 13.2）把上式改写为

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}[a(x_1, t)\Delta x] = J(x_0, t) - J(x_0 + \Delta x, t) \\ + Q(x_2, t)\Delta x; \\ x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_0 + \Delta x, \ x_0 \leqslant x_2 \leqslant x_0 + \Delta x.\end{aligned} \tag{2}$$

两边除以 Δx 以后取 $\Delta x \to 0$ 的极限，便得到**微分形式的普遍平衡定律**:

$$\frac{\partial a(x_0, t)}{\partial t} = -\frac{\partial J(x_0, t)}{\partial x} + Q(x_0, t), \ x_0 \text{ 任意}. \qquad (3)$$

在阿米巴的情况下，由于食物中断，可以不考虑再生，因为几乎不再有阿米巴产生了. 也可以不考虑死亡，因为在我们考虑的时间间隔中，死得很少. 故取

$$Q = 0. \qquad (4)$$

为了得到通量密度 J 的表达式，让我们先考虑不存在诱饵物的情形. 此时，阿米巴几乎作无规则的运动. 由于这种“扩散类型”的运动，密集的阿米巴将趋向于散开. 这就存在一种无规流 J_r，使阿米巴从浓度高的区域流向浓度低的区域. x 处的通量大小似乎依赖于 x 与邻近点之间的浓度差. 我们用 $\partial a/\partial x$ 来表征上述浓度差(这是最简单的选择)，并假定

$$J_r(x, t) = F\left[\frac{\partial a(x, t)}{\partial x}\right], \qquad (5)$$

F 是某一函数. 当 $a =$ 常数时，$J = 0$. ——这是因为在无规运动的情况下，向左运动的阿米巴跟向右运动的一般多. 在这一情况下，$\dfrac{\partial a}{\partial x} = 0$. 因而根据(5)式，唯一明智的假定是

$$F(0) = 0. \qquad (6)$$

这样，F 的图象必须具有图 1.6 所示的形状. 对于足够小的 s 值，我们可以把图象近似为一条直线. 命直线的斜率为 $-\mu$，我们便得到关于 F 的最简单的合理假定 $F(s) = -\mu s$; 即

$$J_r(x, t) = -\mu \frac{\partial a(x, t)}{\partial x}. \qquad (7)$$

把(3)、(4)与(7)式合并起来，我们便得

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial a}{\partial x}\right). \qquad (8)$$

方程(8)是扩散方程，将在第三章开始时再作详细研究．这一方程通常用来摹写无规运动的任何粒子体系的浓度变化．空气中的烟粒即是一例（参第三章）．常数 μ 决定了无规运动的急剧程度，通常称作**扩散率**．这里我们把 μ 称作游动性（motility）．这个生物学名词通常只在定性描述中运用，这样便有精确的含义了．

方程(8)是在假定不存在诱饵物的情况下推得的．再考虑到**趋药性**（chemotaxis），这是由化学浓度的变化所引起的定向运动，我们在(7)式的 J_r 中加进一附加项 J_c．令 $\rho(x, t)$ 为诱饵物的密度．象前面那样进行论证，我们就从最初假定 J_c 是诱饵物梯度 $\partial\rho/\partial x$ 的函数得到至少在小梯度值下 J_c 正比于诱饵物梯度的假设．如果阿米巴密度大两倍，而梯度值固定的话，那么净通量密度亦应大两倍．因而比例因子应该是 a 的倍数．我们便得到如下假设：

$$J_c = \chi a \frac{\partial\rho}{\partial x}. \tag{9}$$

因子 χ 是趋药性强度的量度．注意：与(7)式相反，(9)式中不存在一个负号．这是因为阿米巴倾向于朝着诱饵物浓度高的地方运动(并且背着阿米巴浓度高的地方运动)．

假定(3)式中的总通量 J 是无规贡献部分 J_r 与趋药贡献部分 J_c 之和，这就得到关于阿米巴密度变化的最后方程：

$$\boxed{\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial a}{\partial x} - \chi a\frac{\partial\rho}{\partial x}\right).} \tag{10}$$

我们把 μ 与 χ 取为正的常数．考虑到可能会出现的 μ 和 χ 随 ρ 的变化是并不困难的，不过这仅仅使得以后分析中的某些细节有所改变而已[练习 2(a)]．注意，即使 μ 与 χ 为常数，(10)式也含有一(平方)非线性项 $\chi a(\partial\rho/\partial x)$，因为此项跟两个未知函数 a 与 $\partial\rho/\partial x$ 的乘积成正比．[这一平方非线性也出现在我们关于星系结构的研究之中——与方程(2,4)后面的讨论作一比较]．一般说来，非线性项使得数学分析变得更为困难，因而更富有挑战性，更值得付出更大的努力．

我们还需要一个关于诱饵物密度 ρ 的方程．它与普遍形式

(3)一样：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=-\frac{\partial J_a}{\partial x}+Q_a.$$

(下标"a"表示诱饵物.)象(7)式一样，诱饵物分子的无规运动也是用通量正比于梯度来摹写的：

$$J_a=-D\frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

由于阿米巴产生分泌物的结果，净产生项 Q_a 具有正的贡献 fa. 此处 f 是单位阿米巴密度的分泌率. 诱饵物活性的衰减是怎样的呢？如在放射性或某些自发过程中那样，我们把衰减率取作与诱饵物的存量成正比[1)]，比例常数为 k. 这样，$Q_a=fa-k\rho$，所要求得的 $\partial\rho/\partial t$ 的方程为

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t}=fa-k\rho+D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2},} \tag{11}$$

其中 f, k 与 D 取作正的常数.

关于两个未知函数 $a(x,t)$ 与 $\rho(x,t)$ 的偏微分方程(10)与(11)给出了我们所处理的问题的基本表述.

精确解：均匀态

可以十分容易地找到方程(10)与(11)的一个准确解. 这是**均匀态**：

$$a=a_0,\quad \rho=\rho_0, \tag{12}$$

a_0 与 ρ_0 为常量. [当(12)式成立时，我们称系统处于**均匀态**.]把(12)式代入(10)与(11)式之后，我们发现，如果：

$$fa_0=k\rho_0 \tag{13}$$

那么(12)式确实是一个解.

等式(13)在物理上是合理的，因为它表示了在均匀态中诱饵

1) 如前所述，实际上衰减是由酶的作用引起的. 如果采用米凯立斯-孟坦动力学(第十章)，可把 k 取作 ρ 的某一函数. 但是这并不影响分析过程的要点[练习2(b)].

物的分泌率必定被衰减率恰好抵消.

把聚集的开始当作失稳问题来分析

我们把均匀态看作是聚集前的分裂期间. 阿米巴和诱饵物的密度难免有小扰动,这种小扰动的增长造成了均匀态的破坏,我们用它来摹写聚集的开始. 也就是说,我们把聚集的开始看作是均匀态的某种失稳,关于失稳的研究构成了应用数学的一个经典部分(参 11.1 与 15.2 节). 可以认为,由于在分裂期间中表征阿米巴性质的诸种参数 μ, χ 以及 f 有了变化,才出现了失稳.

失稳理论的基本观念是这样的: 假定在某一起始时刻,系统的状态与均匀态之间有了一点微小的扰动(例如,假定阿米巴发生了一种局部簇聚,同时诱饵物随之也有局部浓集.) 随着时间的推移,这种小扰动究竟趋于消失呢,还是变得更加厉害? 在前一种情况下,我们说均匀态对于小扰动是稳定的,在后一种情况下,就说是不稳定的. 由于扰动是不可避免的,所以不稳定态是观察不到的. 在失稳情形下,情况会进展,所以均匀态会被某一其他状态所代替.

为了作稳定性分析,我们引入变量 a' 与 ρ',其定义为

$$a(x,t)=a_0+a'(x,t),\quad \rho(x,t)=\rho_0+\rho'(x,t). \qquad (14)$$

例如,此处 $a'=a-a_0$,它是偏离均匀性的量度; 因而可以把它看作是阿米巴密度中的扰动.

为了求得 a' 与 ρ' 的方程,我们把(14)式代入(10)式与(1)式中去. 从前者得到

$$\frac{\partial a'}{\partial t}=\mu\frac{\partial^2 a'}{\partial x^2}-\chi\left[(a_0+a')\frac{\partial^2\rho'}{\partial x^2}+\frac{\partial a'}{\partial x'}\frac{\partial \rho'}{\partial x'}\right]. \qquad (15)$$

这一方程是非线性的,因为存在着二次项 $a'(\partial^2\rho'/\partial x^2)$ 与 $(\partial a'/\partial x')(\partial\rho'/\partial x')$. 我们将假定扰动(及其微商)是微小的,在这种情况下把 a' 与 ρ' 称作**微扰**. 某些项中的微扰是二次的,另一些项中则是线性的. (15)式中两个小项的乘积比之仅含单个微扰作用的另一些项说来是可以忽略的.因而消去所有非线性项之后,方程便

线性化了．作为(10)式的线性变式，我们便得

$$\frac{\partial a'}{\partial t}=\mu\frac{\partial^2 a'}{\partial x^2}-\chi a_0\frac{\partial^2\rho'}{\partial x^2}. \tag{16}$$

至于(11)式，把(14)式代入后运用(13)式，可得

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t}=fa'-k\rho'+D\frac{\partial^2\rho'}{\partial x^2}, \tag{17}$$

这已是线性的了．

这样，我们面临一对常系数的线性偏微分方程． 我们猜测它们有如下形式的解

$$a'=C_1\sin qxe^{\sigma t},\quad \rho'=C_2\sin qxe^{\sigma t}, \tag{18}$$

此处 C_1 与 C_2 为常数[1]．倘若

$$(\sigma+\mu q^2)C_1-\chi a_0q^2C_2=0, \tag{19a}$$

$$-fC_1+(\sigma+k+Dq^2)C_2=0. \tag{19b}$$

易于看出[练习 1(a)]的确存在着形如(18)式的解，上面的代数方程组具有平庸解 $C_1=C_2=0$．[从(18)式可以看出，这仅仅证明了可能存在着微扰恒等于零的准确解．]在非平庸解的情况下，系数行列式必须为零．这样便得到下列 σ 的二次方程：

$$\sigma^2+b\sigma+c=0;\ b\equiv k+(\mu+D)q^2,$$
$$c\equiv\mu q^2(k+Dq^2)-\chi a_0fq^2. \tag{20}$$

可以证明上述二次方程具有实数解[练习1(b)]．为了保证稳定性，两个根必须是负的，这样指数因子 $\exp(\sigma t)$ 便使微扰衰减． 不难证明(练习 1)，稳定性的充分条件是 $c>0$，这就要求

$$\chi a_0f<\mu(k+Dq^2),\quad q\neq0. \tag{21}$$

由(18)式可知，$2\pi/q$ 是我们所研究的微扰的波长．既然 μ 与 k 是正的，那么(21)式右边随着 q 减小而单调下降，直至 μ、k 的下确界．因而，波长 $2\pi/q$ 越长，微扰越"危险"[因为(21)式越容易被破

---

1) 作出象(18)式这样的假设的原因将在 15.2 节中更充分地加以讨论． 在这儿我们要提到：如果(18)式中是余弦的话，其结果是完全一样的(参阅练习 3)． 运用傅里叶分析(如第四、五章所讨论的那样)通过把正弦解迭加起来可以得到更普遍的扰动．

坏]. 我们断定,只要

$$\frac{\chi a_0 f}{\mu k} > 1, \tag{22}$$

便可能是失稳的,因为此时在 q^2 值充分小的范围中,(21) 式不成立了.

对于分析进行解释

从上述分析中得到的关于聚集的看法阐述如下. 在分裂期间的早期,不等式(22)不成立,因而均匀态是稳定的. 由于饥饿的刺激受到触发之后,各种参数逐渐有了变化. 最终(22)式得以满足,聚集便开始了. 我们把"聚集领地"的大小看作是失稳的波长; 上述分析预言了领地的大小在一定意义上是"十分大的".

对于失稳判据(22)式可作如下解释. 假设阿米巴和诱饵物在某些点上有了浓集. 具有游动性 μ 的阿米巴作无规则"扩散", 使得这种浓集趋于散开. 诱饵物的衰减(其强度以 k 量度)也有同样作用. 较大的 μ 与 k 意味着维持稳定的作用较强. 因而 μ 与 k 的增加意味着失稳判据(22)式更加难于满足,这是合理的.

与此相反,由于趋药性(强度 χ), 诱饵物的局部浓集趋向于使阿米巴朝着浓集的地方运动. 阿米巴的浓集也会使得诱饵物的浓度增加, 这是因为有了高度局部浓集的分泌源. 这一效应的强度是以 a_0f 量度的. 这就解释了消除稳定作用的因子 a_0f 与 χ 出现在 (22) 式分子中的原因. 如果消除稳定的作用超过了稳定的作用, 那么失稳就产生了.

也许不作数学分析,也能得到前面作出的关于聚集的解释.然而典型之处在于,只有通过某种计算之后,看来才能识别现象的物理本质. 另外,判据 (22) 是一个能够进行实验检验的定量结果. 尚未作出充分的定量检验,但是已经观察到在聚集开始的时候,趋药灵敏度 χ 与诱饵物分泌率 f 大约上升了 100 倍. 正如我们在星系结构中讨论的那样, 未来的定量检验可能会暴露出认识上的缺陷,这在定性考虑中是从未显示出来的.

上述分析是根据发表在1970年理论生物学杂志上的一篇(前已引过的)论文作出的. 自此以后,由不同作者撰写的关于粘菌阿米巴方面的若干文章已经发表在上述杂志或其他杂志上. 他们处理了如下题材: (i) 对化学动力学过程作出更为准确的模拟,因而对前面所预言的"十分大的领地大小"作了可能的改进. (当然还讨论了其它问题); (ii) 如扉画所示的聚集的趋聚类型;以及 (iii) 诱饵物脉冲式分泌的影响和忍耐期. 进一步的工作无疑是考究非线性效应的. 关于粘菌阿米巴和其他集体趋药运动方面适合于数学工作者阅读的两篇综述文章发表在 *Some Mathematical Questions in Biology, Vol* III (*Providence, R. I.: American Mathematical Society*, 1972).

练　　习

1. (a) 证明(19)式.

(b) 证明二次方程(20)的根是实的.

(c) 证明: 当且仅当 b 与 c 都是正数的话, 两个根才是负的.

(d) 证明: 由于 f, D, 与 χ 为正,所以如果 $c>0$, 则 $b>0$. 由此推出(21)式.

2. 研究一下,出现下列情况时,分析过程有何更改.

(a) 如果 μ 与 χ 是 ρ 的函数.

(b) 如果 k 与 f 是 ρ 的函数.

3. 如果考虑到二维的变化,那么支配方程(10)与(11)式为下式所代替:

$$\frac{\partial a}{\partial t}=\nabla\cdot(\mu\nabla a-\chi a\nabla\rho),\quad \frac{\partial\rho}{\partial t}=fa-k\rho+D\nabla^2\rho.$$

假定扰动项具有 $\sin(q_1x+q_2y+\theta)$ 的空间依赖关系, 此处 q_1, q_2 与 θ 是常数. 试证: 如果 $q^2=q_1^2+q_2^2$, 则扰动周期仍是 $2\pi/q$,而失稳条件仍为(22)式.

4. Δ 定义为 $\chi a_0 f/\mu k=1+\Delta$, 且假设 Δ 是正小量. [参照(22)

式.] 忽略 Δ 的高次项，找出二次方程较大根的近似值. 推出增长得最快的扰动的波长近似地为 $2\pi(2D/R\Delta)^{\frac{1}{2}}$.

附录 1.1 关于应用数学的某些见解

论应用数学的特点

我…把应用数学形容为**连接**纯粹数学与科学技术的桥梁. 我故意把这一桥梁描绘成是连接这两个活动领域的，而不是从一个领域**通向**另一领域，这是因为桥梁上的交通是双向的，它对于科学技术的重要性是显而易见的；但是，它对于纯粹数学的重要性也不亚于前者. 如若没有来之于应用的刺激，那么纯粹数学将会显得苍白无力.

——选自 W. Prager 的"导评"，载于 *Quart. Appl. Math.* **30**, 1—9 (1972)，"关于应用数学未来的讨论会"专辑

如果人们要根据应用数学家对于数学的贡献来判断他们功绩的话，那么就象是根据历史学家对于历史的贡献去判断他们的功绩；不应该要求前者更多些. 他们都把很多创造性的努力花费在解释上了. 对于初看起来极其复杂或者晦涩难解的许多问题，试图把数学观念用在它们上面以求适合于任何一种样式，这对大多数人来说乃是一种振奋人心的挑战；而我认为，这正是应用数学的精萃.

——选自 R. W. Brockett 的 "The Synthesis of Dynamical Systems"，同上，pp. 41—50

因而这里有三个计算方面的课题——算法的复杂性、运算系统的模型建立以及数据结构的建立，它们能够用到的数学都比现在已经用到的多得多. 在这些课题中所需要者远比近似分析这类数学工具要多，——近似分析在物理科学中已取得了如此的成功. 然而，这些课题将成为广阔的用武之地，将有很多人致力于它们的工程发展和它们的应用——这一用武之地将比我们现在已经开拓的大多数数学领域都要大. 我以为，我们将扩大我们关于什么是

应用数学的观念，把这些课题包括在其中.

——选自 H. Cohen, "Mathematical Applications, Computation, and Complexity". 同上, pp. 109—121

我感到，应该从"动力学"及"运算"的角度把"应用数学" 定义为将数学应用到其他学科的过程——以及对这种过程的研究."应用数学"即是"应用数学家"所干的行当；而"应用数学家"是这样一些人，他们走出去同其他学科中试图运用数学的科学家进行讨论，并且同那些对学科本身已有充分的知识、能够从更深的层次上去理解问题的科学家进行讨论.

——选自 P. Herman "Comments on the COSRIMS Report", 载于 *Amer. Math. Monthly*. 517—21 (1970 年 5 月号)

论纯粹数学、应用数学以及理论科学之间的关系

我认为，数学观念来之于经验这样一种说法，相对来说很接近于真理——真理是太复杂了，我们只能做近似……但是，一旦这些观念被构想出来以后，学科就开始了它固有的生命，而且可以把它们比拟为一个被由纯粹美学动机所驱使的创造工作者…[然而]当一门数学学科远离了它的经验源泉…就会产生一种巨大的危机，即学科会沿着阻力最小的方向发展. 川流远离了它的源头，将会分离成一簇簇渺小的支流，因而学科就会成为一堆无组织的繁琐细节.

——选自 John von Neumann, "The Mathematician", 重新刊载于 *World of Mathematics* (New York: Simon & Schuster, 1956), p. 2061

"应用数学"是那些自翊为"纯粹"数学家的人针对那些他们认为是不纯粹的人的一个轻蔑之词. 数学过去是、现在是而且永远是纯粹的数学. "纯粹" 这一形容词乃是多余的，数学的精萃就是一种抽象，这是靠想象创造出来的，是经过严格冶炼成的；而"纯

粹数学"这一名词乃是上世纪病态的创造物，它好象是一个杀父罪犯——否认它自己是从人类知觉中产生成长起来的，这是为了自命高雅而创造出来的一个名词.

——选自 C. Truesdell "The Modern Spirit in Applied Mathematics", 载于 *ICSU Rev. World Sci.* **6**, 195—205 (1964)

数学语言适合于物理定律的公式化，这一奇迹乃是大自然给予我们的了不起的礼物，对此我们既不理解亦非受之应得. 我们应该表示感激，并且希望在未来的研究中它仍然保持这种作用，不管是好是坏，不管是我们感到高兴或者迷惑，我们希望它会扩展到其他广阔的知识领域中去.

——选自 E. P. Wigner "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences". 载于 *Commun. Pure Appl. Math.* **13**, 1—14 (1960)

论应用数学的教学与实践

数学家总是喜欢把他们的思想晶品表述成一种演绎性的普遍理论，并且把个别数学现象降格成一个例子. 而屈从于教条形式的读者也就很容易接受这种灌输. 然而，活生生的数学的发展源泉是自然科学中这样的一些特殊问题，了解这些问题并不很难，但是要求解它们是很困难的，要求采用具有更为普遍意义的新方法；只有了解了这一宗旨以后，才能摆脱偏见.

——选自 R. Courant 所著的 Dirichlet's Principle (New York: Wiley-Interscience, 1950) 一书的前言中的论点

在下述观点上取得了完全一致的意见，这就是当今的数学学生没有学到足够的应用知识……而且也一致同意，一个数学家至少应该熟悉一个应用领域.

——选自国家研究委员会数学科学分会的

1970—1971 年度报告，即研究生与博士毕业生教育委员会以及大学生教育委员会的联合报告

世界正在变得越来越复杂. 我们正在迅速地陷入一种不堪忍受的、甚至是危险的境地. …数学是唯一的学科，它宽广得足以防止这一点. 不是实际上讲授的那种数学，而是所有应用领域所刺激发展起来的一门新数学. 我们必须把它作为一门**基础科学**来讲授，它给人以必不可少的思想模式和工具，去处理现实世界：物理世界以及**人类创造的世界**.

——选自 A. Engel, 所写的 "The Relevance of Modern Fields of Applied Mathematics for Mathematical Education", 载于 *Educ. Studies Math.* **2**, 257—69 (1969)

在数学课上通常讲授的都是问题，然而对于这些问题是从何而来，以及答案可以用来干什么，这方面却讲得不多了. 据我们看，这一被忽略的内容是值得讲授的. 这对于那些要想当数学家的学生尤其显得重要，因为它会向他们解释为什么电子计算机并不是正在使数学家陷入失业的困境. 这对于那些正在钻研数学比重较大的科学的学生说来也是重要的，因为这会使他们明白，电子计算机不是正在剥夺他们学很多数学的特权（或许有人把它视作义务）.

——选自 R. Hooke 与 D. Shaffer 所著的 *Math and After Math*. (New York: Walker and Co. 1965) 一书的第 4 页

我以为，作为试图跨入应用领域的数学家，我们需要某种训练. 你所需要的训练是，一旦当你发现了所要处理的真正有关的物理现象是什么以后，就能够解决数学问题，尔后继续去寻找新的物理现象.

——选自 H. B. Keller "Symposium on Mathematical Professional Societies and Their Present Role" 中的论

点，载于国家研究委员会数学科学分会的1970—1971年度报告，第50—51页

只是把数学的外表洗刷得雪亮，但不深入问题实质的严格，在应用中并非必不可少的.

——选自 U. Grenander 的“Computational Probability and Statistics”一文，载于 *SIAM Rev*. **15**, 134—91 (1973)

许多青年数学家过多地抱这样的态度，他们总是去找出[科学家]正在说的话中有哪些是错误的，而不是看到哪些是对的；而我以为应用数学的一个重要之点在于试图对于那些正确的东西作出一点理解.

——选自 E. W. Montroll 的“Education in Applied Mathematics”一文（SIAM 主办的一次会议的文集），载于 *SIAM. Rev*. **9**, 326 (1967)

大体而言，由核心数学家组成的社团已经作出决定，它们没有责任提供有关数学应用的训练；同样也可以大体上说，关于方法论方面的许多训练已经成为应用数学社团的责任了. 重要的问题是：这些社团是否将把下列训练纳入自己的工作，这种训练可以为人们提供启发性的、创造性的推理，这对于科学、技术以及最终对整个社会的进步是必需的；或者它们是否准备隐退到一种与世隔绝的偏见之中，在研究和训练中只管抽象方面？如果情况真是如此的话，那么当代以及可能以下几代的学生将会几乎得不到在技术、科学、环境修复以及医学发展中所需要的这样或那样的训练.

我们的会议冠以“应用数学的未来”的名称. 我的观点是，如若在回答上述问题时，我们选择了后者，那么应用数学不会再有富有生命力的未来——它只能成为数学的一个繁殖力很差的狭小角落；尽管这门学科正处于辉煌时期，可它已经人口过剩，不可能如愿以偿地再生育了. 但是，如果我们作前一种选择，也就是在它的全部其他活动中，如果应用数学社团能够对于那些恰好处于定量

化阶段的学科的数学化作出创造性的贡献，如果它们热心于找出复杂现象的近似模型(从而虽然牺牲了细小的精确性，但解释起来要容易些)，如果它们能够去寻找一些技巧，借以可以更加容易地知道给定数学模型的含义，那么应用数学家将会把一直延续至今的挑战、智力成就、对社会的贡献继承下去，在他们退休以前，他们也一直能享受主要是数学家和物理学家才有权享受的那种乐趣.

——选自 G. F. Carrier "Hauristic Reasoning in Applied Mathematics", 载于特辑 "Symposium on the Future of Applied Mathematics" *Quart. Appl. Math*. **30**, 11—15 (1972)

第二章　确定性系统和常微分方程

在本章中，我们主要以质点动力学为例，说明应用数学范围之内的某些问题．我们的根本目的是要分析应用数学处理问题的过程．当前，我们最关心的事情不是给读者扩充知识；因而全面说明某些方法将留待以后再进行．

我们先要考察一下描述行星运动的开普勒定律与牛顿万有引力定律公式体系之间的关系．行星和彗星的轨道是用相当精巧的方法求得支配方程的经典解而推算出来的．不过，当考虑相对论效应时，想去求出精确解就不再是一个最佳方案了．这时应该采用扰动法；另外，要想计算其他行星对于某一行星绕日轨道的比较小的影响时，也要采用扰动法．

为了说明怎样根据一定的需要去设计实际的计算步骤，我们相当详细地讨论了扰动理论．大体说来，借助扰动理论，可以算出一个小扰动对于某一已知状态的影响．巧妙地变更扰动理论的形式，往往可以得到异常有价值的知识．但是，指望用几页篇幅去概括这些内容，这是办不到的；我们打算在本卷中另辟章节加以介绍，而本章仅仅起到初示端倪的作用．

质点动力学是确定性过程的一个例子，所谓确定性过程，即是只要给出有关这种过程目前状态的足够知识，那就可以完全确定它的未来．无论是要详细算出这种过程的结果，还是仅仅从原理上考察一下，总会碰到某些纯粹的数学问题．因而在本章末尾，我们将讲述并证明某些有关定理，这就是常微分方程组的存在性定理、唯一性定理，以及对于某一参数的连续依赖性定理．

2.1　行星轨道

宇宙浩瀚无垠，夜空群星灿烂；仰望这一大自然的壮丽景象，

不论哪一时代的人们无不为之动情！ 当人们作了仔细观测以后，他们发现有些“星星”是漫游者——叫做行星（在希腊文中 $\pi\lambda\alpha\nu\acute{\eta}\tau\eta s$ = 漫游者）.的确，行星轨道的记录，构成了科学资料中最早的重要积累之一.

在中国的第一部通史“史记”(大约写于公元前二世纪)中，有一卷记载了天体观测结果. 当时认出了五个行星，并已知道木星的周期几乎恰好是 12 年. 这是**波特定律**（*Bode's law*）的一个特例[1].

在西方，哥白尼（1473—1543)、第谷（1546—1601）和伽利略（1564—1642)先后对于行星运动作了精密观测. 第谷所收集的大量观测资料奠定了著名的开普勒（1571—1630）定律的基础. 尔后，又在开普勒定律的基础上，牛顿（1642—1727）借助于当时新发明的微积分发现了万有引力定律.

开普勒定律

开普勒定律的原始说法可以表述如下:

I. 行星绕日运动的轨迹是一椭圆，而太阳位于椭圆的一个焦点上.

II. 如果从太阳到行星画一矢径，那么这一矢径在相同时间内扫过相等的面积.

III. 绕轨道运行一周的时间(即周期)的平方与椭圆长轴的立方成正比[2].

---

1) 太阳系行星图的半径可以十分精确地用公式 $0.4+0.3\times2^n$ 以天文单位给出. 对于水星、金星、地球、火星、小行星等，n 值分别为 $-\infty$，0，1，2，…7，8. 冥王星和海王星并不严格遵从这一定律，这一事实大概暗示着冥王星原先是海王星的一个卫星.

2) “牛顿后来写道：‘开普勒知道，行星轨道不是圆形而是卵形的，并且猜想它是椭圆的’. 这种说法是正确的，但是开普勒的猜想不是随便作出的. 这一猜想来之于一种预感，这种预感是当他面对以前的全部理论和第谷的新数据，进行积极探索的产物.”

这段引文摘自 1972 年 3 月号 *Scientific American* (Vol. 226, p. 92)上 C. 威尔逊所写的“开普勒是如何发现他的头两条定律的”一文. 威尔逊在总结中进一步作出如下评论:

我们采用以太阳为原点的极坐标 (r, θ) 进行数学表述. 我们把所有的行星甚至太阳本身都当作质点来处理.（注意,这是进行数学表述时所作的一种近似或理想化. 这种近似是合理的，因为太阳的半径比太阳到行星的距离要小得多.）如果用 h 表示矢径在单位时间内扫过面积的二倍，$\left(\text{并像牛顿那样，我们宜用符号}\cdot\text{代表}\ \dfrac{d}{dt}\right)$ 那么开普勒第二定律便可表述为：在行星的轨道上，$r(t)$，$\theta(t)$ 有如下关系：[参练习 1(a)]

$$r^2\dot{\theta} = h,\ h\ \text{是常数}. \tag{1}$$

为了对这个结果作出一个简单有益的解释，我们引进笛卡尔坐标 (x, y). 这样可把(1)式写作：

$$x\dot{y} - y\dot{x} = h, \tag{2}$$

再对 t 进行微商，便得：

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = 0. \tag{3}$$

如果我们定义矢量 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{s}$ 为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j},\ \mathbf{s} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}, \tag{4}$$

那么 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{s} = 0$，这就是说 $\mathbf{s}$ 垂直于位置矢量 $\mathbf{r}$. 但根据 (3) 式，$\ddot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{s} = 0$，因而 $\ddot{\mathbf{r}}$ 在 $\mathbf{r}$ 方向上. *这就是说，如果"等面积"结论成立，那么行星的加速度总是指向(或背向)太阳的*. 如若把上述推理步骤倒过来做，就能证明：把结论反过来讲，也是正确的.

从这里我们学到了一点东西，这就是数学结果的解释与它们的表述形式有很大的关系. 尽管方程(1)和(3)是等价的，但它们使我们借助完全不同的解释和看法，看到了同一现象的不同侧面. 此外尚须注意运算技巧的重要性.

"不过，他（开普勒）的全部推理的基础是他最早所觉察到的速度与距离之间反比关系的重要性，这一反比关系乃是一种有朝一日会导致角动量守恒定律的先兆. 正是上述预感，引导开普勒通过长达 900 页的计算得到了比已有的任何理论都要优越的一个行星理论，…撇开机遇与幸运不说，开普勒取得成功的要素是：他认为事物是可知的那种信念；他对事业的献身精神，这促使他作了四年时间的推理和计算；最后一点是，他最初得到的预感的正确性，以及借助于这种正确预感从事物的千头万绪中理出头绪的能力."

开普勒第一定律告诉我们，可以用简单的公式

$$r=\frac{p}{1+e\cos\theta} \tag{5}$$

描述行星的轨道，式中 $p>0$，$0<e<1$. 上式便是长半轴为 $p/(1-e^2)$ 的椭圆方程的标准形式. 稍加运算[参练习 2(*a*)]，便可证明，径向加速度为

$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-\frac{h}{pr^2}. \tag{6}$$

因此，*加速度反比于径向距离的平方*. 请注意，我们在这里一点也没有涉及天体之间的作用力. [像(6)式那样的陈述，仅仅描述运动的几何特性，或者说它是由几何特性得到的，因而人们把这样的陈述称为运动学的陈述.]

量 h 和 p 是个别行星的特征. 利用开普勒第三定律，可以证明*比值 h^2/p 对所有行星都是相同的*[参练习 2(b)]. 因而对于行星的运动，就有

$$a_r=-\frac{K}{r^2}, \tag{7}$$

式中 K 是一个普适常数.

万有引力定律

根据开普勒定律，我们推得了所有行星的加速度遵从平方反比定律，其比例常数相同. 牛顿把上述结果跟他的第二运动定律合并起来，并且假定迭加原理(也就是两个太阳的作用是单个太阳作用的两倍)成立，从而推得了万有引力定律的现有形式：

$$F_r=\frac{GMm}{r^2} \tag{8}$$

式中 F_r 是两个相距 r 的点质量 M 与 m 之间作用力的大小；G 是一个普适常数，作用力是吸引力.

简洁优美的数学处理令人惊异，尤其是当把这种理论与冗长乏味的观察结果相比较时，更是如此. 不过，如若没有这种冗长乏味的观察结果，能够想到这一强有力的定律吗？ 显然这是不可能

的．另外，如若没有当时新发明的微积分技巧，也不可能作出所需的计算．

万有引力定律确实是自然定律中最卓越的定律之一．它为什么是普适的呢？它的幂次为何恰好等于2？更加突出的是，根据广义相对论，这样一个优美的原理可以被另一原理所代替，它更为深广，并且假若不是更加优美的话，至少也是同等优美．因而，可以毫不夸张地说，上帝是一个数学家！

从演算角度我们看到，为了达到我们的结论，*必须自始至终记住所得结果的物理解释，并且要有十分纯熟的运算技巧*．

从万有引力定律的历史中，还可以得到另一教训，即进一步证明需要有恰当的观念，并且精通数学技巧．牛顿把他的定律应用到月球绕地球的运动上，并把月球上的加速度跟地面上一个物体的加速度（可以直接观测）相比较，以此来检验他的定律．如果不知道连续分布在一个球体内的物质的引力势的话，就不可能作出这一比较．现在大家都知道，这种物质分布所产生的引力吸引作用与物质集中于球心所产生的引力吸引作用是等价的．牛顿未能一开始就证明这一点，因而使他推迟了大约20年才发表了上述比较结果．

反问题：行星与彗星的轨道

我们从牛顿定律(8)或者运动学定律(6)出发，试问行星是如何运动的．我们发现：(i)我们能够求解微分方程而得到满意的答案；(ii)并不是所有轨道都呈椭圆．某些轨道呈双曲线，另一些轨道呈抛物线——大自然提供了这样的例子，就是彗星轨道．正如我们即将看到的那样，求解有关的微分方程，需要相当好的运算技巧．

数学问题的表述便是求出下列两个二阶微分方程的周期轨道：

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=-\frac{GM}{r^2}, \tag{9a}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0, \tag{9b}$$

式中左边的表式是极坐标系中的加速度分量(a_r, a_θ). 为了求得行星运动的轨道,必须对(9)式进行积分,以求得一对函数 $r(t)$, $\theta(t)$. 看来没有直接的解析方法完成这一任务.(可以应用数值积分法做到这一点,但是势必不能了解和洞察问题.)摆脱这一困难的灵巧方法是寻求 $r=r(\theta)$ 形式的轨道. 即便如此,下面我们将会看到,为了求解最后的微分方程,也还要作一巧妙的变换.

可以把方程(9b)积分一次,得到 $r^2\dot{\theta}=h$, h 是一常数.($r^2\dot{\theta}$ 这一物理量叫做运动常数或运动积分). 这样,重新又得到了等面积定律(1). 现在,我们可以利用(1)式把(9a)式中对于时间的微商用对于角度变量 θ 的微商来替代了. 所得的方程仍很复杂,不过引入变量

$$u=r^{-1}$$

之后,便可把它简化. 这样做了以后,我们得到

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{GM}{h^2}. \tag{10}$$

(10)式的通解为[习题 3(b)]

$$u=h^{-2}GM[1+e\cos(\theta-\theta_0)], \tag{11}$$

式中 e 与 θ_0 是积分常数.

(11)式的解对于 θ 是周期性的,不过不是所有的轨道都具有周期性. 当 $e<1$ 时,(11)式便是所观察到的椭圆轨道.但是当 $e>1$ 时,对于 θ 的某些值,u 可以为零,因而行星会跑到无穷远去;这时轨道是双曲型的. 在临界情形 $e=1$ 时,便得到抛物型轨道.积分常数 θ_0 是不重要的,因为它仅仅表明对称轴的取值为 θ_0.

根据广义相对论求得的行星轨道

当我们按照广义相对论考虑牛顿力学的修正时,可以证明行星轨道方程(10)变为下列形式:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2}+u=\frac{GM}{h^2}(1+\varepsilon u^2), \tag{12}$$

式中 ε 是一小参量(这里仍未计及其他行星的影响). 由于这一方程对于 u 是非线性的,对它进行积分便更为困难. 然而,采用椭圆函数仍然可以做到这一点. 为了求得形式上更加方便的解, 将用"扰动理论"来处理这一问题. 这一理论所依据的事实是, 一个微分方程的解连续地依赖于一个连续地进入这一微分方程的参量. (我们即将进一步讨论这些问题.)在现在的情形下,当 $\varepsilon = 0$ 时, 这一方程的解是已知的. 由于 u 是连续依赖于 ε 的, 因而把 $\varepsilon = 0$ 的解作一适当修正,便能得到小 ε 的解.

采用扰动理论求得的结果表明,轨道仍然十分接近一个椭圆, 但是经过一个周期之后, 近日点 (最接近太阳的点) 有一个值为 $2\pi\varepsilon a^2$ 的进动. (求得这一结果的一种方法在 2.2 节中给出.) 观察到这一进动构成了广义相对论的主要实验验证之一[1].

关于方法选择的评论

采用详细的数值积分法或者用椭圆函数来考察 (12) 式的解, 同样也能得到进动. 然而,就其形式的明显性而言,哪一种方法都不如扰动理论. 而且在这一情况下, 后者也是极其准确的. 在另一些情况下,借助于近代计算机去分析一个表述得很好的问题,通常能够得出比近似分析法更加准确的数值结果. 然而要想从大量数值资料中抽出有用的普遍知识,通常是困难的,除非人们已经通过普遍的分析研究洞察了问题. 不过从另一方面看来, 探索性的数值研究有时成为成功的分析工作的一种极其宝贵的先导. 因而把各类方法得当地使用实在是最为重要的.

N 个粒子: 一个确定性的体系

现在让我们来考虑在引力作用之下的 N 个粒子组成的一个体

---

1) 方程(12)已由 K. 史瓦西导出. 关于相对论性近日点的进动方面的实验与理论的比较现状如下. 对于水星而言,效应最显著(每百年是 43 弧秒), 观察结果与爱因斯坦理论相符. 但是目前尚有争议, 因为太阳有可能是扁平的, 这也许就为替代爱因斯坦理论留下了余地. 请参阅 K. Nerdrvedt, "引力理论: 关于太阳系实验的经验现状", *Science* 178, 1157—1164(1972)

系;例如,由太阳及九大行星组成的太阳系. 令粒子 α 的位置矢量和速度矢量分别表作 $\mathbf{r}_\alpha$ 和 $\mathbf{v}_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,N)$. 这样，第 α 个粒子所遵循的运动方程为

$$m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha=\mathbf{F}_\alpha,\ \alpha=1,2,\cdots,N, \tag{13}$$

其中

$$\mathbf{F}_\alpha=\sum_{\beta\neq\alpha}\mathbf{F}_{\alpha\beta}; \tag{14}$$

这也就是由所有其他粒子所产生的作用在第 α 个粒子上的力 $\mathbf{F}_{\alpha\beta}$ 的合力. 按照牛顿定律,即是

$$\mathbf{F}_{\alpha\beta}=-\frac{Gm_\alpha m_\beta}{|\mathbf{r}_\alpha-\mathbf{r}_\beta|^3}(\mathbf{r}_\alpha-\mathbf{r}_\beta)=-\mathbf{F}_{\beta\alpha}, \tag{15}$$

它们仅仅依赖于粒子的位置坐标. 在另外的物理条件下，可能存在着一种外力场或力,它们或许也依赖于粒子的速度(例如当粒子是带电的;而且存在有一个主导磁场时). 不过,一般说来,没有真正依赖于粒子加速度的力.

因而我们有

$$\mathbf{F}_\alpha=\mathbf{F}_\alpha(t,\ \mathbf{r}_\beta,\ \mathbf{v}_\gamma)\ \alpha,\ \beta,\ \gamma=1,\ 2,\ \cdots,\ N. \tag{16}$$

在这种最普遍的情况下,我们仍可把运动方程 (13) 写成一个一阶微分方程组:

$$m_\alpha\frac{d\mathbf{v}_\alpha}{dt}=\mathbf{F}_\alpha(t,\mathbf{r}_\beta,\mathbf{v}_\gamma),\ \frac{d\mathbf{r}_\alpha}{dt}=\mathbf{v}_\alpha;$$

$$\alpha,\beta,\gamma=1,2,\cdots,N. \tag{17a, b}$$

我们有 $6N$ 个变量 $(\mathbf{r}_\alpha,\ \mathbf{v}_\alpha)$; $\alpha=1,\ \cdots,\ N$. 我们希望一旦给定了所有粒子在任何时刻的瞬时位置和速度，就可以确定这一体系其后的行为. 从数学上说来,这意味着如果在下列条件

$$t=t_0\ \text{时},\mathbf{r}_\alpha=\mathbf{r}_\alpha^{(0)},\ \mathbf{v}_\alpha=\mathbf{v}_\alpha^{(0)}\ \alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ N. \tag{18}$$

下去解出方程 (17) 的话,它的解应该是很好确定的了. 上述条件叫做**初始条件**，而我们刚才所提出的问题叫做一个常微分方程组的**初值问题**.

事实上,正如我们将在 2.3 节中做到的那样，可以证明初值问题具有一个唯一确定的解. 这一证明具有深远的后果，因为它使

得某些哲学家建立了确定性的宇宙观．如果根据任一瞬间的构造能唯一地确定宇宙的演化，那么就可以讨论一下"自由意志"还有什么置身的余地呢？[1)]

不过，从实用观点（而不是哲学观点）看来，现在的存在性和唯一性理论也是重要的．计算机的出现希望在作出大量计算之前，确保一个问题得以精确地表述．至少在计算机发展的现阶段，我们不能指望机器去检测原始表述中的困难，尔后再提出适当修改的建议．实际上，常要用试探法，因为要想证明全部所需的定理这是不可能的．不过，有经验的意见要比推测更优越，而且从实用观点看来，在缺乏严格指引路线的情况下，运用切实判断的能力或许是一个应用数学家最宝贵的财富之一．

线性

我们对于线性作一简介，作为本节的结束，以便保证对于一个重要概念作出理解．我们将以微分方程组为例来说明这一概念．

如果 $f(x)=ax+b$，a 与 b 为常数，那么 $y=f(x)$ 的图形是一直线．由于这一原因，f 称作一个**线性函数**．当 $b=0$ 时，函数称为**齐次的**；否则是**非齐次的**．

线性齐次函数（常称**线性的**）具有特别简单的性质．如果 $L(x)=ax$，则

$$L(x_1+x_2)=L(x_1)+L(x_2),\quad L(cx_1)=cL(x_1),\qquad (19a, b)$$

或者等价地有，

$$L(c_1x_1+c_2x_2)=c_1L(x_1)+c_2L(x_2)\qquad (20)$$

此处 c_1 和 c_2 是任意常数；x_1 与 x_2 是 x 的任意值．

令 $x(t)$ 是一个 n 个元素的列矢量（$n\times 1$ 矩阵），依赖于标量 t．定义一个具有矢量数值的函数 $\mathbf{L}(\mathbf{x})$ 如下

$$\mathbf{L}(\mathbf{x})=\frac{d\mathbf{x}}{dt}-\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}\qquad (21)$$

1）无需多说，我们仅仅触及了哲学立场的表面情况，我们不想进一步去追究这一问题．

此处的微商正如通常那样是对分量逐一进行的，并且此处的 $\mathbf{A}=\mathbf{A}(t)$ 是一个 $n\times n$ 矩阵，它与 $\mathbf{x}$ 相乘．注意 $\mathbf{A}$ 不依赖于 $\mathbf{x}$.

函数 $\mathbf{L}$ 也具有线性．因为如果 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 是任意的(可微)矢量函数，并且 α 是一标量(通常是一实数)，那么

$$\boxed{\mathbf{L}(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\mathbf{L}(\mathbf{x})+\mathbf{L}(\mathbf{y}),\quad \mathbf{L}(\alpha\mathbf{x})=\alpha\mathbf{L}(\mathbf{x}).} \tag{22a, b}$$

我们也有 (20) 式的类似等式，这是关于所谓 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 的**线性组合** $\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}$(此处 β 是另一标量)：

$$\boxed{\mathbf{L}(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y})=\alpha\mathbf{L}(\mathbf{x})+\beta\mathbf{L}(\mathbf{y}).} \tag{23}$$

读者或许已经遇到过十分重要的线性性质(22)或(23)的许多结果中的某些结果了．这儿，我们宜于给出有关常微分方程组的一个例子．利用定义(21)，

$$\mathbf{L}(\mathbf{x})=0$$

是一阶微分方程的一个线性(齐次)组．性质 (22a) 意味着两个解之和亦是一个解，因为

$$\mathbf{L}(\mathbf{x})=0,\ \mathbf{L}(\mathbf{y})=0$$

意味着

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\mathbf{L}(\mathbf{x})+\mathbf{L}(\mathbf{y})=0. \tag{24}$$

性质 (22b) 意味着一个解与标量的积仍是一个解，因为

$$\mathbf{L}(\mathbf{x})=0 \text{ 意味着 } \mathbf{L}(\alpha\mathbf{x})=\alpha\mathbf{L}(\mathbf{x})=0. \tag{25}$$

相似地，两个解(或许多解)的线性组合亦是一个解．

练　　习

1. (a) 方程(1)通常是在极坐标的初等处理中推得的．如果你不熟悉这种推导，请自行推导一下．

(b) 证明(2).

(c) 证明(1)是由(3)推得的．

2. (a) 证明(6).

(b) 证明(7).

3. (a) 证明(10).

(b) 证明(11).

4. 课文中关于开普勒定律的讨论，是把太阳和行星看作是一个质点来处理的. 写出关于这种处理的合理性的简短论证.

5. (a) 当 **L** 由(21)式所定义时，证明(22)与(23)式.

(b) 普遍地证明：当且仅当(23)式成立时，(22)式也成立.

(c) 证明：如像(21)式的线性方程组的许多解的一个线性组合也是一个解.

6. 在(9)式的方程中消去 θ，以便得到关于径向运动的一个微分方程. 把它积分以便推得径向运动的开普勒表示式

$$r = a(1 - e\cos E),\ n = (t - T) = E - e\sin E.$$

此处 a 是椭圆的长半轴，e 是偏心率，n 是轨道的频率，T 是近日点的进动周期，而 E (叫做偏角心反常)是一个参量，每走一圈，它的取值范围为 $(0, 2\pi)$. (位置角度 θ 即是所谓**真实的反常**；量值 $M = E - e\sin E$，随时间而线性变化，叫做**平均反常**。)

在推导中，先应得到下列形式的能量方程，

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = h^2\frac{a^2e^2 - (r-a)^2}{r^2a^2(1-e^2)}$$

为此，请注意在近日点和远日点(即分别离太阳最近和最远的位置)处的径向速度为零.

2.2 扰动理论初步，包括关于周期轨道的庞加莱方法

在本章开始之时，我们考虑了围绕一个固定不动的太阳运转着的单个行星. 随后关于N个粒子之间的相互作用的讨论使我们想起，我们较早的考虑[1]中忽略了行星之间的相互作用. 在以前工作的基础上，我们可以这样来处理这个问题，即用一个基本力场 $\mathbf{F}_\alpha^{(0)}$ (由太阳引起的)作为作用在第 α 个行星上的力 $\mathbf{F}_\alpha$ 的"近似"，

1) 还忽略了太阳的运动，只有引入另一套独立变量才能研究这种效应.

并且把其它行星的作用视作"小扰动". 为了表述这一过程，我们可以用下式

$$\mathbf{F}_\alpha(\lambda) = F_\alpha^{(0)} + \lambda[\mathbf{F}_\alpha - \mathbf{F}_\alpha^{(0)}]$$

来替代 (1.13) 或 (1.17a)的右边,并且容许参数 λ 在区间(0, 1)之间变化. [1]把 $\lambda = 0$ 与 $\lambda = 1$ 时分别所得的解进行比较,那么便得到了扰动引起的效应.

实际上，在确定小扰动对于行星运动的作用时涉及到一些特殊的困难. 这里因为扰动的作用是在许多周期中累积起来的，而我们不希望单个轨道有很大的改变. 庞加莱克服了这一困难，在把寻常形式下的理论加以介绍之后，我们将简短地讨论一下他的思想.

扰动理论: 初步考虑

为了澄清刚才讨论过的观念,让我们考虑一个最简单的例子. 这就是单个常微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \varepsilon) \tag{1}$$

在下列初始条件

$$y = y_0, \text{ 当 } x = x_0 \tag{2}$$

的求解问题. 我们希望考究一下其解 $y(x, \varepsilon)$ 对于在 (1) 式中出现的参量 ε 的依赖关系.

假设已经知道了 $\varepsilon = 0$ 时的解 $y(x, \varepsilon)$[2]. 假定当 ε 的值充分小时, $y(x, \varepsilon)$ 可以展为 ε 的泰勒级数:

$$y(x, \varepsilon) = y^{(0)}(x, 0) + \varepsilon y^{(1)}(x, 0) + \cdots + \varepsilon^n y^{(n)}(x, 0) + \cdots, \tag{3}$$

$$y^{(n)}(x, 0) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n y}{\partial \varepsilon^n}\right)_{\varepsilon=0}. \tag{4}$$

1) 作如下的想像虽则不是必要,但是很有教益. 这就是当 λ 连续地由 0 变到 1 时,太阳系从只有一个单个行星的体系，经过具有其他小质量的行星的中间体系，一直过渡到我们生活着的真实体系.

2) 这样做并未丧失普遍性,如果知道了 $\varepsilon = \varepsilon_0$ 时的解,那么可以定义一个新参量 $\varepsilon' = \varepsilon - \varepsilon_0$.

现在如果我们把(3)式代入(1)式，且把方程视作为 ε 的一个恒等式. 我们将发现我们能够得到一个关于 $y^{(n)}$ 的线性微分方程的序列. 例如，若把 ε^2 或更高阶的所有项略而不计后，我们就有

$$\frac{dy^{(0)}}{dx}+\varepsilon\frac{dy^{(1)}}{dx}+\cdots=f(x,\ y^{(0)}+\varepsilon y^{(1)}+\cdots,\ \varepsilon)$$
$$=f(x,\ y^{(0)},\ 0)+\varepsilon f_y(x,\ y^{(0)},\ 0)y^{(1)}$$
$$+\varepsilon f_\varepsilon(x,\ y^{(0)},\ 0)+\cdots,$$

其中我们已用泰勒定理把 f 作了展开. 令 ε 的等次幂相等后，我们得到

$$\frac{dy^{(0)}}{dx}=f(x,\ y^{(0)},\ 0), \tag{5a}$$

$$\frac{dy^{(1)}}{dx}=f_y(x,\ y^{(0)},\ 0)y^{(1)}+f_\varepsilon(x,\ y^{(0)},\ 0),\ \text{等等}. \tag{5b}$$

(5a) 的解已经假定知道了. 把这一解代入到 (5b) 中后，便得到了关于修正项 $y^{(1)}$ 的一个确定的方程.

既然原来的条件(2)并不依赖于 ε，因而对于随后的修正项所加的初始条件为

$$y^{(1)}(x_0,\ 0)=0,\ y^{(2)}(x_0,\ 0)=0,\ \cdots,\ y^{(n)}(x_0,\ 0)=0. \tag{6}$$

注意：在 (6) 式的合适的初始条件下，采用积分法能把 (5b) 明显地解出. 事实上，计算表明，所有项 $y^{(n)}(x,\ 0)$ 满足下列形式的方程：

$$\frac{dy^{(n)}}{dx}=Ay^{(n)}+B^{(n)},\ n=1,\ 2,\ \cdots, \tag{7}$$

此处，A 对于所有 n 而言都是 $f_y(x,\ y^{(0)},\ 0)$，而 $B^{(n)}$ 依赖于 x 以及 $y^{(n)}$ 以前的所有 $y^{(k)}$. 因而，一旦找到了 $y^{(0)}$，在原则上求得更高级近似的问题是比较简单的，因为借助于积分法就可以得到(7)式的明显解.

在扰动法的其他情形下，包括涉及偏微分方程的情形，都可找到此类简化特性.

例 1 微分方程

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2 \tag{8}$$

在初始条件

$$y(0) = 0 \tag{9}$$

下的解为

$$y = y^{(0)} = \tan x, \tag{10}$$

当 $|\varepsilon| \ll 1$ 时,在同样的初始条件下,试求

$$\frac{dy}{dx} = 1 + (1+\varepsilon)y^2 \tag{11}$$

的一级近似的解,并把它与准确解作一比较.

求解概要 扰动问题的准确解为

$$y(x, \varepsilon) = (1+\varepsilon)^{-1/2}\tan[(1+\varepsilon)^{1/2}x].$$

把这一解对于 ε 的幂次作泰勒级数展开后给出

$$y(x, \varepsilon) = \tan x + \varepsilon\left(\frac{1}{2}x\sec^2 x - \frac{1}{2}\tan x\right) + \cdots.$$

让我们暂且忘掉准确解,并假定

$$y(x, \varepsilon) = y^{(0)}(x) + \varepsilon y^{(1)}(x) + \cdots.$$

代入(11)式后,我们得到

$$\frac{dy^{(0)}}{dx} + \varepsilon\frac{dy^{(1)}}{dx} + \cdots = 1 + (1+\varepsilon)[(y^{(0)})^2 + 2\varepsilon y^{(0)}y^{(1)} + \cdots],$$

故有

$$\frac{dy^{(1)}}{dx} = (y^{(0)})^2 + 2y^{(0)}y^{(1)}.$$

[情况常常像这儿那样,通过直接代入要比代入如像(5b)那样的普遍公式更加易于得到所希望的扰动方程.] 把 $y^{(1)}$ 的微分方程重新整理成标准形式,并且利用 $y^{(0)}(x) = \tan x$ 的事实,我们得到,

$$\frac{dy^{(1)}}{dx} - 2y^{(1)}\tan x = \tan^2 x. \tag{12}$$

这一方程有下列积分因子

$$\exp(-2\int \tan dx) = \cos^2 x,$$

事实上，可把(12)式写作

$$\frac{d}{dx}[y^{(1)}\cos^2 x] = \cos^2 x \tan^2 x \equiv \sin^2 x.$$

现在，易于看出 $y^{(1)}$ 的解就是上面所给出的.

读者应把上列计算的细节补上(作为练习 2). 我们希望已经给出了怎样去完成直捷了当的扰动计算的一个完整观念. 不过，详细的"训练"和进一步的讨论将在第七章中给出.

单摆

理论工作者常会发现，考虑一种能够具体形象地把我们所要研究的特性展示出来的装置，这是很有用的. 弹簧-质点-阻尼系统即是这种装置之一. 正如大多数读者将会知道的那样，在最简单的情况下，这一体系遵循一组具有常系数的二阶常微分方程；因而这就为那种到处出现的方程的性质提供了一个具体的示例. 在这儿我们将要考虑这种理想化的装置的另一例子，即单摆. 这一例子在本书中还要多次讲到. 在这儿考虑单摆，是想以此作为一个示例，(i) 说明这样一个事实，即当我们去表述简化了的物理模型时，往往意含着用到了扰动理论；(ii) 说明小扰动的大积累效应以及由庞加莱发明的描述这一效应的方法. 像 (ii) 那样的效应以及同样的计算方法(但是形式上欠明显)是同行星轨道有关的.

初等物理教科书中所进行的标准讨论是，当振幅小时，把单摆问题归结为简谐运动问题，而我们模糊地感到如若需要就可改进这种近似. 在标准讨论中，把单摆作为一个理想物体去处理；根据定义，这是由固定长度为 L 的、刚性的、笔直的、无重量的一根杆以及一端具有一个质量为 m 的质点所构成的. 这根杆在悬点上绕着一根水平轴自由地旋转.

上面的楷体字表示在描述模型时所作的理想化. 要想估计由于这种理想化所带来的误差是很困难的(例如，如若杆稍有弹性的话，它就能产生扭曲振动、纵向振动和弯曲振动.)不过，我们将考虑一种更便于分析的近似. 把时刻 t 时杆的倾角表示为 $\theta(t)$. 若

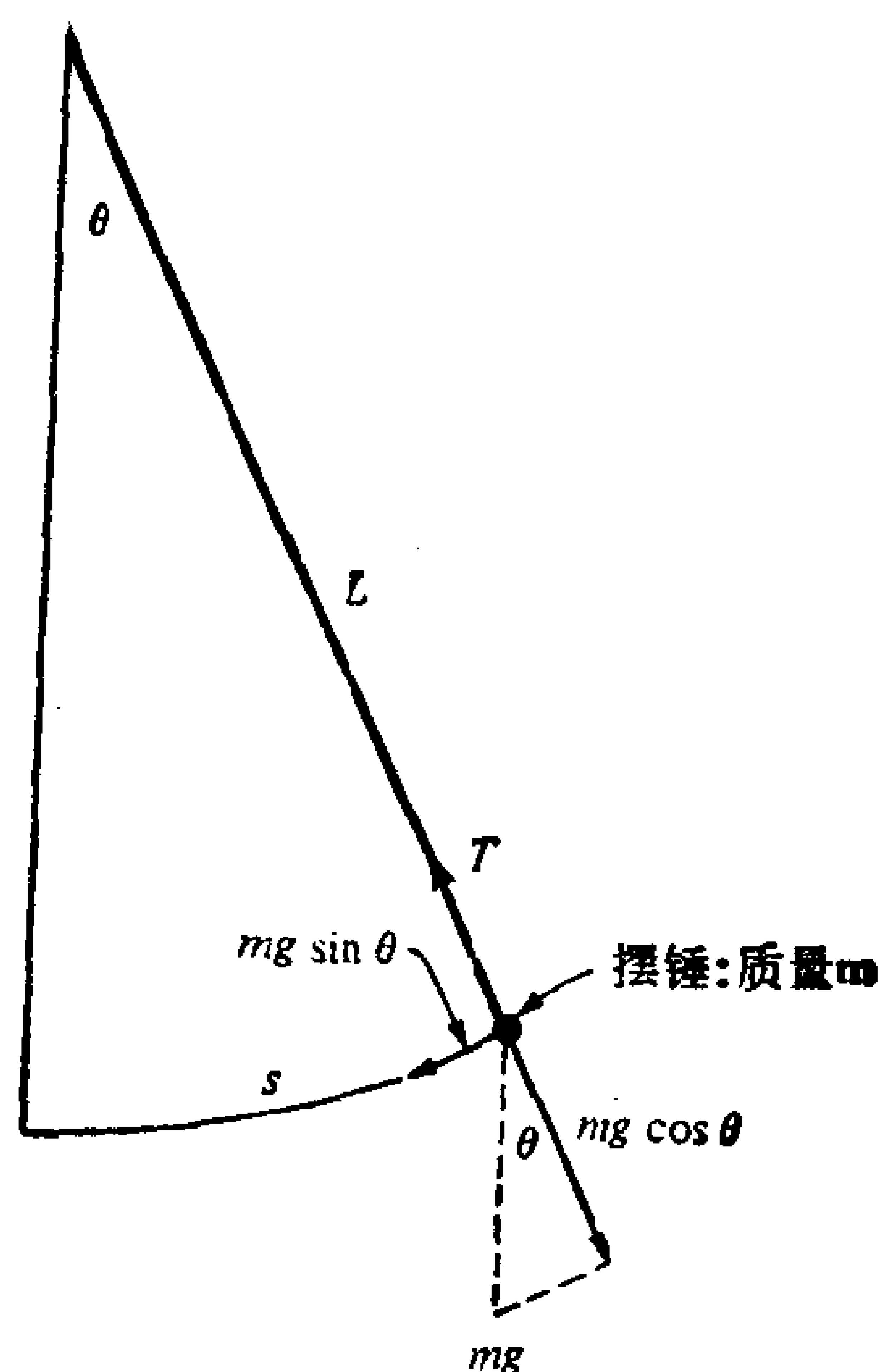


图 2.1　作用在质量为m的单摆上的力,由黑箭头表示．其大小已标出．弦上的张力T等于 $mg\cos\theta$．大小为 $mg\sin\theta$ 的未被抵销的切向力引起了摆锤的加速度．

令 $s(t)$ 表示摆锤沿着逆时针方向摆离垂直点的距离,则有 $\theta L=s$。令 $m(d^2s/dt^2)$ 等于作用力沿着摆锤路径的切向分量,我们便得到下列运动方程

$$mL\ddot{\theta}=-mg\sin\theta, \tag{13}$$

此处 g 是重力加速度．沿着弦方向的张力并不进入方程，这是因为它作用于与摆锤路径正交的方向上．(参看图 2.1)

还能把运动方程写成下列稍有不同的形式:

$$\boxed{\ddot{\theta}+\omega_0^2\sin\theta=0 \text{ 对于 } t>0, \text{ 此处 } \omega_0=\sqrt{\frac{g}{L}}.} \tag{14}$$

为了得到一个确定解,我们可以加上下列初始条件

$$\boxed{\theta=a, \ \dot{\theta}=\Omega, \text{ 当 } t=t_0 \text{ 时},} \tag{15}$$

方程(4)与(15)便是我们所要讨论的数学问题的表述。

通常在处理这一问题时,引入近似 $\sin\theta \approx \theta$. 那么(14)式成为

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0, \tag{16}$$

其解[使之满足条件(15)]由下式给出

$$\theta_0 = a\cos\omega_0 t + \frac{\Omega}{\omega_0}\sin\omega_0 t, \tag{17}$$

由此可以得到一个明显的结论,不管初始条件如何,摆作周期运动,其周期为

$$p_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\left(\frac{L}{g}\right)^{1/2}. \tag{18}$$

然而,如果我们要想去追踪质点经过了许多周期的运动的话,这一近似解并不恰当了;因为由(18)式给出的周期并不是精确的. 按照"精确的"方程(14),运动的确是周期性的,但是正确的周期是

$$P = P_0 \cdot \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}(1 - k^2\sin^2\phi)^{-1/2}d\phi, \tag{19}$$

此处 $k^2 = \sin^2(\theta_{m/2})$ 而 θ_m 是振荡的振幅[亦即 $|\theta(t)|$ 的极大值]:

$$\theta_m \equiv \max|\theta(t)|. \tag{20}$$

在每一次摆动中,根据近似解将会错估了两次极大振幅之间的时间,即产生了一个增量 $P - P_0$.[在振幅为 $\theta_m = 10° = \pi/18$ 弧度的情况下,周期误差约有 2%(见练习 4).]因而只有在经过若干周期 N 后,$N(P - P_0)$ 比之 P 很小的情况下,可望近似方程(16)的解才与(14)式的解近似地相同.

为了改进近似,我们可以把(14)式写成下列形式

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = \omega_0^2(\theta - \sin\theta), \tag{21}$$

并且利用(17)式的一级近似 θ_0, 取 $\theta - \sin\theta \approx \theta_0 - \sin\theta_0$, 从而得到(21)式右边的合理的准确值. 这样做的合理性可以通过下列论证知道,(21)式右边,即,

$$\omega_0^2(\theta - \sin\theta) = \omega_0^2\left(\theta - \theta + \frac{\theta^3}{3!} - \frac{\theta^5}{5!} + \cdots\right)$$
$$= \omega_0^2 \frac{\theta^3}{3!} - \cdots, \qquad (22)$$

是 θ^3 的数量级，而左边是 θ 的数量级．因而要想得到一个原始近似 $\theta_0(t)$ 时，可以统统不管较小的右边值．若把 $\theta = \theta_0$ 代入右边，等等，就会得到更好一点的近似．这样对于首次要想得到的改进了的近似 $\theta_1(t)$，可望满足

$$\ddot{\theta}_1 + \omega_0^2\theta_1 = \omega_0^2(\theta_0 - \sin\theta_0);\ \theta_1(0) = a,\ \dot{\theta}_1(0) = \Omega. \qquad (23a, b, c)$$

不过，利用粗糙近似 θ_0 要想精确地计算出（23a）的右边值，这就引起了一个难以求解的问题，这是不必要的．我们也许能想到，如果采用(22)式所指出的近似，并不失去准确性，从而我们以下式代替(23)式，

$$\ddot{\theta}_1 + \omega_0^2\theta_1 = \omega_0^2\frac{\theta_0^3}{3!};\ \theta_1(0) = a,\ \dot{\theta}_1(0) = \Omega. \qquad (24)$$

从原则上说来，重复上述过程，就会逐次得到更为精确的近似．正因为如此，这一方法称作**迭代**（iteration，根据拉丁字 iterare 再造的），或**逐次近似**．

在下面要讨论的改进最低级近似 θ_0 的另一种方法中，也会引起问题(24)．因此，我们推迟去考虑(24)式的解．

注意．在第七章中，将对迭代法作出更为透彻的讨论．

应用于单摆问题的扰动级数

在扰动级数方法中，引入一个新变量是方便的，这就是，

$$\Theta(t) = \frac{\theta(t)}{\theta_m}, \qquad (25)$$

此处 θ_m 是（20）式中定义的极大幅．从直观上看，θ_m 似乎给出了角位移的自然的比较标准．新变量 Θ 满足 $|\Theta| \leqslant 1$，并且证明在估计各种项的大小时，它是有用的．在 6.3 节中，将进一步论证关于这类变数改变的合理性．

采用(25)式,原始方程(21)变为

$$\ddot{\Theta}+\omega_0^2\Theta=\omega_0^2(\Theta-\theta_m^{-1}\sin\theta_m\Theta)=\omega_0^2\theta_m^2\frac{\Theta^3}{6}+\cdots. \tag{26}$$

我们应注意,既然 $|\Theta|\leqslant 1$, (26) 式右边具有 θ_m^2 的数量级[1),我们已假定这一量值与 1 相比非常小.

为简单起见,让我们考虑这样的情形,亦即把单摆从静止状态放开的情形. 从物理上看,显然有 $\theta_m=a$, 因而我们所要考虑的问题变为

$$\ddot{\Theta}+\omega_0^2\Theta=\omega_0^2(\Theta-a^{-1}\sin a\Theta)$$

$$=\omega_0^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(a^2)^n\frac{\Theta^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{27a}$$

$$\Theta(0)=1,\ \dot{\Theta}(0)=0. \tag{27b, c}$$

为了找出(27)式的一个解,我们写出

$$\Theta=\Theta(t,\ a)=\Theta^{(0)}(t)+a\Theta^{(1)}(t)+a^2\Theta^{(2)}(t)+\cdots \tag{28}$$

同时根据我们早先讨论过的扰动理论的精神,把(28)式代入(27a)中,得到一个无穷的方程序列. 各级近似的初始条件为

$$\Theta^{(0)}(0)=1,\ \dot{\Theta}^{(0)}(0)=0; \tag{29a}$$

$$\Theta^{(n)}(0)=0,\ \dot{\Theta}^{(n)}(0)=0,\ 对于\ n\geqslant 1. \tag{29b}$$

在这一公式中,已经明显地表示出了方程的解是依赖于振幅 a 的. 请注意,如果忽略了振幅的所有更高次幂,我们便得到通常的简谐振动.

为了保证我们的方法取得成功, 我们或许希望去弄明白级数(28)是收敛的. 但是,结果表明这是一个不正确的前提条件,因为这既非必要亦非充分. 即便这一级数发散, 仍然可以用作一个渐近级数(参第三章). 另一方面, 收敛性也不能确保其可用性. 也许为了得到合理的精确性,要把过多的项取和才行.

事实上,可以证明倘若 a 充分小的话[2), 在任一有限区间 $0\leqslant$

---

1) 粗略地说,"具有数量级" 的意思是"大约一样大小", 不过给出在这一意义上的"数量级"的精确含义是有用的,参阅附录 3.1.

2) 这一点可以从(27a)式的右边对于**复变量** a 的**解析**依赖关系中加以考虑. 这一普遍理论已超出现有讨论的范围了. 可以参看 Coddington and Levinson(1955).

$t \leqslant T$ 中级数(28)一般是收敛的，然而，这不能保证这一解可以用许多周期中. 看出这一点的一种方法是直接计算[1]，结果表明

$$\Theta^{(0)}(t) = \cos\omega_0 t, \quad \Theta^{(1)}(t) \equiv 0 \tag{30}$$

因而 $\Theta^{(2)}$ 满足

$$\ddot{\Theta}_2 + \omega_0^2\Theta_2 = \frac{\omega_0^2}{6}\cos^3\omega_0 t. \tag{31}$$

利用一个三角恒等式，我们可以把(31)式改写为

$$\ddot{\Theta}_2 + \omega_0^2\Theta_2 = \frac{\omega_0^2}{24}(\cos 3\omega_0 t + 3\cos\omega_0 t) \tag{32}$$

这是一个具有常系数的非齐次线性方程. 右边即是需要借助于待定系数法的简单类型. "共振"项 $\cos(\omega_0 t)$ 的存在致使我们在解中要加入一个 t 因子的贡献. 而结果的确表明(32)式以及初始条件(29b) 的解为

$$\Theta^{(2)}(t) = \frac{1}{192}\cos\omega_0 t - \frac{1}{192}\cos 3\omega_0 t + \frac{1}{16}\omega_0 t\sin\omega_0 t. \tag{33}$$

在(33)式中值得注意的是正比于 $\cos 3\omega_0 t$ 的项. 在这一振动中更急剧的"高次谐波"项的出现是一种典型的非线性现象.

不过，与 $t\sin\omega_0 t$ 成正比的项是我们感兴趣的核心. 在对于修正项 $a^2\Theta^{(2)}$ 有贡献的各项中，单就这一项而言，它对于时间的所有值说来并不是一致地小的. 相反，对于长时间 $t \approx \omega_0^{-1}a^{-2}$ 说来，我们必须考虑到一种**久期项**[2]，它远非是一个小的修正，而已经变得像 $\Theta^{(0)}$ 一样大小了. 当发生这种情况时，近似的整个基础就不正确了. 因而，只有在 $\Theta^{(0)}$ 本身成为一种合理近似的时间间隔内，$\Theta^{(2)} + a^2\Theta^{(2)}$ 这一近似才是对 $\Theta^{(0)}$ 的一种改进. (练习 5.) 我们尚未击中问题的要害.

---

1) 有些读者可能从已经给出的单个例子中，完全掌握了直截了当的扰动理论的思路. 他们能够运用此法去尝试证明(30)、(31)以及 (33) 式. 而另一些读者，不论是在现在或以后，可能宁愿去精读第 7.1 节，在此节中作出了所要的详细计算.

2) 在拉丁文中，"Saeculum"意指"一代"或"年代"；因而把 "Secular(久期)"这一名词应用到缓慢变化的过程上.

庞加莱的扰动理论

在周期运动的所有情形下，运用未加修正的扰动方法都会失败．庞加莱[1]在对行星轨道进行扰动研究时，发展了一种修正的扰动理论，克服了上述困难．这一理论的关键是引入一种参量表示，以识别由（19）式指出的周期改变．这样，就把在计算中可能出现的任何久期项移去了．

解 $\Theta(t, a)$ 的庞加莱表示是

$$\Theta = \Theta^{(0)}(\tau) + a\Theta^{(1)}(\tau) + a^2\Theta^{(2)}(\tau) + \cdots, \qquad (34a)$$

$$t = \tau + at^{(1)}(\tau) + a^2t^{(2)}(\tau) + \cdots, \qquad (34b)$$

其中 τ 是一个参量．这一方法的思想是让解 $\Theta^{(0)}(\tau)$ 取作（34a）那样的作为变量 τ 的简单形式．不过把时间标度作了改变，免除了解中的缺陷．我们希望消去所有久期项，并在很好的近似上得到正确的周期(19)．计算是十分繁复的，不过注意到级数（34）实际上应该是 a^2，就可以简化．结果表明我们可以把所有修正项取作 τ 的一个常数倍数．这样

$$t = \tau(1 + a^2h_2 + \cdots), \quad h_2 \text{ 是一常数.} \qquad (35)$$

因而发现 $\Theta^{(2)}$ 的方程为(练习 6)

$$\frac{d^2\Theta^{(2)}}{dt^2} + \omega_0^2\Theta^{(2)} - 2h_2\frac{d^2\Theta^{(0)}}{dt^2} = \frac{\omega_0^2}{24}(\cos 3\omega_0 t + 3\cos\omega_0 t), \qquad (36)$$

或利用(30)式，为

$$\frac{d^2\Theta^{(2)}}{dt^2} + \omega_0^2\Theta^{(2)} = \omega_0^2\left(\frac{1}{8} - 2h_2\right)\cos\omega_0 t + \frac{\omega_0^2}{24}\cos 3\omega_0 t.$$

正如在(33)式中那样，右边的 $\cos\omega_0 t$ 将导致一个不希望出现的久期项，它正比于 $t\sin\omega_0 t$．不过，现在我们若取

1）庞加莱（Poincaré 1854—1912）乃是本世纪交替时期居于世界领先地位的数学家．

$$h_2 = \frac{1}{16}, \tag{37}$$

则可避免这一点．因而在这一近似中，τ 的周期为 $2\pi/\omega_0$．但 t 的周期为 $(2\pi\omega_0)(1+a^2h_2)$．这应当与(19)式相比较．

利用精确积分得到单摆周期后(练习 9)，读者便能更好地领会为什么必须改变时间标度．一个更为有趣的例子是涉及水星轨道近日点的进动的(练习 10)．读者或许会发现在细读过 7.1 节中关于单摆的扰动理论的详细讨论后，去做练习 10 就更加容易了．

庞加莱方法的推广

求解特殊问题仅仅是认识过程的序曲——达到目的的手段．特别是从解决一个特殊问题所得到的教训往往能够通过普遍原理表述出来，并且能够发展成普遍理论，以便加深我们的理解．但是这不是始终能以形式上的方式做到的．庞加莱理论即属这种情况．

由庞加莱引进的参量表示所取得的成功，已经使得它被应用到其他类型的常微分方程，以便消除性质相似的许多困难．从根本上说来，需要在独立变量的定义域中通过映射或畸变去移动解的表面．不过，要想对所有能够用这一方法求解的问题进行分类的尝试，并未取得很多成果．

我们没有讲到严格论证可以使用庞加莱方法的任何定理．事实上，在许多情况下，都可得到这类定理．尽管如此，对于庞加莱方法的价值几乎不容置疑的许多情况，仍然没有包括在现在的严格处理中．把有价值的思想最终表述为定理的形式往往是不现实的，其中一个原因是要想去证明所希望的推广了的定理十分困难．其更为微妙的原因乃是，把确定的定理罗列出来似乎了结了论题，而一个应用数学家总是力图通过把已知结果进行适当的修正和推广去开辟新的应用领域．

练　　习

1. 证明(7)式成立．

2. 把求解例 1 的细节补上.

3. 证明(19)式成立. 开始时,以 $\dot{\Theta}$ 乘(14)式.

4. 证明在(20)式下面所讲的关于周期误差的那段话的正确性. 假设 $\Omega=0$。

5. 考虑(33)式中所给出的 $a^2\Theta^{(2)}$ 乃是对于 $\Theta^{(0)}$ 是一个小修正的时间区域. 证明这一区域基本就是在(20)下面所讲到的周期数目 N.

6. 把庞加莱方法一直进行到(36)式的微商.
[这样就立即得到主要结果(37)式.]

7. 证明: 当把庞加莱方法进行到底后,更为普遍的假设(34b)即化为(35).

8. 设计一个有摆的大座钟. 有 5 英尺长并且单摆的端点的最大振幅为 1 / 2 英尺.证明周期 $T=2\pi(L/g)^{1/2}$ 的线性近似不是足够好的 [H. O. Pollack, *Educ. Stud. Math.* 2, 393—404 (1969)]. 为此,导出并利用不等式

$$(\alpha^2-\Theta^2)\alpha^{-1}\sin\alpha \leqslant 2\cos\Theta-2\cos\alpha$$
$$\leqslant(\alpha^2-\Theta^2)\left(1-\frac{1}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right),$$

并把它应用到给出精确周期的积分形式中. 得到

$$\frac{1-\cos\alpha}{12}\leqslant\frac{T-T_0}{T_0}\leqslant\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha}\right)^{1/2}-1,$$

此处 T 是精确周期,而 α 是最大的角位移. 提示: 利用$(\sin x)/x$ 在 $x=0$ 点具有局部极值这一事实,去证明

$$\int_\Theta^\alpha \sin x dx \geqslant \frac{\sin\alpha}{\alpha}\int_\Theta^\alpha x dx,\ |x|\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

还证明

$$1-\cos x\geqslant 2\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

把它从 0 到 x 并且再从 Θ 到 α 进行积分.

9. 证明

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$$

的第一次积分为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \omega_0^2(\cos\theta - \cos a) = 2\omega_0^2\left(\sin^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$

此处 a 是极大振幅. 证明进一步作变换

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{a}{2}\cdot\sin\phi$$

之后,可以把问题的解化为下列形式

$$t = \frac{1}{\omega_0} x \int_0^{\phi} (1 - k^2\sin^2\phi)^{-1/2} d\phi,$$

此处 $k^2 = \sin^2(a/2)$, 从而求得振荡周期作为 k^2 的幂级数.

10. 广义相对论的一个实验验证是水星近日点的进动. 按照这一理论,轨道方程是(1.12)式:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = a(1 + \varepsilon u^2), \quad a \equiv GMh^{-2}.$$

它与经典形式的差别在于 εu^2 这一项. 在牛顿情况下 ($\varepsilon = 0$), 解为

$$u = u_0 + a[1 + e\cos(\phi - \phi_0)],$$

此处 e 是偏心率, 而 ϕ_0 决定了近日点的位置. 证明: 在第一级近似下,两个相继的近日点之间的角度为 $2\pi a^2\varepsilon$. 下面是一种证明方法.

如果相对论方程的解由下列形式给出

$$u = a_0 + a_1\cos\rho\phi + a_2\cos 2\rho\phi + \cdots$$

并且我们假设

$$\rho = 1 + \varepsilon\rho^{(1)} + \varepsilon^2\rho^{(2)} + \cdots,$$

$$a_k = a_k^{(0)} + \varepsilon a_k^{(1)} + \varepsilon^2 a_k^{(2)} + \cdots,$$

则

$$\rho^{(1)} = -a^2.$$

2.3 常微分方程组

本节的目的是要举例说明我们在第一章中列出的关于应用数

学的第四部分：求解科学问题的愿望是如何促进某种数学理论产生的；我们还要说明借助于这种理论去求解科学问题的方法．

在开始讨论时，我们先叙述一下与力学中的初值问题有关的某些定理．随后再给出证明（我们尽可能使这儿给出的证明对于求解过程是确实有用的）．在本节末尾，我们将简短讨论一下这种证明对于应用数学家有何价值这样一个一般问题．

初值问题：定理的陈述

在某些点 $P(t, z_1, z_2, \cdots, z_n)$ 的 $(n+1)$ 维空间中，对于一个给定(初始)点 $P_0(\tau, \zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n)$ 而言，所谓一个常微分方程组

$$\frac{dz_k}{dt} = f_k(t;\ z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n);\ k = 1, 2, \cdots, n \tag{1}$$

的初值问题，即是找出函数

$$z_m = g_m(t),\ m = 1,\ 2, \cdots,\ n. \tag{2}$$

使之满足(1)式，并且

$$\text{在 } t = \tau \text{ 处},\ g_m(t) = \zeta_m,\ m = 1,\ 2,\ \cdots,\ n. \tag{3}$$

现在我们来叙述一下并随后证明一些适用于初值问题的定理．在叙述这些定理以及以后的讨论中，我们常用 z 和 ζ 来表示变量组 $(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ 和 $(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n)$．

定理 1（存在性） 假定函数[1] $f_k(t, z)$ 在下面定义的一个矩形区域中连续

$$R:\ |t-\tau| \leqslant a, |z_k - \zeta_k| \leqslant b; k = 1, 2, \cdots,\ n. \tag{4}$$

这意味着对于 R 中的 $P(t,\ z_1,\ z_2, \cdots, z_n)$ 说来，存在一个上界 M，使得

$$|f_k| \leqslant M,\ k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n. \tag{5}$$

进而假定每一个 f_k 在 R 中满足下列 **Lipschitz 条件**：

$$\begin{aligned} &|f(t;\ \bar{z}_1,\ \bar{z}_2,\ \cdots,\ \bar{z}_n) - f(t;\ z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n)| \\ &\leqslant K[|\bar{z}_1 - z_1| + |\bar{z}_2 - z_2| + \cdots + |\bar{z}_n - z_n|]. \end{aligned} \tag{6}$$

1) 某些数学家总是把函数 f 跟函数在 x 的数值区分开来，我们并不觉得强调这一区别有什么好处．

(如果每一个函数 f_k 都具有连续的偏微商，那么就意味着存在 Lipschitz 条件.）那么在区间 $|t-\tau|\leqslant\alpha$ 中,就有初值问题的一个解,此处

$$\alpha=\min\left(a,\ \frac{b}{M}\right). \tag{7}$$

解函数[(2)式的函数 g_m] 具有连续的一阶微商.

定理 2（唯一性） 初值问题的解是唯一的.

只有当我们造出这样的一个示例之后，才能领会定理 2 的重要性. 这一示例就是当(当然是这样)定理 1 中的条件并不全部满足时，就有不止一组函数满足同一方程和初始条件. 下面我们会给出这种例子的.

接下去,我们把初值问题推广为

$$\frac{dz_k}{dt}=f_k(t,\ z,\ \lambda),\ 在\ t=\tau\ 处\ z_k=\zeta_k, \tag{8}$$

这里方程的右边依赖于参量 λ.

定理 3（对于参量的连续依赖） 令函数 $f_k(t,\ z,\lambda)$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 满足定理 1 中所述的要求. 而且让这些函数在某一邻域 $|\lambda-\lambda_0|<c$ 中连续地依赖于参量 λ，此处 λ_0 和 c 都是常数. 那么,解函数也是 λ_0 的某一邻域中的连续函数.

定理 3 可以用来证明解是初值 $(\tau,\ \zeta)$ 的连续函数. 可以把这一连续依赖性视作是解对于初值改变的**稳定性**，这是就下列定理的意义上说的.

定理 3′（稳定性） 令 $z_m=g_m(t;\ \zeta_m)$ 表示第 m 个解函数，正如标明的那样依赖于初始条件. 那么对于给定的任何 $\varepsilon>0$ 和固定的时间 $T(T\geqslant\tau)$，存在一个 $\delta=\delta(\varepsilon,\ T)$，使得每当 $|\zeta_m'-\zeta_m|\leqslant\delta$，在 $\tau\leqslant t\leqslant T$ 中有 $|g_m(t;\ \zeta_m)-g_m(t;\ \zeta_m')|<\varepsilon$.

定理 3′表示了我们的下列直觉：当函数 $f_k(t,\ z,\ \lambda)$ 稍有改变(由于参量 λ) 时,解也应改变得很小. 我们对于初始条件的相应希望也由定理 3′ 表达了出来. 现在让我们更加小心地看一下

对于一个参量的依赖特性.

我们把初始条件当作固定的，从而来考虑解 $z_m=g_m(t, \lambda)$ 对于 λ 的依赖. 可以预期,这一依赖特性与(8)式中函数 $f_k(t, z, \lambda)$的特性是相同的. 这样,如果 f_k 在 $\lambda=\lambda_0$ 的邻近对 λ 解析(即:如果对于某一 r, 当$0 \leqslant |\lambda-\lambda_0|<r$ 时，它们有收敛的泰勒级数),那么解函数 g_m 应该具有同样的特性. 对于线性微分方程,这一点一般是正确的. 也就是说,方程[1]

$$\frac{dz}{dt}=A(t, \lambda)z+b(t, \lambda) \tag{9}$$

的解对于 λ 是解析的,只要 $A(t, \lambda)$ 和 $b(t, \lambda)$ 对于 λ 是解析的就行,哪怕它们只是对于 t 连续. (注意:当线性方程的系数连续时，Lipschitz 条件自动满足.)非线性情形要略微复杂一些. 根据对于 (2.1) 式扰动解的求解经验,我们可以知道

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y, \varepsilon).$$

用现今的术语来说,这里的形式运算[2]与函数 $f_k(t, z, \lambda)$ 对于 z 以及 λ 解析这一事实有关. 为了使讨论简单些，我们只把注意力局限在对 λ 的一阶微商.

如果形式微分是对的,我们就可期望函数

$$u_m(t, \lambda)\equiv\frac{\partial}{\partial\lambda} z_m(t, \lambda) \tag{10}$$

满足这样的微分方程,它可以从原始方程(8)通过对 λ 微分而形式地求得的,这时要记住 f_k 和 z_m 都依赖于 λ[3]. 进行微分后得到

$$\frac{du_k}{dt}=\sum_m \frac{\partial f_k}{\partial z_m} u_m+\frac{\partial f_k}{\partial\lambda}. \tag{11}$$

注意,(11)式是关于 $\{u_k\}$ 的一个线性系统,它们的系数函数是 t

---

1) 这可以看作一个单一方程或一个线性方程组. 在后一情况下，A是矩阵，z 和 b 是向量.

2) 所谓**形式运算**是这样一种运算，它在适当的但尚未指定的条件下假定是正确的.

3) 对一个方程逐次进行参数微分，构成了一种完成扰动运算的出色方法的基础.

的已知函数．这是因为集 $\{z_m(t, \lambda)\}$ 是已知的．如果初始值 ζ_m 与参数 λ 无关，那么关于 $\{u_k\}$ 的初始条件是

$$u_k = 0. \tag{12}$$

根据以上讨论，我们可望有

定理 4 设 $n(n+1)$ 个函数

$$\frac{\partial f_k}{\partial z_m}, \frac{\partial f_k}{\partial \lambda}; \ k, m = 1, 2, \cdots, n$$

是变量 t, $\{z_m\}$ 和参数 λ 的连续函数，则定理 3 中的解函数 $z_m(t, \lambda)$ 对 λ 是可微的，而且偏导数(10)满足微分方程(11)和初始条件(12)．

现在给出上述所有定理在单变量情形的证明，至于多变量情形下的推广，几乎直接可得．

唯一性定理的证明

通常，唯一性定理是最容易证明的．在现在的情形下，我们将发现，证明中所用到的概念对于存在定理的证明也是有用的．

考虑方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{13}$$

并且寻找一个解，使其满足初始条件 $x = x_0$; $y = y_0$ 令 $g(x)$ 为这样的一个解．则

$$g'(x) = f[x, g(x)], \tag{14}$$

从而

$$g(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, g(t)]dt. \tag{15}$$

如果另有一个满足相同初始条件的解 $G(x)$，于是

$$G(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, G(t)]\, dt\,. \tag{16}$$

若从(16)式减去(15)式，则有

$$G(x) - g(x) = \int_{x_0}^{x} [f(t, G) - f(t, g)]dt, \tag{17}$$

可以借助于 Lipschitz 条件来估计右边的积分值：

$$|f(t, G)-f(t, g)| \leqslant K|G(t)-g(t)|. \tag{18}$$

因此

$$|G(x)-g(x)| \leqslant K \int_{x_0}^{x}|G(t)-g(t)| dt. \tag{19}$$

在区间 (x_0, x) 中，$|G(x)-g(x)|$ 有一个最大值，我们记以 $\|G(x)-g(x)\|$. 于是，从(19)式得到

$$|G(x)-g(x)| \leqslant\|G(x)-g(x)\| \cdot K|x-x_0|, \tag{20}$$

故有

$$\|G(x)-g(x)\| \leqslant\|G(x)-g(x)\| \cdot K|x-x_0|, \tag{21}$$

或

$$[1-K(x-x_0)] \cdot\|G(x)-g(x)\| \leqslant 0.$$

假如我们现在把区间 (x, x_0) 取得充分小，比方等于 $(2K)^{-1}$，就能使第一个因子为正的. 因此，(21)式要求

$$\|G(x)-g(x)\|=0,$$

则立即得到了所要求的结果. □

存在性定理的证明

我们已经看到，微分方程 (13) 的初始值问题的解满足积分方程(15). 反之，如果有了积分方程(15)的一个解，那么也就有了微分方程的一个解，它满足所设的初始条件. 这一点可以通过直接运算(练习 1) 来证实. 于是，只要证明积分方程的解的存在定理便足够了.

为了证明 (15) 式有一个解，采用逐次逼近法. 我们从至少满足初始条件的粗糙近似 $y=y_0$ 开始[1]. 然后计算函数序列

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t, y_0) dt,$$

$$y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t, y_1(t)] dt,$$

1) 当然，作此特殊的初始近似并不是必要的. 例如，取(22)式定义的 $y_1(x)$ 为初始近似，显然，可得相同的最终结果。

$$\cdots\cdots \tag{22}$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y_{n-1}(t)]\,dt,$$

$$\cdots\cdots$$

我们将证明，在一个适当地限定的区间 $|x - x_0| \leqslant \alpha$ 内，这个序列一致收敛于一个连续函数. 其中，可以象在定理 1 中所规定的那样，$\alpha = \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$. （这里$M$是(5)式中引入的 $|f|$ 的上界.）之所以要限制在区域 b/M 内，仅仅是因为我们希望逐次逼近式(22)不超出 $|y - y_0| < b$ 的界限. 在此界限内，可确保 f 的连续性. 此外，对 x 的范围没有进一步的限制.

为了证明由 (22) 式所定义的函数序列在区间 $|x - x_0| \leqslant \alpha$ 内一致逼近于一个极限，我们来考虑相继两个函数之差. 对于 $y_1(x) - y_0$，有

$$|y_1(x) - y_0| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f(t, y_0)|\,dt \leqslant M\,|x - x_0|, \tag{23}$$

式中 M 是(5)式中首次提及的函数 f 的上界.

一般地，有

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f[t, y_{n-1}(t)] - f[t, y_{n-2}(t)]|\,dt. \tag{24}$$

我们要把上式右方的差与差 $y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)$ 联系起来. 这个关系式是由 Lipschitz 条件提供的:

$$|f[t, y_{n-1}(t)] - f[t, y_{n-2}(t)]| \leqslant K|y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| \tag{25}$$

这样，就能建立起递推关系

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant K\int_{x_0}^{x} |y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)|\,dt \tag{26}$$

合用(23)式和(26)式，便有[练习 3(c)].

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant \frac{MK^{n-1}|x - x_0|^n}{n!}. \tag{27}$$

但是，(27)式的右方是 M/K 乘以 $e^{K|x-x_0|}$ 的级数展开式的第 n

项. 因此,对于 $n\to\infty$ 时 $y_n(x)$ 的极限,采用引进一个级数表示式的方法,即引进

$$y_0+\sum_{r=1}^{\infty}[y_r(x)-y_{r-1}(x)]. \tag{28}$$

这个级数绝对一致收敛，因为它的各项以另一具有相同性质的级数的相应项为上界. 于是,对于某个函数 y, 我们有 $\lim_{n\to\infty}y_n(x)=y(x)$. 进而,通过检验方程序列(22)的极限形式可以证明，$y(x)$ 满足积分方程(15). 现在,剩下来只要证明积分过程的反演以及取极限都是正确可行的. 但是既然积分是在有限范围内进行的,这一点就可从人所周知的一些定理直接得到. □

证明的关键过程是把微分方程转化为一个积分方程，然后应用逐次逼近法. 积分表述有两个优点: (I) 初始值是自动地被结合进去的; (II) 积分过程使函数更为光滑，并且避免了关于导数是否存在的问题.

证明过程需要很多技巧. 由于在其它问题中，也常常会碰到类似的步骤,因此,以某种形式将这些步骤加以总结. 这样做有其方便之处,否则老是要重复. 这是需要发展**函数空间**理论的理由之一.在这种空间中,有一个重要概念——**模**. 定义(以各种方法)这一概念是用来代替寻常 Euclide 空间中的**距离**概念的. 另一理由是可以用寻常的几何观念来得到抽象距离的性质的直观认识.

在我们讨论的情况下,一个可能的模是首次在(20)式中用到的量 $\|g(x)-G(x)\|$."距离"的另一可能度量是由下式定义的量 D

$$D^2=\frac{1}{b-a}\int_a^b[G(x)-g(x)]^2\,dx \tag{29}$$

也就是说,D 是 G 和 g 之差的均方根. 这里，这个模并非自然出现,但是在第 4、5 二章内将要用到它.

第 II 部分的附录 12.1 给出了关于函数空间以及有关概念的一些细节.(特别是附录中的方程(59)给出了距离的抽象特性,它

已由刚才所定义的两个模举例说明过了.)在第II部分第十二章中关于变分法的那部分材料提供了例子来说明运用此种概念所获得的统一性和明晰性.

对于一个参数或初始条件的连续依赖关系

在我们着手证明定理 3 和定理 3′之前，首先让我们注意到：如果微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y,\ \lambda), \tag{30}$$

在初始条件 $y=y_0$（当 $x=x_0$ 时）下的解连续地依赖于 λ，则它连续地依赖于（x_0，y_0）. 我们能够引入新变量（ξ，η）=（$x-x_0$，$y-y_0$），并且在初始条件 $\eta=0$（当 $\xi=0$ 时）之下求解方程

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f(\xi+x_0,\ \eta+y_0,\ \lambda) \tag{31}$$

(31)式右端的函数对于（x_0，y_0）连续.

现在回到(30)式. 让我们用下列积分表达式来处理它:

$$y(x,\ \lambda)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[x,\ y(x,\ \lambda),\ \lambda]\, dx\,. \tag{32}$$

考虑两个解 $y(x,\ \lambda)$ 和 $y(x,\ \lambda_0)$ 以及它们的差. 我们有

$$\begin{aligned} y(x,\ \lambda)-y(x,\ \lambda_0)=&\int_{x_0}^{x}\{f[x,\ y(x,\ \lambda),\ \lambda]\\ &-f[x,\ y(x,\ \lambda_0),\ \lambda]\}\,dx+\int_{x_0}^{x}\{f[x,\ y(x,\ \lambda_0),\ \lambda]\\ &-f[x,\ y(x,\ \lambda_0),\ \lambda_0]\}\,dx\,. \end{aligned} \tag{33}$$

可以借助于 Lipschitz 条件来估计上式右边第一个积分值，用 λ 的简单连续性来估计第二个积分值. 这样，采用与证明唯一性定理时用过的类似论证，有[练习 3(a)]

$$\begin{aligned} \|y(x,\ \lambda)-y(x,\ \lambda_0)\|\leqslant K|x-x_0|\cdot\|y(x,\ \lambda)\\ -y(x,\ \lambda_0)\|+\delta|x-x_0|, \end{aligned} \tag{34}$$

式中

$$|f(x, y(x, \lambda_0), \lambda) - f(x, y(x, \lambda_0), \lambda_0)| < \delta. \quad (35)$$

对于 $|x - x_0| \leqslant (2K)^{-1}$,可以证明[练习 3(b)]:(34)式意味着

$$|y(x, \lambda) - y(x, \lambda_0)| \leqslant 2\delta|x - x_0|. \quad (36)$$

量 δ 可以任意小,只要 $|\lambda - \lambda_0|$ 充分小.

对 $|x - x_0|$ 的限制并非决定性的,因为我们可以用有限多个上述类型的区间,来覆盖任何有限区间 $|x - x_0| < \alpha$. 从一个区间到另一个区间,我们或许不得不容许初始条件存在着差别,但是这个差值具有 δ 的数量级. 由于只有有限多个这样的区间,因此积累起来的差值还是 δ 的数量级,并且不影响我们的讨论.

可微性

我们考虑这样一对微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda) \quad (37)$$

和

$$\frac{du}{dx} = f_y(x, y, \lambda)u + f_\lambda(x, y, \lambda), \quad (38)$$

式中 $f(x, y, \lambda)$, $f_y(x, y, \lambda)$ 和 $f_\lambda(x, y, \lambda)$ 都是连续函数.注意,(38)式是通过对(37)式进行形式微分,并将 $\partial y/\partial\lambda$ 记为 u 以后得到的.

考虑(37)式的一个解 $y(x, \lambda)$. 对于 $y = y(x, \lambda)$, 我们还考虑满足初始条件 $u(x_0, \lambda) = 0$ 的(38)式的一个解. 方程中出现的那些函数的连续性保证了这些解的存在[1]. 我们要证明

$$u(x, \lambda) = \frac{\partial y(x, \lambda)}{\partial\lambda}. \quad (39)$$

证明的困难部分在于确定偏导数 $\partial y/\partial\lambda$ 的存在性. 我们将通过直接计算当 $\Delta\lambda \to 0$ 时 $\Delta y/\Delta\lambda$ 的极限值来完成这一证明.

---

1) 对于(38)式,由于其右边关于独立变量 u 是线性的, 所以 Lipschitz 条件是满足的.

令

$$\Delta y = y(x, \lambda) - y(x, \lambda_0), \ \Delta f = f[x, y(x, \lambda_0), \lambda] - f[x, y(x, \lambda_0), \lambda_0].$$

从(33)式得

$$\frac{\Delta y}{\Delta \lambda} = \int_{x_0}^{x} f_y(x, \bar{y}, \lambda)\frac{\Delta y}{\Delta \lambda}\,dx + \int_{x_0}^{x}\frac{\Delta f}{\Delta \lambda}\,dx, \tag{40}$$

式中，$\bar{y}$ 为介于 $y(x, \lambda_0)$ 和 $y(x, \lambda)$ 之间的一个中间值. 我们已经用过了偏导数 $f_y(x, y, \lambda)$ 的连续性，因而也能用平均值定理. 且还有

$$u(x, \lambda_0) = \int_{x_0}^{x} f_y[x, y(x, \lambda_0), \lambda_0]u(x, \lambda_0)\,dx + \int_{x_0}^{x} f_\lambda[x, y(x, \lambda_0), \lambda_0]\,dx. \tag{41}$$

结合(40)式和(41)式，就得到差值

$$w \equiv u(x, \lambda_0) - \frac{y(x, \lambda) - y(x, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \tag{42}$$

的积分方程

$$w = \int_{x_0}^{x} f_y(x, \bar{y}, \lambda)w\,dx + D, \tag{43}$$

其中

$$D = \int_{x_0}^{x}[f_y(x, y, \lambda) - f_y(x, \bar{y}, \lambda)]u\,dx + \int_{x_0}^{x}\left[f_y(x, y(\lambda, \lambda_0), \lambda_0) - \frac{\Delta f}{\Delta \lambda}\right]dx.$$

由于函数 f_y 和 f_λ 的连续性，我们可以让 $\Delta\lambda$ 充分小而使得量 D 任意小. 既然 $|f_y(x, \bar{y}, \lambda)|$ 以 K 为上界，则由(43)式能够证明

$$\lim_{\Delta\lambda \to 0} w = 0, \tag{44}$$

其推理与前述的相同. 读者应该能够完成这一证明(练习 4).

非唯一性的例子

当看到了一些不满足 Lipschitz 条件，从而不存在唯一性的例

子以后,人们便会对 Lipschitz 条件下的唯一性定理的用途有进一步的了解. 考虑微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y), \tag{45}$$

其中

$$f(x, y)=\frac{4x^3y}{x^4+y^2} \text{ 当 } (x, y)\neq(0, 0), \tag{46a}$$

$$f(0, 0)=0. \tag{46b}$$

容易证明, $f(x, y)$ 在 $(x, y)=(0, 0)$ 处连续但不满足 Lipschitz 条件. 对于所有有限的实数值 c

$$y=c^2-\sqrt{x^4+c^4} \tag{47}$$

是方程(45)的解. 于是存在着无穷多个满足初始条件 $(x, y)=(0, 0)$ 的解. 所有积分曲线在原点的斜率为零.

既然(45)式并未给出积分曲线在 $(x, y)=(0, 0)$ 处曲率的唯一值,根据这一启发性的观点,使我们容易理解唯一性的不存在. 的确, 解曲线的曲率在该点是没有定义的. 这是因为解曲线的斜率的导数是由 $(x, y)\to(0, 0)$ 时下式的极限给出的:

$$\frac{\frac{dy}{dx}(x, y)-\frac{dy}{dx}(0, 0)}{x-0}=\frac{f(x, y)}{x}=\frac{4x^2y}{x^4+y^2}.$$

对这种情形, 我们用下面就要讲到的有限差分法仍然可以证明存在性定理. 因为唯一性不存在, 所以对于每一个解必须事先指定(明显地或隐含地) d^2y/dx^2 的初始值.

有限差分法

有限差分法是从数值积分的观点对微分方程进行求解的一种自然方法. 它同时给出了计算解, 尤其是借助于现代计算机计算的一种实用方法, 给出了证明存在性定理的一个途径. 为了对这个方法有所了解,我们再次从积分表述开始.

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f[\xi, y(\xi)]d\xi, \tag{48}$$

把区间 (x_0, x) 分成 n 个长度为 h 的子区间，而把上式写作

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[\xi, y(\xi)]d\xi + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x} f[\xi, y(\xi)]d\xi. \tag{49}$$

这仍然是精确的. 但现在就来近似地计算 (49) 式每一个积分的值，把它们写作

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f[\xi, y(\xi)]d\xi = hf(x_k, y_k), \tag{50}$$

式中的 y_k 是在(49)式中反复使用(50)式的近似式直至点 x_k 处 y 的值；即，我们有

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x_0, y_0)d\xi, \\ y_2 &= y_1 + \int_{x_1}^{x_2} f(x_1, y_1)d\xi, \\ &\cdots\cdots \\ y(x) = y_n &= y_{n-1} + \int_{x_{n-1}}^{x} f(x_{n-1}, y_{n-1})d\xi. \end{aligned} \tag{51}$$

因而，解就是图 2.2 中所示的折线 C_L. 可以把它作为真实积分曲线 C 的一个近似. 由于在每一步近似中，y 都有一个误差. 因此，按

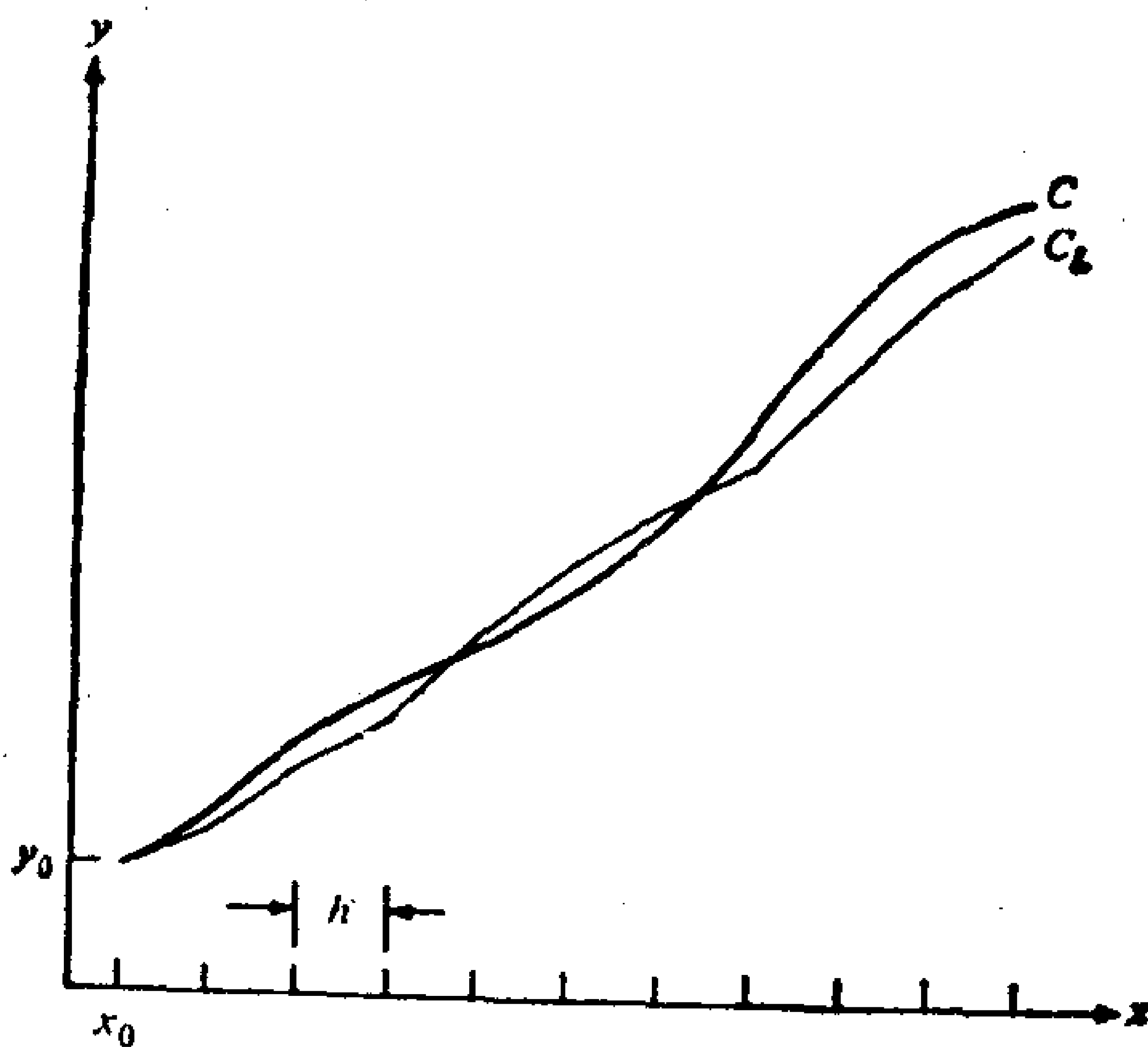


图 2.2 最简单的有限差分法给出了折线 C_L，作为对微分方程真实解 C 的一个近似.

照(51)式的计算过程运算下去，总的积累误差就会使近似曲线 C_L 越来越偏离真正的曲线 C. 初看时，人们可能会认为这是难以容忍的.实际上，由于在每一步中，y 的误差具有 h^2 的数量级[局部公式误差是 $O(h^2)$]，因此，可以证明积累误差具有 h 的数量级 [而积累公式误差是 $O(h)$]. 人们的确可以证明：当 Lipschitz 条件满足时，近似解收敛于唯一的真实解. 甚至当 Lipschitz 条件不满足时，还是总能挑选一个*部分序列*，它收敛于一个解；但是却不能保证有唯一性了.

只要 h 取得充分小，积累公式误差 $O(h)$ 就可以任意小. 但是那样的话，在一个给定的 x 区间内求解将需要大量的运算，而且积累舍入误差将会大到不可接受的地步.为获得较高的精度，在求(49)式中的积分值时，人们可能会采用较高阶的近似. 但是这样一来，对于一个给定的区间，运算将变得更长，从而花更多的时间，而且可能引起更多的舍入误差. 读者可以在关于数值方法的书中找到有关论题的进一步讨论.

关于"纯粹"与"应用"数学之间关系的进一步评论

本章中，我们已经讲到了通常被认为具有"纯粹"性质的数学理论. 在结束本章时，我们对数学的纯粹与应用这两方面之间的相互作用谈一点看法(另参阅第一章).

大多数纯粹数学家从应用数学方面的研究工作中获得裨益，这一点是相当清楚的. 因为应用数学家(以及其他理论科学家)在他们对科学知识的探索中，留下了很多没有解决的数学问题. 例如，一位应用数学家构造了一种形式上的扰动方法，用这种方法解决了一个问题，而且与实验结果非常一致. 而纯粹数学家通常会感到有必要去研究一下保证这些运算正确可行的条件是什么. 为了作出这种判断，可能要求找到把某些普遍定理应用到一种特殊情况下的证据. 或许他们会感到最好将数学中的整整一个部分加以扩大或重新改造. 最近，Laurent Schwarz 把函数概念推广到分布概念，结果使 Dirac 的艺术杰作——δ 函数至少成为合法的

了[1]. 这就是重新改造的一个例子. 当然,纯粹数学家中的大部分人受到内在的目的动机的驱使;但是,忽视来之于有意义问题的这一丰富源泉似乎是不明智的.

纯粹数学家对于一个应用数学家的帮助又是什么呢？毋容置疑地建立了一个理论体系,这当然是对科学的一个贡献. 贡献大小乃是理论中的存疑的递增函数. 事实上,如果疑问重大,那么应用数学家自己就会努力去作出适当的证明以解决矛盾.

从教育的角度来说，将来的应用数学家应该掌握大量的数学理论和证明（尽管要小心，不应过多地强调这一方面). 他必须了解他可能要施行的那些运算究竟在怎样的典型条件下才是正确的. 而且,他还应该具备另外一些数学概念,也许有一天，这些概念便成了他的理论或运算的合适的框架. 例如，有一些应用数学家发现了函数空间概念的统一几何性质（这是近几十年才发展起来的)的用途. 再举一个更经典的例子，Gibbs 现象. 我们可以在实际计算中遇到这个现象. 如果不具备关于点态和一致收敛之间的区别方面的知识，就不懂得这一问题.（参见 4.3 节）我们还可举出另一可能的例子： 借助于已经学过的某种构造性的存在定理，学生才可能初步领会积分方程表述或逐次逼近法在计算上的用途.

我们关于微分方程定理的讨论提供了纯粹数学与应用数学之间关系的例子. 由此得到了一个优美的理论结果，即在合适的条件下，方程的解连续地依赖于参数. 但是这一结论漏了一个非常重要的科学结果,因为它仅仅证明了*在一确定的时间间隔内*,参数的一个充分小的改变引起的改变也是很小的. 它没有触及的问题在于参数给定的小变化的**最终**效应. 这是一个极易被人疏漏的问题,尤其当你刚接受了一个印象深刻的定理之后. Poincaré 开始研

---

1) M. J. Lighthill 的 "*Fourier Analysis and Generalized Functions*" (New York: Cambridge U. P., 1962). 是关于这方面的一本很好的参考书. 该书的题辞便是一个简史："献给 Paul Dirac（他看到了它必定是真实的), *Laurent Schwartz*（他给出了证明）以及 George Temple（他指出了怎样进行简化).

究了长期的以及"最终"的效应． 此后．有更多的问题从形式上和严密性上都得到了解决．但是决不能说问题已经得到了解决．(见 Moser (1973)．)

纯粹数学和应用数学两者间关系的另一例子来自这样一个事实：有关常微分方程组的标准的存在和分析定理仅在充分短的时间间隔内是成立的．但是，如果这些方程描述的是相互作用粒子的轨道，那么这些定理看来似乎应该在任意长的时间间隔内都是成立的．关于这些事实的经典结果的讨论可以参看 E. T. Whittaker 的分析动力学一书的第十六章 (New York: Cambridge U. P., 1927)．

为了取得篇幅上的平衡协调，我们在本章中给出了一些形式证明．但是，这样的证明在许多比较好的书中都能找到．因此，在本书的其余部分中把证明大都略而不述了，以便可以集中讨论探讨得较少的科学与数学之间的相互作用问题，这恰是一个应用数学家的本行所在．

练　　习

1. 试证：(15)式的解满足(13)式和初始条件 $y(x_0)=y_0$．仔细地核对你的所有步骤．

2. 试证：级数(28)的和 $y(x)$ 满足积分方程式(15)．

3. (a) 证明(34)式．

(b) 证明(36)式．

(c) 证明(27)式．

4. 完成(39)式的证明．

5. (a) 证明 (46b) 式下的叙述．

(b) 证明(47)式．

(c) 佯装不知(47)式，看你是否能推得．

第三章　随机过程与偏微分方程

在第二章中，我们考虑了单个粒子的动力学，并且证明了粒子间的相互作用可以用一组常微分方程来模拟．在规定的条件下（通常规定了各个粒子的初始位置和初始速度值），经典数学理论保证了该方程组存在有一个解．若有必要，实际上可以通过数值积分法求得一组足够近似的解．为了保证给定的近似所具有的精度，有必要研究数值分析中所用的算法．此外，数学理论又保证了解存在的唯一性．粒子的过去完全决定了它们的将来，因此我们的模型是*决定性*的．

现在，我们要来研究一些模型的例子．在这些例子中，它们所预言的一个过程的结果不是确定的．对于这种情况，我们称之为*随机过程*；相应的模型则称为*或然型的*．例如，我们将看到，在许多粒子相互作用的情况下，采用某种概率来描写每个粒子的运动，这样一种模型往往是很有用的．

虽然，由于随机过程自身的缘故，我们需对它们稍加考虑，但是我们的基本目标是要探讨同一现象的或然性模型和决定性模型之间的联系．这儿的关键是，在很多情况下，即使一个过程被看成是随机的，我们还是能够用偏微分方程写成一个决定性问题，从而得到有关该过程概率的一个确定的分布函数．一种是关于分布函数的偏微分方程，另一种是描述该现象的决定性特征的方程，这两者是完全一致的．

一个随机过程可以由一个确定的方程来表征，这似乎有点自相矛盾．但是我们根据经验知道，当个别不能预料的事件重复了大量次数以后，通常会形成一种确定的规则性．例如，将一枚"公平的"硬币抛掷一次，我们无法知道是正面向上还是背面向上．但是在抛

掷了许多次以后，我们几乎可以肯定正面向上的比例差不多占1/2.[1]记住这个例子以及其他类似的例子，则对于表征随机过程的概率有一个决定性分布这样一个事实，也许就不会感到那么惊奇了.

适合于采用或然性模型的那种情形，其特征是相当微妙的，不过信息的不完整是典型的. 让我们再来看抛掷硬币的例子. 一旦硬币被抛出，它的运动便是确定的了. 然而，抛掷的过程涉及许多参数，如硬币的初始方向，速度和自旋；硬币在其上反弹的那块面板的性能等等. 通常，我们对这些参数缺乏精确的了解.

这些参数的细微变化能够使硬币的最终状态从正面转向背面，或者从背面变成正面. 上述事例是说明了或然性模型的极为重要的特征. 再举一个在气体动力论中的特别能够反映这一特性的熟悉例子. 在那里，每个分子都被看成是严格遵循力学运动的定律和相互作用定律(例如采用硬球模型). 但是，初始条件的微小变化可能会使多次碰撞后的情况引起巨大变化.

对带有不同初始条件的大量问题的解进行平均，以及最终把单个问题的敏感性加以抹平，这都可看作是用随机过程来对敏感系统进行成功模拟的基础.

在 3.1 节中，我们讲述了一个模型. 在这个模型里，布朗运动被看作是由这样的一群粒子引起的，这些粒子在一条直线上以相等的步长，向左向右几率相等地随机运动着. 我们得到了一个粒子的概率 $w(m,N)$的显式，它表示该粒子总共移动了N步，而其中有m步是向右边运动的概率. 该节末尾讨论了这样一个问题，即从理论上我们怎样能够根据布朗运动的观察事实去决定分子的性质.

3.2 节讨论了渐近逼近这一重要概念. 当N较大时，我们可用某种简化的表示式去逼近 $w(m, N)$，为了了解这种方法的意义，以上概念是必需的. 然而，在 3.2 节中所介绍的方法具有广泛得多的用途.

在3.3 节中，我们引入了关于 $w(m, N)$ 的差分方程，然后通过

---

1) 这一性质的精确叙述属于“大数定律”题下的内容.

一个极限微分方程去近似地表示这个差分方程. 这个方程不是别的,正是通常对多粒子运动作宏观描述时所用的扩散方程. 我们证明,扩散方程的"单位源"或"基本"解提供了一种对 w 的近似,这种近似与前段中提及的近似是相同的. 我们考虑了存在反射或吸收位垒时的随机走动,举此例子来说明微分方程方法的有用性.

3.4 节中进一步探索了概率性与微分方程之间的联系. 例如,在微分方程中使用的映象法是如何用来求解一些概率问题的. 我们证明了在概率讨论中首次遇到的基本解为求解差分方程的广义初值问题提供了钥匙. 在 3.4 节末尾,还讨论了这样的联系,特别是有关 DNA 分子的碰撞、梁的扭曲、一个随机走动着的醉汉有一天会回到出发点的可能性以及在准周期运动中,一群粒子集合的不可逆特征等问题的联系.

3.1 一维随机走动模型;朗之万方程

在布朗运动中,小粒子在液体或气体中无规则地来回运动. 一些尘埃在太阳光束中的舞动,这是或许是这一现象最普通的表现.

比较大的尘埃的移动则是因为组成其周围介质的分子对它的无数次冲击. 在构造有关这种情况的数学模型时,我们无疑要把这些冲击看成是随机地发生的. 没有可能计算各个分子的轨道;如若我们只是想了解一下这个现象的大致轮廓,也就没有兴趣去计算各个分子的轨道.

一维随机走动模型

让我们来试着构造一个与此情形有关的最简单的可能模型. 于是,尽管粒子的运动是三维的,让我们考虑粒子的投影,它沿着一条线随机地移动着. 对于粒子运动的一个合理的理想化便是设想它由一系列具有随机决定的长度和持续时间的步骤组成的. 我们再进一步简化我们的图象,即认为粒子在一段固定的时间间隔 Δt 内走了固定的长度 Δx. 这样,我们就得到了经典的布朗运动的一维模型,一个粒子的运动遵循下列规律:

(i) 在一段确定的固定时间间隔 Δt 内，一个粒子沿 x 轴以某一固定长度 Δx 走了一步.

(ii) 粒子向右还是向左走的可能性是相同的.

我们将要研究这样一个粒子的性质，该粒子按照(i)和(ii)所描述的规则作*无偏*[1]*随机走动*. 为了进行这项工作，我们只需要一些概率论的初步知识，因为其中遇到的一些概率问题属于非常简单的类型. 在所给定的情形下，我们特别注意选出一组可能事件. 这些事件常常被称为"偏选"的. 因为所有事件都被看作是"同样可能的"，挑选出来的那些"偏选"事件概率由下列比式给出:

$$\frac{\text{优先事件数}}{\text{事件总数}}$$

我们希望求得，一个粒子在移动了N步以后，到达离它出发点右边m步的一点处的概率. (出发点左边的点是与一个负整数m相联系着的.)每个可能的N步走动都是机会均等的，在这样的走动中，偏选事件就是在向右m步后恰好到达的事件.

在本节中，我们将导出 $w(m, N)$ 的一个显示公式. 然后我们将引入一个母函数的方法来计算m的平均值和均方根值.

随机走动是个吸引人的概念，特别有趣的是把它看作是描述醉汉摇摇晃晃逛大街的运气，向前跨步或向后跨步的概率是相等的. 正如人们所预料的，随机走动隐藏在一个十分多种多样的情形之中. 再来看一个例子，这是一个赌博游戏，抛掷一个"公正的"硬币，游戏者A给游戏者B一个美元，或者从B中拿到一个美元，这要由硬币是正面还是反面来决定. 如果，在A(输)了一美元时，一个粒子向右(左)移动了一步，那么 $w(m, N)$ 给出了在N次抛掷以后A赢了m美元的概率. 读者将会发现，牢记这个附加例子对于阅读本章将会是大有好处的[2].

研究布朗运动的最重要的物理含意在于这样的运动提供一种

---

1) 除非走动沿着各个方向是机会均等的，否则走动是偏倚的.

2) 至于其他例子和这方面的较好的介绍可以参见 M. Barber 和 B. Ninham 的 *Random and Restricted Walks* (New York: Gordon and Breach, 1970) 一书.

个别分子力的可见的宏观表现.（作为比较通过温度、压力的变化才能观察到分子运动的大块效应.）对这些事实从理论上最直接近似涉及一个带有随机强迫项的微分方程——朗之万方程. 在本节结束处,我们概述一下有关理论的实质.

显解

现在我们来作出 $w(m, N)$ 的明显表达式,它是一个粒子在走了 N 步以后到达位于出发点右边 m 步的一点的概率. 假定粒子一共向右走了 p 步, $p \geqslant 0$, 则向左一共走了 $N-p$ 步. 然后,它应该到达右边 m 步处的一点 $(-N \leqslant m \leqslant N)$, 若

$$m = p-(N-p);\ 即\ p=\frac{1}{2}(N+m). \tag{1}$$

注意 m 是一带有符号的整数,而 p 却是一个非负整数. 同时,当 N 为偶(奇)数时, $m=N-2p$ 也是偶(奇)数. 这样, m 以 2 为步长在 $-N$ 至 N 之间取值. 例如, 总共走了 $N=3$ 步, 位移的可能值便是 $m=-3, -1, 1, 3$.

向右走 p 步,向左走 $N-p$ 步的不同路径数由下式给出

$$\frac{N!}{p!(N-p)!} = C_p^N. \tag{2}$$

请注意, C_p^N 称为二项式系数, 这是由于它在二项式展开式中的作用而命名的:

$$(x+y)^N = \sum_{p=0}^{N} C_p^N\, x^{N-p} y^p. \tag{3}$$

不同的 N 步的路径总数为 2^N. 将其除偏选事件数,我们得到下列结果.

$$w(m, N) = C_p^N/2^N,\ 其中\ p=\frac{1}{2}(N+m). \tag{4}$$

(2) 式所得的数目与在 N 个空盒里面放 p 个球时所有的不同放法数目是相同的.（一个球放在第 k 个盒子内,这类似于第 k 步是向右走的.）我们从 p 个球是可区分的情况开始. 第一个球 p_1, 可以被放入 N 个盒子的任何一个之中去; 等等. 因此, p 个可区分的球可以用下列数种方法放入 N 个

盒子中去:

$$N(N-1)\cdots[N-(p-1)]=N!/(N-p)! \tag{5}$$

交换可区分的球,这相当于使它们出现的排列顺序进行置换,但并不改变盒子空与满的样式. p 个球一共有 $p!$ 种排列. 故有

$$\begin{bmatrix}p\text{个可区分的球被放入}\\N\text{个盒子中去的各种方式的数目}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\text{盒子空或}\\\text{满的样式的数目}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\text{在某个样式中,可区分}\\\text{球的排列数.}\end{bmatrix}$$

或

$$\frac{N!}{(N-p)!}=C_p^N\cdot p!,$$

即得(2)式.

让我们来检验一下,所有概率之和等于1. 利用(3)式,我们求得确实有

$$\sum_{m=-N}^{N}{}''w(m,N)=\sum_{p=0}^{N}C_p^N\left(\frac{1}{2}\right)^N=\sum_{p=0}^{N}C_p^N\left(\frac{1}{2}\right)^{N-p}\left(\frac{1}{2}\right)^p$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^N=1. \tag{6}$$

注: 和号上的二撇用来表示求和脚标都取不同值.

均值,方差与母函数

假设 f 是一个函数,它的定义域是随机走动的可能结果 m. 则 f 的期望值则由下式定义

$$\langle f\rangle_N=\sum_{m=-N}^{N}{}''f(m)w(m,N). \tag{7}$$

之所以使用"期望值"或平均值这个术语,是因为在N步走动进行了大量次数A以后,可望粒子到达位于起始点右边m步的一点可达 $Aw(m,N)$ 次. $f(m)$ 的平均值可望为

$$A^{-1}\sum_{m=-N}^{N}{}''f(m)[Aw(m,N)]=\langle f\rangle_N. \tag{8}$$

习惯上总是略去(7)式中的下标 N,而且习惯上用 $\langle f(m)\rangle$ 来代

替 $\langle f\rangle$. 举例来说,如果 $f(m)=m^k$, 则就用 $\langle m^k\rangle$ 来代替 $\langle f\rangle$. 再看一个例子,向右移动的步数 $p(m)=\frac{1}{2}(N+m)$ 的平均值,可以写成下列等价的式子:

$$\langle p\rangle=\sum_{m=-N}^{N}{}''p(m)w(m,n)=\sum_{p=0}^{N}pC_p^n\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

这里我们用到了关于 $w(m, n)$ 的公式(4). 在从第一个和式过渡到第二个和式时,我们把变量 m 换成了 p.

$\langle f\rangle$ 的最重要的实例是**平均位移** $\langle m\rangle$ 和**均方位移**或方差 $\langle m^2\rangle$. $f(m)=m^k$ 的期望值称为 k 次**矩**.

为了计算各阶矩,我们引入**母函数**

$$G(u)=\sum_{p=0}^{N}C_p^N\left(\frac{1}{2}\right)^N u^p. \tag{9}$$

该函数是在概率 $w(m,N)$ 上附加新引入的变量 u 的幂,并对所有容许取的 p 值求和(p 比 m 更好, 因为 p 是以单位步长变化的)而得到的[1]. 另外,(9)式也可以看成是具有下列形式的傅里叶级数:

$$g(t)=\sum_p a_pe^{ipt}, \tag{10}$$

其中 $u=e^{it}$, 当 $p>N$时 $a_p=0$. 从而,母函数方法与后面就要考虑的傅里叶变换方法产生了联系.

为了示明母函数的用途,我们注意

---

1) 使用母函数这种操作是毫无困难的, 但令人惊奇的是有人竟然想到了这种方法. 天才大师欧拉是利用母函数的第一个人,这也就不足为奇了. G. Polya 在他的光辉著作 «*Introduction and Analogy in Mathematics*» (New York: Oxford U. P., 1954) 的第一卷第四章中讨论了使用母函数的动机. 他说道"母函数有点类似于口袋. 我们不是孤立地来拿许多小东西, 那样是很麻烦的. 我们把它们都装入一个口袋, 于是我们只要拿一样东西——口袋就行了. 十分类似地,我们不是个别地处理序列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$, 中的每一项,而是把它们都放在一个幂级数 $\sum_n ax^n$ 里,然后只要处理一个数学对象——幂级数. "而处理幂级数,我们就能用解析函数这一异常有力的理论. 至于关于母函数的广泛文献的一个导引,可以参见 E. C. McBride 著的 *Obtaining Generating Functions* (New York: Springer, 1971) 一书和 J. Wimp 在 *SIAM Rev.* **14**, 663—667(1972) 杂志上发表的专题文章.

$$G'(1)=\sum_{p=1}^{N} pC_p^N\left(\frac{1}{2}\right)^N=\sum_{m=-N}^{N}{}'' pw(m,n)=\langle p\rangle. \quad (11)$$

但由于 $p=\frac{1}{2}(N+m)$,

则 $$\langle p\rangle=\frac{1}{2}N\sum_{m=-N}^{N}{}''w(m,N)+\frac{1}{2}\sum_{m=-N}^{N}{}''mw(m,N)$$
$$=\frac{1}{2}N+\frac{1}{2}\langle m\rangle. \quad (12)$$

如果 $G(u)$ 能够写成简单的形式，我们就能毫无困难地得到 $G'(1)=\langle p\rangle$，从而求得希望得到的平均值 $\langle m\rangle$. 但是，二项展开式(3)的另一应用给出

$$G(u)=(1+u)^N\left(\frac{1}{2}\right)^N, \quad (13)$$

与级数形式(9)对比，这里的 G 具有封闭形式. 方程(13)使我们立刻得出结论:

$$G'(1)=N/2.$$

于是，根据(11)式和(12)式，我们看出

$$\langle p\rangle=N/2,\ \langle m\rangle=0. \quad (14a,\ b)$$

平均位移为零这正是我们所预期的，因为向左运动与向右运动是机会均等的.

例 求 $\langle m^2\rangle^{1/2}$ 并解释所得的结果.

解 由(9)式

$$G''(1)=\sum_{p=0}^{N} p(p-1)C_p^N\left(\frac{1}{2}\right)^N=\langle p(p-1)\rangle$$
$$=\langle p^2\rangle-\langle p\rangle.$$

但由(13)式得

$$G''(u)=N(N-1)(1+u)^{N-2}\left(\frac{1}{2}\right)^N,\ G''(1)=\frac{N(N-1)}{4}.$$

利用(14a)式的结果 $\langle p\rangle=N/2$，得

$$\langle p^2\rangle-\langle p\rangle=\frac{1}{4}N^2-\frac{1}{4}N,\ \langle p^2\rangle=\frac{1}{4}N^2+\frac{1}{4}N.$$

然而，

$$m = 2p - N \text{ 因此 } \langle m^2 \rangle = 4\langle p^2 \rangle - 4N\langle p \rangle + N^2$$

即，

$$\langle m^2 \rangle = N^2 + N - 2N^2 + N^2 = N$$

离原点的均方根位移，即**方差**为

$$\langle m^2 \rangle^{1/2} = N^{1/2} \tag{15}$$

它大大小于步数 N. 这是由于粒子左右随机运动，其效果相互抵消了的结果.

使用随机微分方程，通过观察布朗运动来求得玻耳兹曼常数

现在，我们来非常简要地说明一下如何通过对布朗运动的观察去决定分子的性能. 这种可能性是由爱因斯坦提出的，实验是由 Perrin 完成的. 以下是他们的方法概要.

假设作用于粒子上的宏观阻力正比于速度——正如经典流体力学所预言的(见 II§3.6). 引入**总体均值**，$\langle\ \rangle$，即多次重复同样实验所得的平均值. 在一段时期 t 内，观察该粒子以求得：(i)净位移在一直线上的投影(记为 x)，或者(ii)净位移本身(记为 r). 爱因斯坦证明了扩散的这些观察值，应该服从统计规律

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{3}\langle r^2 \rangle = 2Dt, \tag{16}$$

式中，扩散系数 D 由下式给出

$$D = k\Theta/f, \tag{17}$$

这里 Θ 是绝对温度，f 是阻力系数，作用于运动速度 $\mathbf{v}$ 的粒子上的力为 $-f\mathbf{v}$. 对于在粘性系数为 μ 的介质中运动的半径为 a 的球状粒子，f 由斯托克斯定律[参见第 II 卷，方程(3.6.10)]决定:

$$f = 6\pi\mu a. \tag{18}$$

在(17)式中，k 是玻耳兹曼常数. $\left(\text{气体分子的平均动能等于 } \frac{3}{2}k\Theta\text{，这是一个基本的物理事实.}\right)$

Perrin 能够验证(16)式，因此在 Θ、μ、a 的很大的数值范围内

确定了玻耳兹曼常数 k. 由于 k 等于已知的普通气体常数 R 除以阿佛伽德罗常数 N_0，所以决定了 k 立即就求得了 N_0 的值.

(16)式的结果实质只是在适当的极限情况下，考查随机走动，由方程(3.8)和(3.28)中所得的结果，但是更充分的描述则需要另外一种推导. 关于自由粒子的布朗运动的近代理论一般地是从朗之万方程出发的

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-f\mathbf{v}+\mathbf{F}(t) \tag{19}$$

式中，$\mathbf{v}$ 为粒子的速度，m 为粒子的质量. 周围介质的影响可以分成两部分，即宏观的动力摩擦 $-f\mathbf{v}$ 和随机力 $\mathbf{F}(t)$. 假设 $\mathbf{F}(t)$ 与运动粒子的位置和速度无关，并假设与 $\mathbf{v}$ 的变化相比较 $\mathbf{F}(t)$ 的变化要迅速得多.

在本卷中，要重新写出朗之万方程所要求的理论，我们未免就离题太远了. 读者应该参阅参考书，如在 Wax(1954) 一书的 pp. 22—27 中的 Chandrasekhar 的论文. 但在下面两段中，我们将提供一个非常粗略的处理，以便把宏观和微观过程之间关系的要点告诉读者.

如果取(19)式与 $\mathbf{x}$ 的标积，($\mathbf{x}$ 为粒子偏离粒子群平均位置的位移)，并且对粒子群取总平均，我们得到:

$$m\left(\frac{d}{dt}\langle\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}\rangle-\langle\mathbf{v}^2\rangle\right)=-f\langle\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}\rangle-\langle\mathbf{x}\cdot\mathbf{F}\rangle. \tag{20}$$

现在我们假定 $\langle\mathbf{x}\cdot\mathbf{F}\rangle=0$，这样 $\left\langle\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)\cdot\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)\right\rangle$ 是稳恒的. 于是我们就能从(20)式中解出 $\langle\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}\rangle$. 此量正比于扩散系数；这是因为由(16)式，有

$$\langle\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}\rangle=\frac{1}{2}\left\langle\frac{d(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})}{dt}\right\rangle=\frac{3}{2}D \tag{21}$$

$\langle\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}\rangle$ 的解表明: $\langle\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}\rangle$ 最后也成了稳恒的，而且取值:

$$\langle\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}\rangle=\frac{m\langle\mathbf{v}^2\rangle}{f}. \tag{22}$$

可惜在这种简单推导中，我们无法计算出(22)式右方. 然而我们

可以论证，宏观粒子的随机运动将获得一个能量，它等于分子运动的能量。因此，我们假设

$$\frac{1}{2}m\langle \mathbf{v}^2\rangle = \frac{3}{2}k\Theta \tag{23}$$

合并(21)、(22)和(23)式，我们就得到了(17)式。

练　　习

1. (a) 证明：$w(m\cdot N)$ 是 m 的偶函数，并解释这一结果。
   (b) 求证(13)式.
2. 给定 $w(m, N)$ 如(4)式所示：
   (a) 求 $\langle p^3\rangle$ 和 $\langle m^3\rangle$.
   (b) 求 $\langle p^4\rangle$ 和 $\langle m^4\rangle$.
3. 考虑一个随机走动，其中向右移动一步的概率 ρ 不必与向左移动一步的概率 $\lambda = 1-\rho$ 相同.
   (a) 现在证明：
   $$w(m,N) = C_p^N \rho^m \lambda^{N-m}.$$
   (b) 引入一个母函数，并且用它来求位移 m 的均值和方差.
   (c) 在此情况下重复练习 2 .
4. (a) p 阶的**第一类贝塞耳函数**的定义如下：
   $$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{2k+p}}{k!(k+p)!} \tag{24}$$
   证明(形式地)这个级数给出了**贝塞耳方程**
   $$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2-p^2)y = 0 \tag{25}$$
   的解.
   (b) 如果 p 是整数 n，试证
   $$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \tag{26}$$
   (c) 证明
   $$e^{xt/2}e^{-x/2t} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{j+k}}{j!k!}t^{j-k}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^n J_n(x). \tag{27}$$

它可充当带有整数下标 n 的贝塞耳函数的母函数.

(d) 在(27)式中,用 $\exp(i\theta)$ 代换 r, 试推导下列积分表示:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin\theta - n\theta)}d\theta; \quad n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \cdots \tag{28}$$

(e) 通过交换变量,可求得另一公式

$$J_n(x) = \frac{e^{in(\pi/2)}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(x\cos\theta_1 + n\theta_1)}d\theta_1. \tag{29}$$

(在 §16.3 中我们将用到 $n = 0$ 时的公式.)

3.2 渐近级数、拉普拉斯方法、伽玛函数及 Stirling 公式

我们已经知道，一个布朗粒子总共移动了 N 步后到达位于出发点右边 m 步的一点处的概率 $w(m, N)$ 为

$$w(m, N) = \frac{N!}{p!(N-p)!2^N}, \text{其中 } p = \frac{1}{2}(N+m). \tag{1}$$

我们希望求出当 N, p 及 $N-p$ 很大时的近似结果;于是我们面临着一个求大数阶乘的问题. 多年以前，Stirling[1] 证明了一个阶乘的自然对数可以表为下列级数:

$$\ln n! \sim \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \cdots. \tag{2a}$$

其主项给出了 **Stirling 公式即 Stirling 近似.**

$$n! \sim (2\pi n)^{1/2} n^n e^{-n}. \tag{2b}$$

把(2)式应用于(1)式中的阶乘[练习 1(a)], 我们得到下列近

1) James Stirling (1692—1770) 是继牛顿以后的英国数学家. 实际上 Stirling 导得了一个具有比(2)式更小的系数的级数,但这些系数更难求得. “求得这一级数需要惊人的天才,需要有数学智谋才能得到. 自从 Stirling 给出了找到这一级数所要用到的全部原理以后, Stirling 级数的 de Moivre 形式最精确地描述了这一级数的常用形式”.——摘自 de Moivre 收到的一封信. (Jeffreys and Jeffreys, 1962, p. 467).

似:

$$w(m, N) \sim \left(\frac{2}{\pi N}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{-m^2}{2N}\right). \tag{3}$$

表 3.1 表明,这个近似是一个极好的近似,即使对于 $m=4$, $n=10$ 这样似乎适中的值也是如此. 然而,我们知道,以 (2) 式作为第一项的那些级数对所有 z 值都是发散的. 那么从什么样的严格意义上说来,(2)式是一个正确的数学表示式呢?

表 3.1 $N=10$ 时 $w(m, N)$

m	精确公式 (1)	渐近公式 (3)
0	0.24609	0.252
2	0.20508	0.207
4	0.11715	0.113
6	0.04374	0.042
8	0.00977	0.010
10	0.00098	0.002

为了懂得 Stirling 近似 (2) 的性质,为了处理其他很多问题,我们必须考虑渐近级数这个概念. 我们以一个相对说来比较简单的例子开始我们的讨论. 在这一例子中,近似级数可以通过分部积分产生. 由于剩余部分存在有一个显式表达式,因此能够毫无困难地了解近似式的渐近性质. 在讨论了渐近级数的形式定义后. 我们转而对拉普拉斯方法给于一个启发式的描述. 借助此种方法便可产生某些积分的渐近级数. 我们利用伽玛函数来说明拉普拉斯方法,伽玛函数是阶乘函数的一种扩充. 我们还概述了关于这种方法合法性的证明. 其结果是证明了 Stirling 公式.

一个例子: 借助于分部积分的渐近展开

假设我们要计算积分

$$f(x) = \int_x^\infty t^{-1} e^{x-t} dt, \tag{4}$$

其中 x 取大的正值,这一非正常积分是收敛的[练习 1 (b)]. 采用

分部积分，我们得到下面的表示式：

$$f(x)=\frac{1}{x}-\int_x^{\infty}t^{-2}e^{x-t}dt. \tag{5}$$

(5) 式中的积分值要小于 (4) 式中的积分值，至少小一个因子 $\frac{1}{x}$，因为在积分区间中 $t\geqslant x$. 所以，我们能从(5)式推得

$$\frac{1}{x}=f(x)+\int_x^{\infty}t^{-2}e^{x-t}dt\approx f(x).$$

我们可以通过逐次分部积分来改进近似 $f(x)\approx x^{-1}$. 可以得到[练习 2(a)]

$$f(x)=S_n(x)+R_n(x), \tag{6a}$$

式中

$$S_n(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2!}{x^3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}, \tag{6b}$$

$$R_n(x)=f(x)-S_n(x)=(-1)^n n!\int_x^{\infty}t^{-(n+1)}e^{x-t}dt. \tag{6c}$$

对于所有的 x 值，序列 $S_n(x)$ 当 $n\to\infty$ 时趋于发散. 但我们仍然觉得，当 x 很大时，在某种意义上 $S_n(x)$ 必定还是一个好的近似. 因此，我们将对 n 的一个固定值来考察一下剩余式 $R_n(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的状态.

我们知道

$$\left|\int_x^{\infty}t^{-(n+1)}e^{x-t}dt\right|\leqslant\int_x^{\infty}|t^{-(n+1)}||e^{x-t}|dt.$$

因为 $t\geqslant x$，$|t^{-(n+1)}|\leqslant x^{-(n+1)}$，所以我们有

$$|R_n(x)|<n!x^{-(n+1)}\int_x^{\infty}e^{x-t}dt=n!x^{-(n+1)}. \tag{7a}$$

于是，若是 $x\to\infty$，则对于任何固定的 n 都有 $R_n(x)\to 0$. 事实上，只要 $x\geqslant 2n$，可以证明[练习 2(b)]

$$|R_n(x)|<2^{-(n+1)}n^{-2}, \tag{7b}$$

即使对于 n 适中的值上式还是小的. 例如，当 $n=3$ 时

$$R_n<\frac{1}{144}\approx 0.007，假若\ x\geqslant 6.$$

方程(7)表明级数的剩余式小于忽略了的第一项。然而，情况并不总是如此。(7a)式具有一种推广了的性质，即对固定的 n，剩余式与所保留的最后一项的比值当 $x\to\infty$ 时趋近于零。让我们用一个定义把这一说法表述出来。

渐近展开理论中的定义

考虑

$$A_0+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\cdots+\frac{A_n}{x^n}+\frac{A_{n+1}}{x^{n+1}}+\cdots=S_n(x)$$
$$+\frac{A_{n+1}}{x^{n+1}}+\cdots. \tag{8}$$

如果

$$\lim_{x\to\infty}x^n[f(x)-S_n(x)]=0\ (n\text{ 固定}), \tag{9a}$$

则我们说表式 $S_n(x)$ 给出了 $f(x)$ 的一个渐近展开式(当 $x\to\infty$ 时)，换一种记号，可把条件(9a)写成

$$f(x)-S_n(x)=o(x^n),\ x\to\infty\ (n\text{ 固定}) \tag{9b}$$

在(9)式成立的情况下，我们记作

$$f(x)\sim\sum_{i=0}^{n}A_ix^{-i},\ x\to\infty, \tag{10}$$

符号"～"读作"渐近于"。若(10)式对于每一个 n 成立，我们就记作

$$f(x)\sim\sum_{i=0}^{\infty}A_ix^{-i},\ x\to\infty \tag{11}$$

称之为 f 的渐近幂级数展开(当 $x\to\infty$)。

实际上，(11)式中的级数对任何固定的大 x 值通常是发散的。在另一种情况下，如果这个级数对于充分大的 x 确实收敛于 f，即若

$$\lim_{n\to\infty}\left|f(x)-\sum_{i=0}^{n}A_ix^{-i}\right|=0\quad\text{对于固定的大 } x \text{ 值}, \tag{12}$$

那么当 $x\to\infty$ 时，(11)式是渐近的[练习 3]。

正如我们已经知道的那样，

$$\int_x^{\infty} t^{-1}e^{x-t}dt \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$$

可以作为这样的一个级数的例子；它对所有的 x 值是发散的，但当 $x \to \infty$时则是渐近的．我们必须清楚地记住收敛级数和渐近级数之间的区别．为了证明当 $x \to \infty$ 时，级数展开式是渐近的，我们要考察当 x 很大时第 n 项（这里 n 是一固定数）以后的余项 $f(x)-S_n(x)$ 的行为．而收敛性的证明则要求考察当 n 变得很大时，独立变量取某一固定值处的余式的行为．

渐近级数的定义可以推广到 $x \to -\infty$． 而且，我们常常还希望考虑 $|z| \to \infty$ 的情形，这里 z 是复数．（在后一情形中，通常对 $\arg z$ 的取值范围有一限制．）也可以产生当由 z 趋近于任意一点 z_0 时的渐近展开问题，但是通过引进新的变量 $1/(z-z_0)$，把它化为变量趋于∞的情形，这往往是方便的．

再给出一个定义

$$f(x) \sim g(x) \sum_{n=0}^{N} A_n x^{-n}, \ x \to \infty \tag{13}$$

即

$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \sum_{n=0}^{N} A_n x^{-n}, \ x \to \infty. \tag{14}$$

渐近展开式往往可以通过巧妙地运用分部积分法来得到．[见练习 7.] 现在我们来讲述一种不同的处理方法，它具有更广泛的用途，并且可以比较直接地推得 Stirling 级数．

拉普拉斯方法

我们给出一种方法，用来求某些含有大参数的积分的渐近展开，此方法是拉普拉斯发明的．经过适当推广以后，此方法成为应用数学中最常用的方法之一．

标准形式的拉普拉斯方法用于可以写成下列形式的积分：

$$F(\lambda) = \int_{\alpha}^{\beta} g(t)e^{-\lambda f(t)}dt, \ \lambda > 0. \tag{15}$$

在正的常数 λ 很大的情况下，找到了一种近似．整个这一类方法中所用到的思想(拉普拉斯方法则是这类方法的一个范例)是这样的：如有必要，我们就对积分进行变换，直至对大 λ 值其结果的主要贡献来自于积分路线上的一小部分为止．假设该积分部分在一点 t_0 邻近，那么就采用在 t_0 点附近作泰勒展开的方法将被积函数在该点邻近进行简化．

在对(15)式进行明显运算时，我们假定 $f(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 的一内点 t_0 处有一个绝对极小值，且有 $f'(t_0)=0$，$f''(t_0)>0$．用 $f(t)$ 的泰勒级数中头上两个非零项来近似 $f(t)$，就可看到 $\exp[-\lambda f(t)]$ 很象 $Q(t)\exp[-\lambda f(t_0)]$，其中

$$Q(t)\equiv\exp\left[\frac{-\lambda f''(t_0)(t-t_0)^2}{2}\right].$$

图 3.1 给出了当

$$\frac{\lambda f''(t_0)}{2}=1,\ 10,\ \text{和}\ 100$$

时 $Q(t)$ 的图象．对于大的 λ 值，我们看到，$Q(t)$ 仅在距 t_0 很小

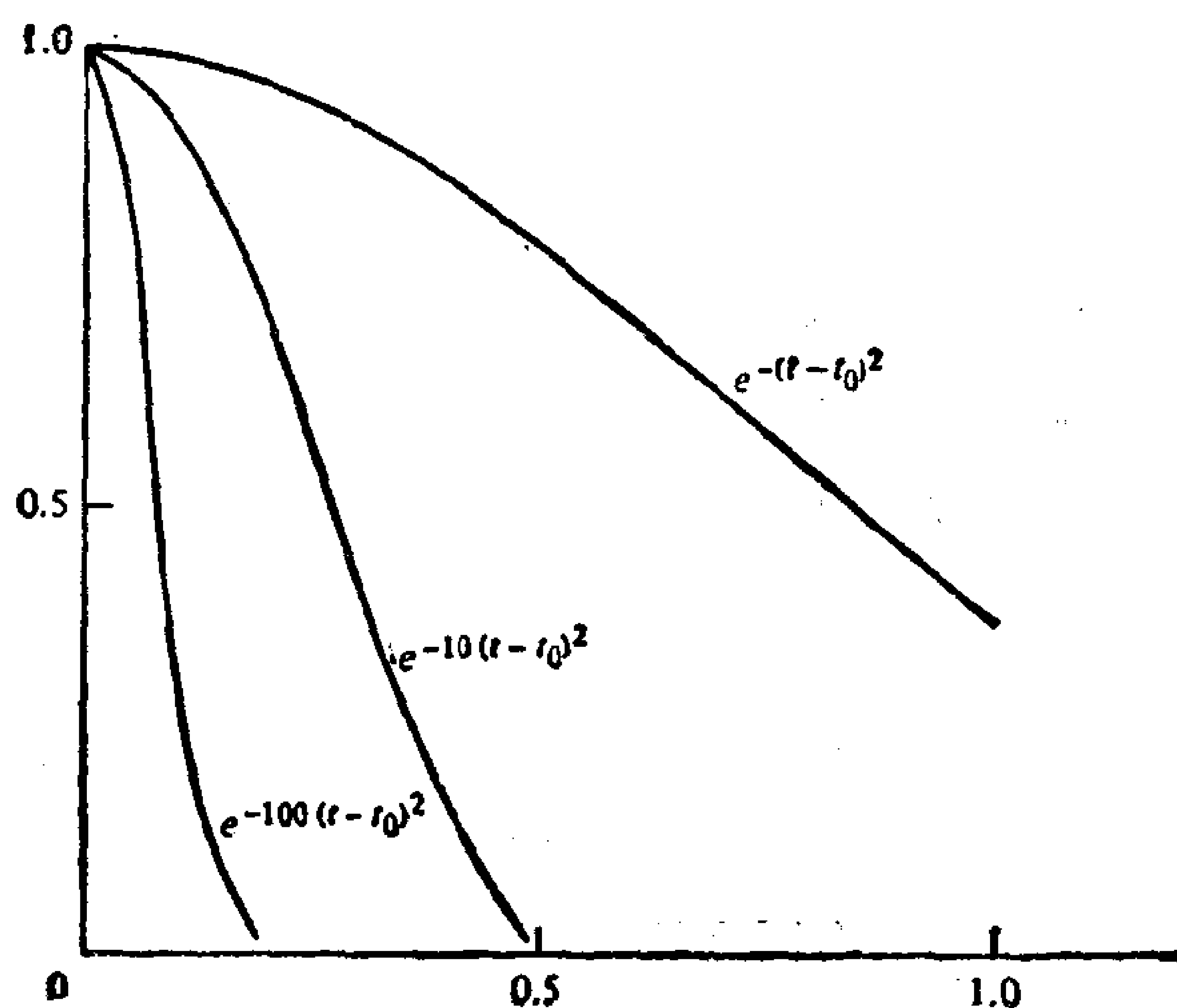


图 3.1 这一图示明了这样一个事实：当 λ 大于零且很大时，$\exp[-\lambda(t-t_0)^2]$ 从它的最大值迅速往下衰减．

的一段距离范围内才是重要的．在 t_0 处的一个窄带内，准许用 $g(t_0)$ 来近似 $g(t)$．这样，我们就得到了猜想的结果：

$$F(\lambda)=\int_\alpha^\beta g(t)e^{-\lambda f(t)}dt\sim g(t_0)\exp[-\lambda f(t_0)]\int_\alpha^\beta Q(t)dt.$$

但是，既然仅在 t_0 附近的一个窄小区间内对积分才有实质性的贡献，那么我们就能用 $-\infty$ 和 ∞ 来取代积分限，从而进一步作出简化，当然，这样做使精确度略有降低．改变变量

$$u=(t-t_0)\frac{f''(t_0)}{2}.$$

我们的结果成为[练习 8(a)]

$$F(\lambda)\sim g(t_0)\exp[-\lambda f(t_0)]\left[\frac{2}{f''(t_0)}\right]^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\lambda u^2)du. \tag{16a}$$

用后面将给出的(34)式算出积分，最后我们得到[1)]

$$F(\lambda)\sim g(t_0)\exp[-\lambda f(t_0)]\left[\frac{2\pi}{\lambda f''(t_0)}\right],\text{当 }\lambda\to\infty\text{时}. \tag{16b}$$

我们不对 (16b) 式加以证明，而立即转而讨论级数的展开．我们将要用的处理方法就精神实质而言与刚才所完成的很相似．

伽玛函数的渐近 Stirling 级数展开

我们第一步是要求得 $n!$ 的积分表达式，这是决非容易的一步：这是用引入[2)]伽玛函数 $\Gamma(s)$ 的方法完成的，

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx. \tag{17}$$

只要直接应用分部积分法就可以验证：当 s 为正整数 n 时，就有

$$\Gamma(n)=(n-1)! \tag{18}$$

但是，(17) 式中的积分不是只对 s 取正整数才有定义．一个重要

1) 我们可以通过选择一条在"鞍点"附近的"最速下降"积分曲线来推广公式(16b)，使它可以用于复变积分．这里的"鞍点"与 f 的平稳点是完全相似的．

2) 以前我们已经评论过关于母函数的起源问题，那么，读者对于正是欧拉得到了积分表达式(17)这一事实也许不会惊奇了吧．

的特殊情况是

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}, \tag{19}$$

这是一个需要用技巧证明的公式[练习 2(d)]. 其实,即使 s 取复数值,只要 $\mathrm{Re}(s)>0$, 那么(17)式仍然有意义.

我们感兴趣的是当 s 取大正数值时 $\Gamma(s)$ 的行为.

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx=\int_0^\infty e^{(s-1)\ln x}e^{-x}dx,$$

上式表明

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-sF}dx,\ \text{此处}\ F(x,\ s)=-\ln x+s^{-1}\ln x + s^{-1}x.$$

把 $F(x,\ s)$ 看成 x 的函数,它在点 x_0 处平稳,其中

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0,\ \text{即}\ x_0=s-1 \tag{20}$$

我们在处理 (15) 式时,t_0 的位置是固定不动的,然而在这儿点 x_0 随着 $s\to\infty$ 而"移动". 为了固定它的位置,我们采用改变变量的办法

$$t=\frac{x}{s-1}, \tag{21}$$

来使 $x=s-1$ 与固定点 $t=1$ 相对应. 于是,(17)式成为

$$\Gamma(s)=(s-1)^sJ, \tag{22}$$

其中

$$J=\int_0^\infty \exp[-(s-1)f(t)]dt,\ f(t)\equiv t-\ln t \tag{23}$$

当

$$f'(t_0)=0\ \text{或}\ t_0=1\ \text{时}, \tag{24}$$

$f(t)$ 取极小值. 在极小点,f 取值 $f(1)=1$. 因而,(23) 式的被积函数在 $t=1$ 处达到极大值,并且随着 t 离开这一点而异常迅速地下降.

为显示被积函数的主要性质,我们记作

$$\lambda = s - 1,\ f(t) = f(t_0) + [f(t) - f(t_0)]. \tag{25}$$

于是我们的积分成为

$$J(\lambda) = e^{-\lambda f(t_0)} \int_0^{\infty} e^{-\lambda[f(t)-f(t_0)]} dt. \tag{26}$$

(这儿我们已经假定了 $s-1=\lambda$ 为正. 但是既然我们对较大的 s 值感兴趣，这就不算是一个附加限制了.) 为了强调 $[f(t)-f(t_0)]$ 是一个具有单个极大值的非负函数这一关键，我们引入一个新变量 w，它满足

$$w^2 = f(t) - f(t_0). \tag{27}$$

我们用下式来完全确定 w

$$\begin{aligned} w &= -\sqrt{f(t) - f(t_0)},\ t \leqslant t_0; \\ w &= \sqrt{f(t) - f(t_0)},\ t \geqslant t_0. \end{aligned} \tag{28}$$

当 t 从 0 增加至 ∞ 时，w 从 $-\infty$ 至 ∞ 连续单调地增大 [练习 4(a)]. 利用这一事实，我们把(26)式重新写成

$$J(\lambda) = e^{-\lambda f(t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda w^2} \frac{dt}{dw} dw. \tag{29}$$

下面的任务是要把 dt/dw 展开成 w 的幂级数. 由于

$$w^2 = f(t) - f(t_0) = t - 1 - \ln t. \tag{30}$$

因此

$$w^2 = \frac{1}{2}(t-1)^2 - \frac{1}{3}(t-1)^3 + \cdots \tag{31}$$

因而[练习 4(b)]，可以写出

$$t - 1 = \sqrt{2}\, w(1 + a_1 w + a_2 w^2 + \cdots). \tag{32}$$

把(32)式代入 (31) 式并比较各项[练习 4(c)] 便可定出系数 a_1, a_2, $\cdots$.

由(32)式可以容易地计算出 dt/dw 的幂级数. 假设逐项积分是准许的，则我们发现，计算(29)式便化成了计算具有下列形式的积分

$$I_m(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda w^2} w^m dw;\ m = 0, 1, 2, \cdots \tag{33}$$

作一初等替换，可证明 I_0 是 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ 的倍数．因此，利用(19)式中 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ 的表示式，我们求得

$$I_0(\lambda)=\sqrt{\pi/\lambda}. \tag{34}$$

类似的替换把决定 I_m 的问题化成了计算 Γ 积分．另外，(34)式可以对 λ 形式地作微分[练习 5]．结果是

$$\begin{aligned}&I_m(\lambda)=0,\ m\ 为奇数;\\&I_m(\lambda)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots m-1}{2^{m/2}\lambda^{m/2}}\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{1/2},\ m\ 为偶数\end{aligned} \tag{35}$$

综合我们的所有结果(练习 5)，便有

$$J=\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{1/2}e^{-\lambda}[1+O(\lambda^{-1})], \tag{36}$$

从而

$$\begin{aligned}\ln\Gamma(s)=&\left(s-\frac{1}{2}\right)\ln(s-1)-(s-1)\\&+\frac{1}{2}\ln 2\pi+O\left(\frac{1}{s-1}\right).\end{aligned} \tag{37}$$

特别是当 $s=n+1$（n 为整数）时，我们又得到了 Stirling 级数(2a)的首项．

逐项积分法的合法性

一般说来，象(32)式那样的级数有一个有限的收敛半径．因此，如果我们坚持只和收敛级数打交道，那么逐项积分法的合法性是没有得到证明的．但是对于大的 λ 值，对积分的重要贡献只是在 $w=0$ 附近，我们可望级数在此处是收敛的．我们有一种强烈的直觉，感到一切不成问题．的确，在渐近的意义上可以证明(35)式的结果(甚至是更广泛的结果，如练习 6)．为了给出证明，代替使用(32)式中的级数，我们稍微改变一下观点，把 $t-1$ 写成一个有限求和再加上一个余式：

$$t-1=\sqrt{2w}\,[1+\cdots+a_{2n}w^{2n}+a_{2n+1}w^{2n+1}$$

$$+ R_{2n+2}(w)w^{2n+2}]. \tag{38}$$

带有奇数脚标的那些系数 a_i 对(29)式中的积分没有贡献，这是因为相应的被积函数是奇函数，这样，来之于(38)式中多项式的最后非零贡献项正比于 $I_{2n}(\lambda)$，并且根据(35)式它为 $O(\lambda^{-n-1/2})$。余式的贡献正比于

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{2n+2}(w)w^{2n+2}e^{-\lambda w^2}dw$$

$$= \lambda^{-n-3/2}\int_{-\infty}^{\infty} R_{2n+2}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right)t^{2n+2}e^{-t^2}dt. \tag{39}$$

要求(39)式如我们所希望的那样为$O(\lambda^{-n-3/2})$，只需要求右侧的积分收敛即可。这是当然的，只要 $R_{2n+2}(t/\sqrt{\lambda})$对于大的 t 有界；甚至成为无穷大也行，只要它与 $\exp(t^2)$ 的增长不是可比较的话。

其他文献中含有大量的定理，它们给出了关于得出渐近展开的各种各样手段的合法性的充分条件。然而，通常我们在这里强调了逼近的思想。因为在任何情况下，把已经发表了的定理应用于实际中碰到的问题以前，往往必须把它加以引伸。这种引伸也许是很困难的。如果遇到这种情形，许多应用数学家可能就不去努力完成它了。

在应用数学的很多手法中，这是十分典型的。那些形式步骤是可以证明的。但是常规的做法是接受那些表面上说得通的东西，除非存在着有道理的疑点，即除非能提出一种重要的争议。假如你乐意，你可以想象在应用数学的工作中往往隐含着下列合理的辩解：“所得结果是尝试性的，是可以说得过去的；我们还没有理由来怀疑它的合法性。”在很多异常复杂的情况下，严格的数学证明，甚至是一般过程的证明，可能要花费数年的时间才能完成。显然，人们不能袖手等待、踌躇不前。我们应用数学家所持的态度和行动原则与纯粹数学家基本上是不相同的。

练　习

1. (a) 验证(3)式。

(b) 试证：(4)式中的广义积分是收敛的。

2. (a) 验证(6b)式和(6c)式。

(b) 验证(7b)式。

(c) 验证(18)式。

(d) 试证

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy=\sqrt{\pi}.$$

其方法是考虑 I^2，并在 (x, y) 平面中引入极坐标．再验证(19)式．

3. 试证：如果对于充分大的 x 值 (8) 式收敛，则当 $x\to\infty$ 时，(8)式是一个渐近级数．

4. (a) 验证(29)和(31)式．

(b) 给出一个形式证明，证明求得(32)式所必需的反演．

(c) 确定(32)式中的系数 a_1 和 a_2.

5. (a) 验证(34)式和(36)式．

(b) 把积分化成伽玛函数从而导出(35)式中的公式．

(c) 对(34)式进行形式微分从而导出(35)式中的公式．

(d) 论证 (c) 中的形式过程．

6. 把课文中对 (37) 式的推导进行扩充，从而获得 Stirling 级数 (2a) 更多的项．

7. 采用分部积分法，求下列积分当 $x\to\infty$ 时的渐近展开式：

(a) 补余误差函数 $2\pi^{-1/2}\int_x^{\infty}e^{-t^2}dt$.

(b) Fresnel 积分

$$C(x)=\int_0^x\cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt,\quad S(x)=\int_0^x\sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt.$$

8. (a) 验证(16a)和(16b)式．

(b) 给出形式证明，试证：如果适当地限制 f 和 g，则 (16b) 式是合法的．

3.3 差分方程及其极限

为理论分析奠定了成功基础的基本要素之一，乃是从各种各

样的途径来逼近同一个问题的实践．这样各种方法的威力可以相互映照，使人们达到更深刻的理解．到目前为止，我们已经作出努力去追随一个粒子当它从原点出发以后的运动．我们得到了$w(m, N)$的精确的以及近似的表达式，这一函数乃是一个粒子在总共走了N步以后到达位于右边m步处某一点的概率．如果我们现在把注意力转向粒子到达位于原点右边第i步处的一点的中间行为的话，我们将会领悟到一种完全不同的方法．我们将会看到，随机走动还可以用某一种差分方程来描述．可以用一个微分方程来逼近这个差分方程，其结果成为一个扩散方程．扩散方程的各种各样的解给出了颇有兴趣的概率问题的各种解．

概率函数的差分方程

我们断言，下列差分方程

$$\bar{w}(x,\ t+\Delta t)=\frac{1}{2}\bar{w}(x-\Delta x, t)+\frac{1}{2}\bar{w}(x+\Delta x,\ t),\quad (1)$$

描述了

$$\bar{w}(x,\ t)\equiv w\left(\frac{x}{\Delta x},\ \frac{t}{\Delta t}\right).\qquad (2)$$

在有限步时间间隔Δt内的变化．在(1)式和(2)式中我们定义了

$$x=m(\Delta x),\ t=N(\Delta t).\qquad (3)$$

因此，$\bar{w}(x,t)$就是在时刻$t=0$从原点出发的粒子在时刻t位于点x处的概率．差分方程(1)只不过说明了：为了在时刻$t+\Delta t$到达点x处，那么在时刻t，粒子必定处于两种可能状态：它要么处于点$x-\Delta x$ [概率 $w(x-\Delta x,\ t)$]，因而其后它往右移动了一步$\left[概率\ \frac{1}{2}\right]$；要么处于点$x+\Delta x$处，因而其后它往左移动了一步．

方程(1)乃是$\bar{w}$所遵循的演变方程．为了用这些术语来完成对问题的公式化，我们必须加上粒子从原点出发这一条件，即

$$\bar{w}(0,\ 0)=1;\ \bar{w}(x,\ 0)=0,\ x\neq 0. \tag{4}$$

我们希望在初始条件(4)下，通过求解差分方程(1)可以重新得到 w 的精确解(1.4)式. 读者也许不可能从根本上求得其解，但他们能够容易地验证，(1.4)式满足(1)式和(4)式(练习1).

以微分方程来逼近差分方程

在前面的讨论中，我们把 Stirling 公式用于精确解(1.4)，从而得到近似解(2.3)式. 我们得到了一个非常有用的结果，但是肯定还存在着一个更直接的方法来得到这个近似. 应该只花费较少的工夫，求得不那么详细的结果；事实上，现在要讨论的表述提供了一种求得近似式(2.3)的直接而自然的方法.

我们仅仅对粒子移动了许多步以后的解感兴趣. 因此我们应该考虑 $N\to\infty$ 的极限情况. 然而由(3)式，设在这个极限中让 Δt 固定，然后再令 $t\to\infty$. 我们想要在任意时刻 t 考察解，因此我们要在下列极限

$$N\to\infty,\ t\ \text{固定,因而}\ \Delta t\to 0 \tag{5}$$

的情况下求得近似式(1).

注意，假定粒子是从原点开始移动的，$m\Delta x$ 便是粒子在 N 步以后的坐标. 如果粒子的总步数 N 取得很大，我们可望有极大的可能性，整数 m（正或负）的值很大. 我们当然不希望排除这种可能性. 因而，我们也把极限 $m\to\infty$ 考虑进去. 因为我们希望能够描述在任意一个固定点 x 的情形. 由(3)式，当

$$m\to\infty,\ x\ \text{固定,因此}\ \Delta x\to 0, \tag{6}$$

我们得到了近似式(1)

极限情况(5)和(6)式要求我们在 Δx 和 Δt 较小的情况下对(1)式取近似. 为此，我们自然想到用泰勒公式来展开(1)式中的函数. [我们也许会感到踌躇，因为至今为止 $\bar{w}$ 是定义在 (x,t) 平面内的一个离散点集上的. 但是我们能够构想出一个多项式，它是光滑地通过 $\bar{w}$ 的所有这些值的，从而克服了这个问题.] 因此我们通过下式

$$\bar{w}_t(x,\ t)\Delta t + O(\Delta t)^2 = \frac{1}{2}\bar{w}_{xx}(x,\ t)(\Delta x)^2 + O(\Delta x^3) \quad (7)$$

逼近了(1)式(练习 2). 如果我们用 Δt 来除(7)式,并且假定

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta t\to 0}} \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} = D \quad D \neq 0, \quad (8)$$

我们得到了看起来似乎有理的结果 $\bar{w}_t = D\bar{w}_{xx}$. 这是令人鼓舞的,但我们必须更加慎重一点地做下去.

首先,我们看到,继续保持量 $\bar{w}$ 为应变量已经不再合适了. 这是因为当点的数目为无穷多时在某一个特定点找到粒子的概率可望趋近于零. 既然在任意瞬时粒子只可以占据 x 轴上的其他任何一个点,我们引进量

$$u = \bar{w}/2\Delta x. \quad (9)$$

借助于 u 就可把发现粒子于时刻 t 位于 $a = i\Delta x$ 和 $b = k\Delta x$ 上,或者处在 a 和 b 之间的概率表示为

$$\sum_{m=1}^{k}{}'' u(m\Delta x,\ t)\cdot 2\Delta x. \quad (10)$$

[记住: 求和只对 m 取从 i 到 k 的所有值进行, 但不包括 i 和 k. 若 N 是偶(奇)数,则取 i 和 k 为偶(奇)数.]

我们必须注意: 初看起来,假设 (8) 似乎没有什么直观的要求. 但若不作这个假设,那么极限过程看来也得不到一个有意义的结果. 因此,让我们暂时承认(8)式. 如果对极限过程的进一步考察肯定了我们正在取得进展这一印象的话,我们再回过来论证(8)式. 相反,如果我们的公式化被证明是没有意义的,那就没有必要相信它的合法性了.

利用(9)式和(8)式,对于小的 Δx 和 Δt, (7) 式的一阶近似式便为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (11)$$

当 $\Delta x \to 0$ 时,取 (10) 式的极限,我们就求得了发现粒子于时刻 t 在区间 $(a,\ b)$ 内的概率 $U(a,b;t)$与 $u(x,t)$ 的关系为

$$U(a; b; t)=\int_a^b u(x, t)dx. \tag{12}$$

非正式地说,所谓**概率密度函数** u 指的是 $u(x, t)dx$ 为粒子在时刻 t 位于 x 和 $x+dx$ 之间的概率[1].

概率分布函数的微分方程的解

如果粒子从原点出发，并且随机地移动许多步，那将会怎样呢? 我们可望概率分布将满足(11)式. 当然应有

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)dx=1, \tag{13}$$

因为粒子必定位于 x 轴上的某处. 再者,既然粒子从原点出发,我们必须要求[2]

$$\lim_{t\downarrow 0} u(x, t)=0 \quad x\neq 0. \tag{14}$$

如果在初始条件(13)和(14)式下,能够解出微分方程(11),就可望达到下列目标,即直接求得一个大 N 情况下的近似式,而不必首先求出精确解.

对偏微分方程相当熟悉的人能够通过寻找一个具有自相似形式的函数 u 而求得所希望的解.但是,为了知道我们的计划是否有意义,我以可以反过来做. 采用现在的术语表达, 近似解 (1.4) 式是[练习 3(a)]

$$u \approx u_0(x, t),\ u_0(x, t)\equiv(4\pi D_t)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right). \tag{15}$$

而且不难验证, u_0 满足微分方程 (11)、正交条件 (13) 以及初始条件(14)[练习 3(b)]. 也可以证明，解是唯一的.

我们已经展示了这样一种直接求得随机走动问题的近似解的方法: 建立一个差分方程，进行合适的极限运算，然后再求解最后得到的微分方程问题.

---

1) 注意它与质量密度函数 $\rho(x, t)$ 之间的相似性，可以认为 ρ 给出了在时刻 t 位于 x 和 $x+dx$ 之间的物质的质量.

2) (14)式中向下的箭头意味着 t 通过正值逼近零.

因为我们的逼近看来似乎是成功的，所以我们要更仔细地讨论它，而且还想试着把它应用于一些新问题. 这将在本章的其余部分中进行. 现在暂且让我们更进一步来看看解 u_0. 注意，曲线 $u=u_0(x, t)$ 下的面积始终为 1；而当 $t\downarrow 0$ 时 u_0 变得越来越陡，出现峰值，当 $t\downarrow 0$ 时，u_0 的最大值(在 $x=0$) 像 $t^{-\frac{1}{2}}$ 那样增加，但其宽度像 $t^{\frac{1}{2}}$ 那样减少[1]. 因此，当 $t\downarrow 0$ 时，u_0 逼近一个极限——"δ 函数"，即使在除原点之外的所有点上它都取零值，该函数仍然具有单位面积. 当 t 增加时，u_0 的宽度从它的初始零值开始象 $t^{\frac{1}{2}}$ 那样增加，方程 (1.14a) 已经表明了这一事实.

关于极限过程的进一步考察

我们已经看到，近似式 (15) 可以通过两个途径来求得：把 Stirling 公式应用于精确解，以及在合适的条件下解极限微分方程 (11). 但是，在通过 Stirling 公式求得精确近似式时，我们不仅必须要求总步数 N 很大，而且还必须要求 p 和 $N-p$ 很大，从 3.1 节知道，p 和 $N-p$ 分别是向右移动和向左移动的总步数. 因此，如果 p 或 $N-p$ 很小，那么大部分的步数不是向左便是向右，而位移 m 也就或者可与 $-N$ 或者可与 N 相比较了. 结果，我们这样来解释上述关于使用 Stirling 公式的要求：它排除了位移与历经的总距离差不多大小的那样一些偶然情况. 我们在推导极限微分方程时并未提及这一要求. 为什么呢？

为了回答这一问题，让我们写出我们所用到的全部极限过程，即

$$\Delta x\to 0,\ \Delta t\to 0,\ m\to\infty,\ N\to\infty,\ m(\Delta x)\to x,$$
$$N(\Delta t)\to t,$$
$$\frac{(\Delta x)^2}{2(\Delta t)}\to D. \tag{16}$$

由此

1) 例如可以令 $x^2=4Dt$，以此作为宽度的定义，从而得到这样一个位置，在此位置处，(15)式中的指数因子乃是其最大值的 $1/e$.

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{2D}{\Delta x}\to\infty, \tag{17}$$

因而，极小步子所取的速度其极限为无穷大．而且更重要的是

$$\frac{m}{N}=\frac{m}{N}\frac{\Delta x}{\Delta t}\frac{\Delta t}{\Delta x}=\frac{x}{t}\frac{\Delta t}{\Delta x}\to 0. \tag{18}$$

因此，我们所取的极限过程事实上明显地用到了下列假定：离开原点的位移 $m\Delta x\equiv x$ 与历经的总距离 $N\Delta x$ 相比是很小的．

根据前面的讨论，我们对于为什么必须把极限取得使 $(\Delta x)^2/\Delta t$ 保持有限的理由有了深入的了解．根据(18)式，m 与 N 相比必须很小的要求意味着 $\Delta x/\Delta t$ 必须趋向无穷大．这使得 $(\Delta x)^2/\Delta t$ 为有限这一要求显得不是那么不可思议了．但是，作出这要求的一个更好的理由是：位移在时刻 t 的变化近似于 $t(\Delta x)^2/\Delta t$ [练习 3(c)]，而在一种合理的极限之下这个变化必须是固定的．因为，如果均方根位移几乎为零或无穷大的话，则在固定位置 x 处几乎看不到任何东西．

反射与吸收势垒

为表明极限微分方程所具有的威力，让我考虑这样一种随机走动问题．和以前一样，在这个问题中粒子仍是从原点出发，但是在 $x=L+\frac{1}{2}\Delta x$，$L>0$ 处存在着一个**全反射势垒**．所谓存在有这样一个势垒的意思是：一个粒子若在时刻 t 到达 $x=L$ 处，然后向右移动，那么它将在时刻 $t+\Delta t$ 再次到达 $x=L$ 处另外一个在 $x=L-\Delta x$ 处的粒子由于向右也可到达位置 $x=L$．故有

$$\bar{w}(L,\ t+\Delta t)=\frac{1}{2}\bar{w}(L-\Delta x,\ t)+\frac{1}{2}\bar{w}(L,t), \tag{19}$$

按照(9)式那样引入概率分布函数 $u=\bar{w}/(2\Delta x)$，并且令 $\Delta x\to 0$，上述条件便成了

$$u_x(L,\ \tau)=0. \tag{20}$$

由于所有粒子都保持在 $x=L$ 的左边，所以除了(13)式必须由下

式

$$\int_{-\infty}^{L} u(x, t)dx = 1 \tag{13a}$$

来替代以外,所有其它条件都保持不变.

正如我们将在 3.4 节中所见到的那样，求微分方程 (11) 的一个满足 (13a)、(14) 和(20)式的解并不比在省略上述条件的情况下求解(11)式要困难得多. 结果是当在 $x = L$ 处存在有一个势垒的情形下,分布函数如下式所示:

$$u = u_R(x, t);\ u_R(x, t) \equiv u_0(x, t) + u_0(x - 2L, t), \tag{21}$$

先求出存在有反射势垒的随机走动问题的解，然后再通过 Stirling 近似式得到(21)式,这种做法也是可以的. 但是,至少对微分方程有所熟悉之后,从微分方程(11)的一个合适的解求得(21)式,这样做所需要的技巧或许更少些. 无论对于求解精确问题还是求解近似问题,一般都要用到反射这一思想.

现在让我们来考虑这样一种情况，即恰好在 $x = L$ 处的右边存在有一个全吸收势垒. 这意味着如果粒子从 $x = L$ 向右移动，那么它就消失不见了. 因此，粒子能够到达 $x = L$ 的唯一途径是首先到达 $x = L - \Delta x$，然后再向右移动. 所以在此情况下，粒子所遵循的差分方程当 $x \leqslant L - \Delta x$ 时是成立的,而且存在着另外的条件

$$\bar{w}(L, t + \Delta t) = \frac{1}{2}\bar{w}(L - \Delta x, t).$$

引入 $u \equiv \bar{w}/(2\Delta x)$，忽略 Δx 的高阶项,我们便得到下列边界条件

$$u(L, t) = 0. \tag{22}$$

(11),(13),(14)和(22)式的解是

$$u = u_A(x, t),\ u_A(x, t) = u_0(x, t) - u_0(x - 2L, t). \tag{23}$$

粒子从时刻零出发以后，在时刻 t 位于 x 和 $x + dx$ 之间的近似概率即由方程(23)给出. 还使我们感兴趣的是 $F(L, t)$ 这是一个粒子在时间间隔 $(t, t + \Delta t)$ 内于 $x = L$ 处被吸收的概率，该

粒子是在 $t=0$ 时于原点出发的. F 的另外一个解释是，它代表了在时间间隔 $(t, t+dt)$ 内首次通过 L 的概率. 正如我们将在 3.4 节中证明的那样，所要求的公式是异常简单的. 即

$$F(L, t) = -D\left(\frac{\partial u_A}{\partial x}\right)_{x=L}. \tag{24}$$

因此，首次通过时间是与存在有吸收势垒时的随机走动的概率分布函数的梯度成正比的.

凝固作用：首次穿越理论的应用.

我们将要简单讲述一种首次穿越时间的计算方法的应用，即考虑当一种电解质加入溶剂时，胶体微粒所呈现出的凝固作用. [我们的讨论将是非常简要的.更详细的讨论可参看 Chandrasekhar's 在 Wax (1954) 所编一书中的 pp. 60ff.] Smulchowski 提出的这种理论一开始认为由于电介质的作用在每一个质点周围出现了一个半径为 R 的影响球，而且，当粒子之间的接近距离小于 R 时，它们便会粘在一起. 假设单个粒子的影响球以原点为中心，而浓度为 ν 的其他粒子的海洋则围绕着它作随机运动. 把这个球看成是一个吸收势垒，而把随机海洋看成是与扩散率 D_1 相联系着的，则粒子到达 $\rho=R$(ρ 是极坐标的矢径)的比率是

$$4\pi D_1\left(\frac{\rho^2\partial w}{\partial \rho}\right)_{\rho=R}, \tag{25}$$

这儿我们已使用了球坐标下的梯度公式，在 (25) 式中，w 是下列式子的解

$$\begin{aligned} w &= D_1\Delta^2 w, \quad \rho > R. \\ w &\equiv \nu \text{ 在 } t=0, \quad \rho > R; \\ w &= 0 \text{ 在 } \rho = R, \quad x > 0. \end{aligned} \tag{26}$$

如果粒子(假设它最初是平稳的)本身正在作布朗运动，扩散率为 D_2，则可证明，(25)和(26)式中的 D_1 应该用 D_1+D_2 来代替. 知道了聚结率后，就能写下一组动力学方程，它们描述了由 i 和 j 重聚结成 k 重粒子 $(i+j=k)$ 的形成率，以及由于与其它粒子的

聚结．k重粒子的消失过程．作出了某些简化假设之后便可得出方程的解，其结果与实验相符．

练　　习

1. 验证：由(1.4)中定义的函数 $u(m、N)$ 满足(1)式和(4)式.

2. 验证(7)式

3. (a) 证明(1.4)式意含了(15)式.

(b) 试证：(15)式定义的函数 u_0 满足(11),(13)和(14)式.

(c) 试证：(1.15) 式可以被解释为：指明了时间间隔 t 内的平均平方位移为 $t(\Delta x)^2/(\Delta t)$.

(d) 倘若你或许熟悉了相似性方法[参见 II. 3.4 节]，试利用它导出(15)式.

4. 利用 (15) 式，算出一个点源所产生的扩散的头四阶矩．并与(1.14),(1.15)和练习 1.2 中所得结果进行比较.

5. (a) 考虑一个粒子在一个立方晶格中作无偏随机走动晶格各点间相距为 Δx. 令 Δt 为走一步所需的时间. 把课文中对一维问题的讨论进行推广，试证

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{27}$$

式中

$$D=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta t\to 0}}\frac{(\Delta x)^2}{6(\Delta t)} \tag{28}$$

而 u 则是被合适地定义来表示概率密度的.

(b) 对(28)式与相应的一维公式(8)式之间的差异，作出讨论.

(c) 你认为(28)式和 (8) 式的二维形式是什么？试作出推测.

6. 考虑一维随机走动，其中，粒子以相同的概率向左移动一步、向右移动一步或者停留在原处．试证，极限概率分布又满足扩散方程．为什么对于扩散率 D 的定义所作的改变是有道理的？

7. 考虑一粒子沿 x 轴的随机走动．假定粒子分别以概率 q 或 $1-q$ 向左或向右移动一段距离 Δ. 移动一步花费 τ 个时间单位.

(a) 写出关于 $w(m, N)$ 的差分方程，w 是粒子在时刻 $N\tau$ 位于距离原点 $m\Delta$ 处的概率（m 和 N 都是整数）.

(b) 当 $\Delta \to 0$，$\tau \to 0$，$\Delta^2/2\tau = D$，$m\Delta \to x$，$N\tau \to t$ 时，求极限微分方程.试证：如果存在所要寻找的那种类型的极限，那么 q 必定以某种方式逼近 $\frac{1}{2}$.

8. 考虑在均匀力场中沿 x 轴的随机走动. 在时间 τ 内，粒子以概率 $\frac{1}{2}-\beta\Delta$ 或者 $\frac{1}{2}+\beta\Delta$ 向右或者向左移动一段距离 Δ（β 为一常数）. 写出粒子在时刻 $N\tau$ 位于离原点距离 $m\Delta$ 处的概率的一个差分方程，m 和 N 都是整数. 求出当 $\Delta \to 0$，$\tau \to 0$，$\Delta^2/2\tau = D$，$m\Delta \to x$，$N\tau \to t$ 时的极限微分方程.

9. 设一个受到弹性约束的粒子，位于 $K\Delta$ 处，$-R \leqslant K \leqslant R$（$R$ 是一个固定的整数），以概率 $\frac{1}{2}(1-KR^{-1})$ 或 $\frac{1}{2}(1+KR^{-1})$ 向右或向左移动. 每一步的持续时间为 τ. 请查明"弹性约束"确是一种合理的描述. 若 $\Delta \to 0$，$\tau \to 0$，$R \to \infty$，$\Delta^2/2\tau = D$，$(R\tau)^{-1} \to \gamma$ 等等，对于合适的概率密度 u，试导出极限方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma \frac{\partial(xu)}{\partial x} + D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right). \tag{29}$$

10. 老老实实地推导不容易，但却可以直接验证

$$u(x, t) = (1-e^{-2\gamma t})^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{-\gamma x^2}{2D[1-\exp(-2\gamma t)]}\right] \tag{30}$$

满足(29)式和附加条件 $u \geqslant 0$；$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)dx = 1$；

$$\lim_{t\to 0} u(x, t) = 0, \ x \neq 0.$$

(a) 验证这一点.

(b) 把此结果与**自由粒子**的结果作一比较. 特别当 $\gamma \to 0$ 时，证明(30)式趋近于自由粒子的结果.

(c) 当 x 值固定，$t \to \infty$ 时，对这两个结果的行为作一讨论.

11. (a) 假设一粒子以无偏随机方式在平面内移动，每 τ 秒移动一

步，长度为 Δ，试证方程.

$$\psi(x, y, t+\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(x+\Delta\cos\theta, y+\Delta\sin\theta, t)d\theta. \tag{31}$$

在证明过程中，要给出 ψ 的定义. 开始时可以解释一下为什么粒子以概率 $d\theta/2\pi$ 在 $\theta=\theta_0$ 和 $\theta=\theta_0+d\theta$ 方向之间的移动.

(b) 引进一个概率密度函数. 通过对(31)式取近似证明该函数满足扩散方程.

3.4 有关概率和偏微分方程之间关系的进一步考虑

令人惊奇的是，在极限情况下布朗运动过程竟然遵循一个形式相当简单的偏微分方程. 更奇怪的是这个方程同样适用于许多其他物理过程，如热传导或一种气体在另一种气体中的扩散；这都是些十分不同的物理过程，至少表面上如此. 很多自然过程能够用类似的甚至完全同样的方程来描述，这一事实正是应用数学作为一门科学学科而存在的要素. 因为，假如没有这样一种自然的统一趋势存在，那么各种现象的数学研究也就支离破碎，没有希望了.

在这一节，我们继续研究随机走动与偏微分方程之间的关系. 一开头，我们回顾一下根据宏观或连续介质观点来推导扩散方程的过程. 我们强调. 不同的微观模型能够给出这一同样的宏观方程. 为何许多颇为不同现象的理论能够被纳入为数不多的几个微分方程的研究，其原因之一便是抹平了那些非基本的微观细节.

我们将要研究求解扩散方程的各种技巧. 概率与微分方程之间的相互影响也将在这一过程中得到说明. 例如，概率问题引出了源解 (source solution) 问题，它是求解扩散方程一般初值问题的关键. 换言之，扩散方程的某些特解给出了概率问题的答案.

最后，我们要考察下列两方面之间的一系列值得注意的关系，一方面是各种各样的概率问题之间的关系，另一方面是拉普拉斯

方程和非齐次拉普拉斯方程(泊松方程)之间的关系.

关于扩散方程及其与随机走动之间关系的进一步讨论

我们将更仔细地考察极限偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right). \tag{1}$$

我们已经在第一章中碰到过这个方程. 让我们来回顾一下根据宏观观点导出该方程的要点.

令 $u(x, t)$ 为每单位长度内某个量的数目. 令 $J(x, t)$ 为这个量的通量, 即该量在时刻 t 从 x 的左边移到 x 的右边的净速率[1]. 如果该量守恒,则它在一个区间内的累积率必定等于它通过界面穿入该区间内的率. 因此,对于任意的 Δx, 有

$$\frac{d}{dt}\int_x^{x+\Delta x} u(x, t)dx = J(x, t) - J(x+\Delta x, t)$$

取 $\Delta x \to 0$ 时的极限,得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x}. \tag{2}$$

我们假定 u 的比较高的浓度有扩散的趋势,即,存在着一个从高浓度向低浓度的流动. 为了描述由于 u 的差异而引起的流动过程, 人们能够想到的最简单合理的假设是设 J 的大小正比于 $\frac{\partial u}{\partial x}$. 令比例常数为$-D$,从而有

$$J = -D\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{3}$$

其中 $D > 0$, (3) 式正确地表明了如果 u 随 x 增加 $\left(\frac{\partial u}{\partial x} > 0\right)$, 则 u 向左流动;如果 u 随 x 减少, u 向右流动.

合并(2)式和(3)式,得到(1)式(假定D为常数). 这个扩散方

---

1) 把 u 看成每单位体积内某个量的数目往往是有用的,但这个量的分布仅仅与单个坐标 x 有关. 这样, J 就是通量密度,即垂直于 x 坐标轴的单位面积上的通量。

程就是我们在对随机运动作极限描述时得到的那个方程．正如在本节第一段中提及的那样，(1)式极好地描述了许多物理现象．举例来说，如果 u 指的是浸于溶剂中的溶质粒子的浓度［在此情形下，(3)式称为 **Fick 定律**］，则(1)式描述了溶质的扩散．如果 u 指的是温度［这时，(3)式称为**牛顿-傅里叶冷却定律**］，则(1)式描述了热的扩散．而在第一章中我们已经提到了(1)式在能动的微生物的随机运动中的应用．

当灰尘粒子在空气中移动时受到极其大量的微小推动，这是灰尘粒子与其周围的空气分子碰撞的结果．在水中的颜料粒子受到水分子的类似的推动．当讲到灰尘粒子或颜料粒子的扩散时，我们知道，扩散时间与两次推动之间的典型时间间隔相比是很长的；扩散的距离与两次推动之间粒子移动的典型距离大小相比也是很长的．因此，这一点和我们以前的发现是一致的，即从一个随机走动中可得到一扩散方程，其中步长 Δx 和步间隔 Δt 被看作是小的．

很难清楚地觉察到热扩散．分子碰撞无疑会引起局部动能的某种随机变化．但是还不能明显地说热的"走动"方式是与尘埃粒子是一样的．就此而论，考虑练习 3.6 是有好处的．练习 3.6 要求读者证明：从粒子以等概率向左移动、向右移动或停留在原处的这样一个随机走动中可得到扩散方程 (1)．这就给出了关于一种一般行为的一个示例：*许多不同的微观模型得到了相同的极限或宏观方程．*我们*抹平了那些微观细节．*因此，通过忽略了差异(例如在热的分子运动细节与溶质扩散之间的差异）而获得了理论上的统一，这样做从许多角度看都是无碍大局的．

我们要强调，由于所涉及的两个标度之间的巨大差异，布朗运动的随机走动模型是适宜的．为了把概念阐述清楚，试设想一个人通过某个放大镜 M_1 正在考察一个作随机运动的尘埃粒子，通过 M_1 仅能分辨充分大的那些运动，因此，过于频繁地观察粒子是没有意义的．记住这一点，就可以认为他会发现，通过每隔 t_1 秒确定一下粒子位置的方法来绘制出粒子的途径，这是切合实际的．他

可以利用一个效率更高的放大镜 M_2，现在，他能每隔 $t_2(t_2 < t_1)$ 秒时间来确定粒子的位置. 而一个效率还要高的透镜 M_3 会揭示出更多的细节，用它可以定出每隔 $t_3(t_3 < t_2)$ 秒粒子的位置.

所有这些"宏观"时标 t_i 与分子-粒子间碰撞的典型时间 τ 相比都是很大的，因此我们便能选择一个中等的时间间隔 Δt，以使 $\tau \ll \Delta t \ll t_i, i = 1, 2, \cdots$. 在 Δt 的基础上，我们就能构造出一个关于尘埃粒子运动的随机走动模型，其中，所谓"一步"被定义为经过时间间隔 Δt 以后的典型位移. 随机走动模型的两个特征是：相继的步子被看成是独立无关的，以及可以借助于扩散极限来分析进程. 由于时间间隔为 Δt 秒的两个事件之间不存在有效的相关性，所以，把相继的步子作为独立的来处理，这是不成问题的. 与此相反，相继的推动的效果就不一定是独立的. 另外，由于要走很多步才能得出一个典型位移，所以取扩散极限也是恰当的.

再重申一遍，我们可以使用扩散极限（或等价地采用 Stirling 近似），这是因为我们可以定义一个"步时间" Δt，它与宏观时标 t_i 相比是很小的. 而且我们可以采用各步之间独立无关的假定，这是因为 Δt 与单个分子推动之间的典型时间 τ 相比是很大的.

但是，最后总是有一个终极. 当我们选用的放大镜 M_i 的放大率逐步增高时，所增加的细节再也没有意义了[1]. 粒子径迹将展现得愈来愈长、愈来愈畸形，因此速度也愈来愈大. 这就是我们之所以能够采用无穷大粒子速度的原因. 这是在扩散极限之下布朗模型的形式上的伴生物.

基本解的迭加：镜像法

被解释为描述热流动的方程（1），将在第四、第五两章中作更详细的讨论. 在这里，我们想通过考察（3.15）式中给出的解 $u_0(x, t)$ 来说明概率和微分方程之间的相互关系，为了参考方便，

1）如果"放大镜"的倍率足够大，可以分解单个推动的效应，那么再采用倍率更高的放大镜就不能进一步显示出细节了. 但是到了这种地步就不再存在宏观与分子尺度之间的区别了，而随机走动模型的整个基础也不再存在了.

重新写出如下：

$$u_0(x, t) = (4\pi Dt)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{-x^2}{4Dt}\right). \tag{4}$$

记住：这个解满足"δ 函数"的初始条件(3.14)式，而且 u_0 在整个 x 轴上的积分为 1. 因此，我们就能将 $u_0(x, t)$ 解释为**单位源解**. 这就是说，如果我们假定一开始有一单位质量集中于原点上，则该解给出了在时刻 t 扩散到 x 与 $x + dx$ 之间这一区域中的质量数目. 如果我们把单位质量想象成是由很大数目 M 个微粒所组成的，则这个解释与随机走动解释是完全一致的. 从而，单个粒子位于 x 与 $x + dx$ 之间的概率便是 M 个粒子中位于这一区域中的粒子的百分比.

函数 u_0 亦称为(1)式的**基础解**或**基本解**，因为把那些象 u_0 那样的解适当地进行组合便可以得到更普遍的解. 要了解这一点，我们首先注意当 x 和 t 改变为 $x - \xi$ 和 $t - \tau$ 时，扩散方程是不变的. 通过直接代换（练习 1）可以容易地验证这一**平移不变性**. 这从物理上看是明显的，因为不论把空间度量的原点固定在什么地方，也不论从什么时间开始计时，扩散过程都是相同的.

由于平移不变性，所以 $u_0(x - \xi, t - \tau)$ 也是一个解. 这个新的解代表了于时刻 τ 在点 ξ 处引进的源在时刻 $t(t > \tau)$ 对于 x 处所产生的效应.

其次，考虑到扩散方程(1)是线性的，因而满足迭加原理，如果 $u_1(x, t)$ 和 $u_2(x, t)$ 是(1)式的两个解，则

$$u(x, t) = c_1u_1(x, t) + c_2u_2(x, t), \tag{5}$$

也是它的一个解. 对于任意有限个解的线性迭加，情况也是如此. 作为一个例子，对于(1)式，我们可以考虑解

$$u(x, t) = c_1u_0(x - \xi_1, t) + c_2u_0(x - \xi_2, t). \tag{6}$$

这是两个源的效应的迭加，一个源位于 ξ_1，而另一个位于 ξ_2. 两个源的强度（即集中在 ξ_1 和 ξ_2 的质量大小）分别为 c_1 和 c_2.

在前节的末尾我们寻找到了(1)式的解，它的 x 导数在 $x = L$ 处等于零. 现在，可以通过迭加使用**镜像法**来解这个问题. 因为，

如果有一单位源位于 $x = 0$ 处，而另一具有同等强度的象源位于 $x = 2L$ 处，则最后的质量分布对于 $x = L$ 是对称的[1]。 一个对于 $x = L$ 对称的函数必定在那里有零导数，而这就是所要求的边界条件． 因此我们获得了所要求的方程 (3.21) 的解 $u_0(x, t) + u_0(x - 2L, t)$.

用镜像法也可以容易地求得解 (3.23) 式，其中要求 u 在 $x = L$ 处为零．这一证明留给读者去做．但我们希望讲一下，如何才能求得首次穿越时间 $F(L, t)$ 的结果(3.24)式．

作为一种流量的首次穿越时间

定义函数 $F(L, t)$ 以使 $F(L, t)dt$ 为一个于时刻零从原点出发的粒子在时间间隔 $(t, t + dt)$ 内在 $x = L$ 处被吸收的概率． F 的另一种解释可以根据下面的情况来给出，即考虑到初始时集中于原点的单位质量，当在 $x = L$ 处存在有一个质量收点 (Sink) 时的扩散情况． 在此情形，F 给出了质量被 $x = L$ 处的收点所吸收而在那儿从一个系统中失散的速率．换言之，F 是质量在 $x = L$ 处沿 x 增加方向的流量:

$$F(L, t) = J(L, t). \tag{7}$$

但是我们知道，流量是与相应分布的梯度成正比的，在现在的情形下，这种分布就是方程(3.23)的吸收势垒函数 $u_A(x, t)$． 我们立刻得到了所希望的方程(3.24)式的结果，

$$F(L, t) = -D\left(\frac{\partial u_A}{\partial x}\right)_{x=L}.$$

根据纯粹概率的考虑来求得这个结果要求更多的技巧． [参见在 Wax (1954) 一书中的 Chandrasekhar 的文章．]

扩散问题中的广义初值问题

为进一步了解源解的用途，让我们考虑溶质扩散的广义一维

---

1) 注意，对称性隐含了这样一个意思，整个质量恰好有一半始终保持在 $x = L$ 处的左边． 因此在 $x \leqslant L$ 范围内的总"概率质量"，如(3.13a) 式所要求的那样等于 1.

问题．想象一个无穷区域，最初溶质以某种方式分布于该区域中：

$$u(x, t)=g(x) \text{ 在 } t=0, \ -\infty<x<\infty. \tag{8}$$

溶质自身是如何进行分布的呢？我们所希望求出的是扩散方程(1)满足初始条件(8)的解．通过考虑数目众多的位于点 $\xi_i=i\Delta\xi$, $i=0, \pm 1, \cdots, \pm M$ 处，强度为 $f(\xi_i)\Delta\xi$ 的源，我们能够得到相当普遍的质量分布．现在，$u_0(x-\xi_i, t)$ 给出了在时间 t 内，从一个单位初始浓度中扩散到 $x-\xi_i$ 个单位距离远的质量．因此，从所有源中扩散到 x 处的总质量为

$$\sum_{i=-M}^{M} u_0(x-\xi_i, t) f(\xi_i)\Delta\xi. \tag{9}$$

当 $M\to\infty$, $\Delta\xi\to 0$ 时，上式的极限为[1]

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x-\xi) f(\xi) d\xi. \tag{10}$$

大体说来，(10)式中的 $f(\xi)d\xi$ 是位于 $x=\xi$ 处的源的强度．于是，对于初始条件(8)，我们应该取 $g=f$．从而，我们推测初值问题的解为

$$u(x, t)=\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x-\xi) g(\xi) d\xi. \tag{11}$$

公式(9)也可以从概率观点得到．我们知道 $u_0(x-\xi_i, t)$ 给出了在粒子出发点右边 $x-\xi_i$ 个单位处发现粒子的概率(在时刻 t)，这是粒子走了许多随机步子以后的概率．如果有 $f(\xi_i)\Delta\xi$ 个粒子从 ξ_i 处出发，则可望其中的 $u_0(x-\xi_i, t)f(\xi_i)\Delta\xi$ 个将位于点 x 处．因此，(9)式是把在 $\xi_i=i\Delta\xi$ 各处的各种初始浓度对于粒子扩散的个别贡献迭加了起来．我们又得了下列推测：(11)式乃是我们所要寻求的解．

为验证(11)式所定义的函数确实解决了我们的问题，我们应该首先将其代入方程(1)．如果 $g(\xi)$ 在一个有限区间外面为零，则这样做并不存在任何困难，因为积分号之下的微分是可行的．即

---

1) 各个别源的强度在极限情况下趋近于零．不然无穷多个源会导致质量数为无穷大．事实上，我们已经调整了源强度和源数目之间的关系，以便在源数为无穷大时仍使质量总数保持有限．

使对于无穷区间，也不难证明形式微分的运算是合理的．因此，仅仅需要证明的是在形式微分运算以后得到的无穷积分是收敛的．

更为紧迫的一个问题是验证(11)式满足初始条件

$$\lim_{t\downarrow 0}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x-\xi,t)g(\xi)d\xi = g(x). \tag{12}$$

为此，我们引入变量 η

$$\eta^2 = \frac{(x-\xi)^2}{4Dt}, \tag{13}$$

这是由于受到了 $u_0(x-\xi,t)$ 中的指数函数的启发．[比较 (4) 式]．于是我们的解(11)便为

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} g(x+\eta\sqrt{4Dt})d\eta. \tag{14}$$

如果我们现在取形式极限 $t\to 0$，利用(2.34)式便可容易地得到所希望的答案．

在讲求实用的应用数学中，前段的讨论常被认为是充分验证了初始条件的被满足． 因为形式极限的合理性似乎是直接了当的． 所要做的也许只是把 (14) 式中的积分区间分成三个部分 $(-\infty, -A)$, $(-A, A)$, $(A, +\infty)$，而在取双重极限过程 $t\to 0$, $A\to\infty$ 中则需小心行事．(或许读者愿意完成这一证明．)

我们已经看到，我们是怎样利用迭加原理得到了关于扩散方程的多种多样的有用解的．在下面两章中将对迭加法进行更充分的讨论．这里，我们继续来考虑微分方程近似法对于概率问题的应用．

把一根杆扭曲是如何给出了关于 DNA 分子的信息的

关于各门学科之间以及数学各个分支之间的相互联系讲得异常丰富的一篇文章便是 W. Smith 与 G. S. Watson 所写的“三角形扩散”一文．[J. Appl. Prob. **4**. 479—488(1967)] 我们现在来对这篇论文的内容作一简要介绍．

在溶液中，有时存在有分股的长螺旋 DNA 分子． 这样的分子有两种类型，带有辅助化学结构． 热扰动把这些分子聚集

在一起．大概，仅当附加段不知不觉地并列后，两个分离的分子才成功地合成为一个重螺旋线．否则，这些分子最终是要分开的．我们希望计算碰撞（称"成功"）的频率，在这种碰撞中发生了合成过程．

我们将问题理想化为考虑具有单位长度的两根刚杆．设 (x, y) 为随机地选择的一个相交点，$0 \leqslant x \leqslant 1$，$0 \leqslant y \leqslant 1$．假设溶解模型的热运动导致了点 (x, y) 的随机走动．套准 $(x=y)$ 或者滑过 [(x, y) 跑到了单位正方形之外]，这两种可能性何者先发生？根据对称性，这一问题的另一形式如下所述：如果一个点随机地落在一等腰直角三角形上，然后作无偏随机走动，那么该点沿着斜边（成功的碰撞）而不是沿着直角边（不成功碰撞）跑出三角形的概率是什么？

更一般地，让我们考虑下面的问题．有一平面域 D，其边界 Γ 由两部分 Γ_1 和 Γ_2 组成．令一粒子从 D 域内的一点 (x, y) 出发作无偏随机走动．我们要确定一个粒子于 (x, y) 处出发首先通过 Γ_1 而穿越边界的概率 $P(x, y)$[1]．

我们开始来解决这个问题，想象把一间距为 Δ 的正方格叠置在 D 上．假设粒子在这格子上作随机走动（图 3.2）．如果粒子从

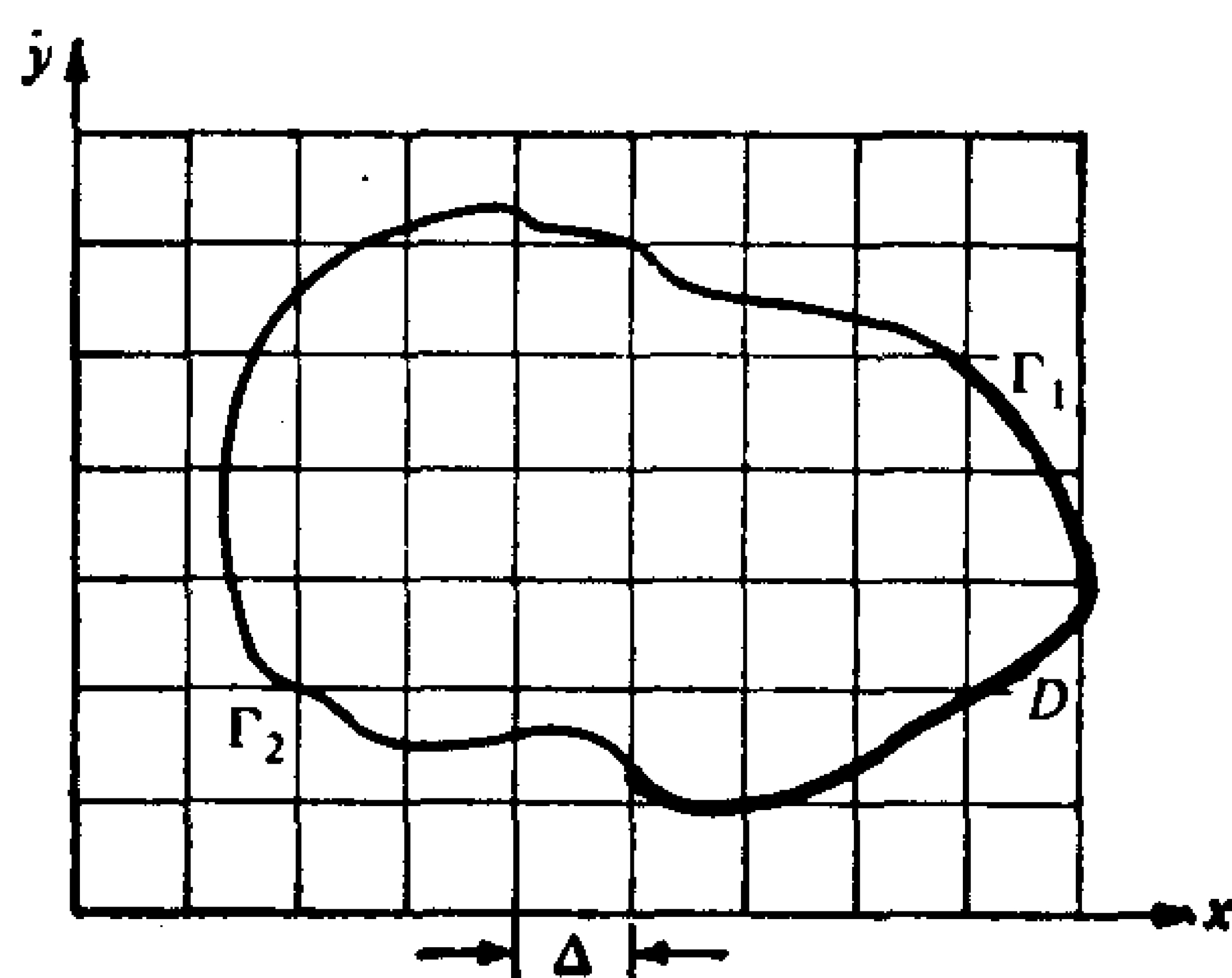


图 3.2 关于随机走动问题的图．希望求得从内部出发的粒子首次在粗黑线段 Γ_1 上穿越边界的概率．

1）按照上面所引入的概念，这问题可被看成是要求出粒子沿 Γ_1 而不是沿 Γ_2 最终被吸收的概率．

(x, y)出发，最后沿 Γ_1 穿越边界，则它必定移动到与 (x, y) 相邻的四点中的一点，然后再穿越边界的．因此

$$P(x, y) = \frac{1}{4}[P(x-\Delta, y) + P(x+\Delta, y) + P(x, y-\Delta) + P(x, y+\Delta)]. \quad (15)$$

如同已经成为惯例那样，我们假定步长Δ是小的，而且只保留所遵循的微分方程中的最低阶项．经过简短的运算（练习 7)，我们从(15)式得到了拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0. \quad (16)$$

粒子出发点离 Γ_1（或 Γ_2）越近，粒子在 Γ_1 首次穿越边界的可能性越大(或小)．这导致了边界条件

$$\lim_{(x,y)\to\Gamma_1} P(x, y) = 1, \lim_{(x,y)\to\Gamma_2} P(x, y) = 0. \quad (17a,b)$$

假定粒子在D内遵照概率分布函数 $f(x, y)$ 作初始分布．即(粗略说来)，令 $f(x, y)dxdy$ 为粒子最初位于x和 $x+dx$、y和 $y+dy$ 之间的概率．则粒子沿 Γ_1 跑出D的概率 $\bar{P}$ 由下列公式给出

$$\bar{P} = \iint_D P(x, y) f(x, y) dxdy. \quad (18)$$

我们已经把 DNA 碰撞问题化为求(16)式在边界条件(17)式下的解，然后再把所得的 $P(x, y)$ 代入(18)式中的积分这样一个问题．把问题作一转化将使它的求解变得更为容易——事实上，非连续边界条件(17)式使问题的求解十分棘手．

转化这一问题的基础是对称格林公式

$$\iint_D (Q\nabla^2 P - P\nabla^2 Q) d\sigma = \oint_\Gamma \left(Q\frac{\partial P}{\partial n} - P\frac{\partial Q}{\partial n}\right) ds, \quad (19)$$

其中 $\frac{\partial}{\partial n}$ 指的是外法向导数．在(19)式中，我们取P为上面所定义的函数，而Q则要满足

$$\nabla^2 Q = f, \text{ 在 } \Gamma \text{ 上 } Q = 0. \quad (20)$$

由此，简短的运算[练习 7(b)]表明

$$\bar{P}=\int_{\Gamma_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial n}\right)ds. \tag{21}$$

如果能确定 Q，就能由 (21) 式解决我们的问题．但是，求 Q 的问题不仅仅相对于求 P 的问题而言比较简单，而且它是在很多物理场合中出现的一个问题．例如，它出现在粘性液体在横截面为 D 的管子中流动(第 II 部分的练习 3.2.14)以及棱形截面杆的扭曲 (5.3 节) 等问题中．

利用 f 为常数时所求得的(20)式的解，Smith 和 Watson 对于粒子初始时随机落在一等腰直角三角形上的情况 (有生物学兴趣的情形)计算得 $P=0.41062$．其细节与我们无关．我们希望强调的是，位势理论的经典思想和弹性理论中的经典解是如何启发了生物化学中关于概率运算这一似乎不太相干的问题的思考的．

布朗运动的递归性质

现在我们就能求解某些初等的微分方程用以解答概率理论中的一个有兴趣的问题．这一问题是，如果一粒子从一给定点 x 出发作随机走动，它最终到达另一给定点 y 的概率是多少？这一问题的答案与粒子在其中走动的那个空间的维数有关．我们来研究一维情形，但是我们的讨论可以容易地推广到更高维的情形．

假定粒子从集 D 内的一点 x 出发，集 D 可规定如下

$$D: \varepsilon<|x|<R.$$

根据导得(16)、(17)式时所进行的论证，但把它改用到一维情况之下，便知从 x 点出发的粒子，在其与边界 $|x|=R$ 接触之前先触到边界 $|x|=\varepsilon$ 的概率是下列问题的解 $P(x)$：

$$\frac{d^2P}{dx^2}=0,\quad x \text{ 在 } D \text{ 内}; \tag{22a}$$

$$P=1 \text{ 当 } |x|=\varepsilon,\ P=0 \text{ 当 } |x|=R. \tag{22b, c}$$

我们来寻找满足边界条件的一个线性函数．其结果是

$$P(x)=\frac{R-|x|}{R-\varepsilon}. \tag{23}$$

当 $R \to \infty$ (x 和 ε 固定)时，$P \to 1$. 这意味着在粒子"逃逸"出去以前，事实上一定会与区间 $|x| = \varepsilon$ 相接触. 由于出发点是任选的，所以我们得出结论：粒子事实上肯定要任意地接近直线上任一给定的点. 而且重复这一论证，我们便得结论： 粒子事实上肯定要任意多次地这样做. 我们就说，一维随机走动具有**递归性质**. 借助于我们所用的处理方法，能够证明（练习 9）对于二维情形也有递归性质，但三维情形不具有递归性质.

在较低维情况下扩散所具有的更为"定向"的特性是一种具有重要应用的现象. 举一例子，G. Adam 和 M. Delbruck[1] 采用我们已讨论过的路线给出了定量结果，皆在"提出并发展下列一种思想，即生物体控制了某些定时和效率问题，通过把三维空间扩散约化为二维表面扩散，使得其中只涉及了为数较少的分子以及它们的扩散".

递归性质似乎威胁着理论家们，然而也帮助了他们. 随机走动过程表现出一个准周期特征，这似乎与它可以用作一个模型来描述象扩散这样一个不可逆过程是全然不相称的. 而事实上，庞加莱证明了存在着一个更强的递归型的性质. 一些相互作用粒子的一个集合，它们组成了一个动力学系统，将会以概率 1 任意接近于返回到它的初始状态. （少量的初始状态除外——这些例外的状态构成了一个勒贝格测度为零的集合）. Zermelo 问道，如何才能使动力学系统的递归性质与连续介质理论的不可逆性调和起来呢？

"Zermelo 佯谬"的解决是基于这样一个事实： 递归的平均时间是非常长的，以致可以看作是不可逆的情形. 例如，假如把一匙冰淇淋放入一杯咖啡中去，冰淇淋粒子最终的确可以回复匙子的形状，不过，完成这一过程所需的时间要比宇宙年龄大得多. 而扩散的连续模型指出，在一段时间以后，冰淇淋将多少均匀地遍布于咖啡之中. 所以两者之间并不存在真正的矛盾. [欲知更详细的

---

1) 在 A. Rich 和 N. Davidson (eds.) 的 *Structural Chemistry and Molecular Biology* (San Francisco: Freeman, 1968) 一书中.

讨论，请参看 Wax (1954) 一书中 Kac 的文章. ∎

前段的讨论使我们又回到了关于随机走动和扩散之间的联系这一问题的原始推导. 两种把随机走动化为类扩散结果的方法——无论是通过 Stirling 公式还是通过使差分方程过渡到极限微分方程——这两种方法都给出了近似结果. 这些近似对于粒子稀少的情况是不准确的，这时粒子几乎总是向右走或向左走. 对于这些罕见事件的效应作出错误估计不会给总的结果带来什么显而易见的影响，这就是扩散模型之所以如此成功的原因. 但作为负责的思想家，我们一定不能无视我们模型的局限性.

练　　习

1. 若用 $(x-\xi, y-\eta)$ 来代替变量 (x, y)，(其中 ξ 和 η 是常数)则(1)式保持不变. 试给出该事实的一个形式上的验证.

2. (a) 试证(3.21)式的函数 u_R 具有课文中所述的那些性质.

(b) 用镜像法推导方程(3.23). 直接验证，u_A 具有所希望的性质.

3. 请给出一个形式证明: 假若适当地限制了 g，(11) 式给出了(1)式的一个解.

4. 完成证明: 当 $t\to 0$ 时对(14)式取极限，确实就会给出关于在(11)式中定义的函数 u 满足初始条件(12)式的一个证明. 假定 $g(x)$ 是 x 的连续函数，对于 x 的所有值都是有界的 (包括 $|x|\to\infty$).

5. 试证: 如果 $g(x)$ 在点 x_0 处具有不连续性，则(14)式中的积分的极限值为

$$\frac{1}{2}[g(x_0-0)+g(x_0+0)],$$

即为从左边和右边逼近时所得值的平均.

6. 若初始时溶质密度 $u(x, t)$ 为

$$u=1 \quad 当\ 0\leqslant x\leqslant 1,$$
$$u=0 \quad 当\ x<0\ 和\ x>1,$$

利用(11)式写出 $u(x, t)$.

以误差函数

$$\operatorname{erf}\xi \equiv 2\pi^{-\frac{1}{2}}\int_0^\xi \exp(-s^2)ds,$$

把答案表示出来. 然后,直接验证 $u(x, t)$ 满足方程和边界条件.

7. (a) 把(15)式展成 Δ 的幂次并求出(16)式. [在数值分析中,通常把差分方程(15)用作(16)式的近似式. 这里,我们倒过来进行,即用微分方程(16)作为(15)式的近似].

(b) 验证(21)式.

8. 根据散度定理 $\iint_D \nabla\cdot\mathbf{v}d\sigma=\oint_\Gamma \mathbf{n}\cdot\mathbf{v}ds$. 来推导出(19)式. 考虑两个特殊情况 $\mathbf{v}=Q\nabla P$ 和 $\mathbf{v}=P\nabla Q$ 作为开始.

9. ∔(a) 要得出(22)式的二维相似式, 要求找到一个极坐标 r 的函数 P, 它满足

$$\frac{d^2P}{dr^2}+r^{-1}\frac{dP}{dr}=0, \varepsilon<r<R,$$

$$P(\varepsilon)=1,\ P(R)=0.$$

求出这个函数, 并用它来证明在二维情形下仍然存在有递归性质.

∔(b) 通过找到一个合适的球坐标 ρ 的函数 P, 把上述运算推广到三维情形. 试证, ε/ρ 是从距离原点 ρ 处出发的一个粒子将永远趋近于原点的 ε 邻域内的概率. 并推断递归性质在三维情形下不再存在.

10. (这一练习提供了另一种关于随机走动的扩散极限的方法.)假设大量粒子在作一维随机走动, 其步长为 Δx, 每步的时间间隔为 Δt. 令 $N(x, t)$ = 在时刻 t、位于 x 处的粒子数;

$v(x, t)$=在时间间隔 $(t, t+\Delta t)$ 内从 x 移到 $x+\Delta x$ 的粒子净数.

进而定义 ρ 和 J 为

$$\rho(x, t)=\frac{N(x, t)}{\Delta x}, J(x, t)=\frac{\nu(x, t)}{\Delta t}.$$

(a) ρ 和 ν 的解释是什么?

(b) 试证：对于首次近似,有 $\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\partial J/\partial x$.

(c) 论证下列假设在无偏随机走动中是正确的:

$$\nu(x, t)=\frac{1}{2}N(x, t)-\frac{1}{2}N(x+\Delta x, t).$$

(d) 取适当的极限,推导出 J 和 ρ 之间的关系，并且由此证明 ρ 满足扩散方程.

11. 对于有偏随机走动的情况重做练习 10. 其中，粒子向右移动的概率为 p、向左移动的概率为 q, $q\neq p$, $p+q=1$.（与练习 3.7 相比较.）

12. 大家知道,某种阿米巴菌的运动会受到某种化学吸引物的密度 c 的影响. 我们把阿米巴理想化为这样一种生物体,它以平均频率 $f=f(c)$ 向右或者向左移动一步Δ. 假设该生物体在两端各有一个化学接收器,两接受器之间的距离为 2Δ. 最后,令$a(x)$ 为 x 周围的阿米巴菌的密度.（它还与时间 t 有关,但在我们的记号中没有指明这一点).

(a) 通量 J 由下式给出

$$J=\int_{x-\Delta}^{x} f\left[c\left(s+\frac{1}{2}\alpha\Delta\right)\right]a(s)ds-\int_{x}^{x+\Delta} f\left[c\left(s-\frac{1}{2}\alpha\Delta\right)\right]a(s)ds$$

这一假定含有什么意义?

(b) 根据上述方程试证：精确到Δ的最低阶,有

$$J=-\mu\frac{da}{dx}+\chi a\frac{dc}{dx},$$

其中 $\mu(c)=f(c)\Delta^2$, $\chi(c)=(\alpha-1)\mu'(c)$.

(c) 试解释为什么 χ 随 $(\alpha-1)$ 而改变符号.

(d) 讨论 $\alpha=0$ 的情况. [在第一章中给出了这儿模拟的“趋

药性"现象的某些思想．至于沿着刚才所概述过的思路所取得的进一步进展，可参看 E. F. Keller 和 L. A. Segel 的文章，发表在 J. Theoret. Biol. 30, 225 (1971).]

13. 怎样将随机走动概念用于聚合物分子的定量讨论？(这些分子是由相同亚分子的一条长链所组成)．

附录 3.1 符号 O 和 o

定义 1 如果存在一个正常数 M 使得只要 x 充分接近 x_0 便有 $|\phi(x)| \leqslant M|\psi(x)|$，则我们说，当 $x \to x_0$ 时，$\phi(x) = O[\psi(x)]$．

注意: "$\phi = O(\psi)$"读为"ϕ 是 ψ 的大 O"．最常见的情况是 x_0 要么是零，要么是无穷大．如果根据上下文 x_0 是清楚的，就常常不去提它了．有时还用"ϕ 与 ψ 同阶"来代替 $\phi = O(\psi)$．如果 $\psi(x_0) \neq 0$，那么当且仅当 ϕ/ψ 在 x_0 附近一个充分小的邻域内是有界时，才有 $\phi = O(\psi)$．

例 (i) 当 $x \to x_0$ 时，$\phi(x) = O(1)$ 指的是 ϕ 在 x_0 的邻近有界．(ii) 当 $x \to 0$ 时，$x^2 \sin x = O(x^3)$．(iii) 当 $x \to \infty$ 时，$x^2 \tanh x = O(x^2)$．(iv) $1/(1-2x)$ 的 Maclaurin 展开式中的 $O(x^5)$ 项是 $(2x)^5$ (理解为当 $x \to 0$ 时)．

定义 1 已被用各种方式加以推广．这样，对于向量而言，所谓当 $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ 时 $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = O[\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})]$，这就要求：当 $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ 很小时，有 $|\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})| \leqslant M|\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})|$．另外，对于区域 R 中的 x，所谓 $\phi(x) = O[\psi(x)]$ 指的是存在有一个正的常数使得对于 R 中所有 x，都有 $|\phi(x)| \leqslant M|\psi(x)|$．还有，所谓当 $x \to x_0$ 时，$f(x, \varepsilon) = O[g(x, \varepsilon)]$ 指的是存在有一个正量 M，它可以与 ε 有关而与 x 无关，使得只要 x 充分接近于 x_0 就有 $|f(x, \varepsilon)| \leqslant M(\varepsilon)|g(x, \varepsilon)|$．如果可以找到一个与 ε 无关的 M，则我们说当 $x \to x_0$ 时，对 ε 一致地 $f = O(g)$．

定义 2 只要 x 充分接近 x_0，对于每一个正的常数 M 我们都

有 $|\phi(x)| \leqslant M|\psi(x)|$，则我们说当 $x \to x_0$ 时，有 $\phi(x) = o[\psi(x)]$. 用话来说就是"ϕ是ψ的小o".

特别地，当 $x_0 = \infty$ 时，常常改变上述定义，以使当 $x = x_0$ 时，对于 ϕ 和 ψ 不再施加要求. 于是当且仅当 $\lim_{x\to x_0}\phi/\psi = 0$ 时才有 $\phi = o(\psi)$.

例 (i) 当 $x \to 0$ 时，$x^2 \ln x = o(x)$. (ii) 当 $x \to \infty$ 时，$e^{-x} = o(1)$.

练　　习

1. 解释并证明下列各式（Erdelyi, 1956, p.8），

(a) $O[O(\phi)] = O(\phi)$.

(b) $O(\phi)O(\psi) = O(\phi\psi)$.

(c) $O(\phi) + O(\phi) = O(\phi) + o(\phi) = O(\phi)$.

2. 构造并证明一些象练习 1 中那样的辅助定理.

第四章　迭加法、热流动和傅里叶分析

可以用标准的数学方法加以处理的大多数科学问题是线性的.对于线性齐次问题,**迭加原理**是成立的;即,如果已知问题的特解,则这样一些特解的线性组合给出了新的解. 进一步说,把齐次问题的解与非齐次问题的一个特解进行线性组合，便可得到线性非齐次情况的解.

也许，在求解线性问题的基本理论的进展中最重要的里程碑是 1822 年傅里叶的 Théorie Analytique de la Chaleur（热的数学理论)一书的出版. 该书不仅为一般类型的“边值问题”提供了一种示范性的形式处理，也开拓了一类具有很大普遍性的数学方法的理论. 就其原始形式以及推广形式而言，傅里叶的方法对于现代科学和工程技术是必不可少的. 它是应用数学发展中最重要的里程碑之一.

傅里叶分析的早期历史在表明纯粹数学和应用数学的侧重点之间的差别方面是十分典型的. E. T. Bell 这样总结了当时的情况[1].

正是在 Grenoble 时代，傅里叶编著了不朽的热的数学理论一书. 这是数学物理学中的一个里程碑. 他关于热传导的第一篇学术论文是在 1807 年递交的. 当初是这样约定的,科学院鼓励傅里叶继续工作，建立热的数学理论,作为获取 1812 年的 Grand 奖金的课题. 傅里叶赢得了奖金,但是受到了一些批评. 他对这些批评深感不满,但却很好地接受了.

拉普拉斯、拉格朗日和勒让德是审查人. 在承认傅里叶工作的新奇与重要的同时,他们指出数学处理是错误的，许多地方有待于严格化. 拉格朗日自己已经发现了傅里叶的主要定理的特殊情况,但在求一般结果时却遇到了

1) 在 E. T. Bell 的 *Men of Mathematics* 一书（N. Y. Simon and Schuster, 1961) 中的 197—198 页.

如他那时指出的那种障碍．这些难以解决的困难具有这样一种性质，即它们随着时间而消逝或许是不可能的．一个多世纪已经过去了，但它们还未被满意地解决．

顺便提一下，注意到这一争议代表了纯粹数学家和数学物理学家之间的根本区别，这是很有意思的．纯粹数学家手中唯一的武器是清晰而严格的证明，而且只有当所谓定理能够经受住那个时期所能有的最严厉的批评时，纯粹数学家才会去运用它．

另一方面，难得会有应用数学家和数学物理学家如此乐观地以为，有什么简单到足以为人类所理解的数学理论可以完全描述无限复杂的物理世界．Airy 关于宇宙的优美(或荒唐)图象，作为一种冗长不堪的、自我求解的微分方程组被证明是数学顽固态度和牛顿决定论所产生的幻象，对此他们并不感到多大遗憾；在他们的后门那儿——物理世界本身，他们还可以诉诸于某些更为现实的东西． 他们可以根据经验的裁决去试验并检查他们所用的有意不完善的数学所作出的推断，由于数学的特殊性质，这一做法对于纯粹数学家来说是不可能的．如果数学上的预言与实验相矛盾，应用数学家决不会对物理证据视而不见———个数学家可能会对此视而不见的，相反，他们会抛弃他们的数学工具，去寻找一套更好的工具．

科学家由于其自身的原因而对数学的这种不介意态度，就好比由于省略了一个有疑问的小脚注而被激怒的某一类型的学究那样，激怒了另一类型的纯粹数学家． 其结果是几乎没有几位纯粹数学家对科学作出过重大的贡献——当然，他们发明了许多对科学家有用的工具(或许是必不可少的工具)．而其中奇怪之处在于，正是这些反对科学家大胆地、富有想像力地工作的纯粹学者们，又拼命坚持说，数学根本不是追求细小的精确性，与广泛流传的信念相反，而是要创造性地想像，有时还是非常放纵的，就象一首伟大的诗篇或一首乐曲所需要的那样． 物理学家们正是在这点上以其之道来鞭鞑数学家们的：不顾傅里叶关于热的分析理论的经典著作中缺乏显然的严格性，Kelvin 爵士还是称它为"一首伟大的数学诗篇"．

正如 Bell 所指出的那样，傅里叶的工作一开始就由于它缺乏严格性而受到批评．然而，甚至从一开始，作为一种新工具，一种有力的方法，它的重要性就是无可否认的．它激发了纯粹数学的发展．一些特殊问题的解决，以及后来刺激了更广泛的进展，在对

傅里叶分析的研究过程中都是一目了然的．傅里叶分析乃是每一位应用数学的学生都应熟悉的一门学科．

4.1 热传导

我们考虑热传导中的一个简单例子来开始我们的讨论．有一根金属棒，两端绝热，一端放在温度为 θ_1 的槽内，另一端放在温度为 θ_2 的槽内． 我们将对这个问题以及它在三维情形中的推广进行数学表述．其次再讨论所引起的某些数学问题．特别地，我们要证明一个唯一性定理．我们用分离变量法来求解一维问题，并且说明无量纲变量对于解的解释是如何方便．

定态热传导

在定态情形下，棒中的温度 θ 具有均匀的梯度，热流动率则正比于这个梯度． 因而假设该棒位于 $x=0$ 处的端点的温度为 θ_1，而位于 $x=L$ 处的端点的温度为 θ_2（参见图 4.1）． 于是距一端 x 处的温度为

$$\theta=\theta_s(x)=\theta_1+(\theta_2-\theta_1)\frac{x}{L}. \tag{1}$$

（脚标 s 是用来表示处在定态．）温度梯度为

$$\frac{d\theta_s}{dx}=\frac{\theta_2-\theta_1}{L}. \tag{2}$$

热通量密度 J（沿着 x 递增的方向，单位时间内通过单位面积的热流率）正比于温度梯度．写作

$$J=-k\frac{d\theta_s}{dx}, \tag{3}$$

其中 k 是**导热率系数**．这里引进了负号，使得在（正如所期望的那样）热朝着温度减低的方向流动时，k 取正的．这样，当 $d\theta/dx$ 为负，$k>0$ 时，(3)式中的 J 是正的[1]．

1）已经做了大量工作，测量各种象 k 那样的"唯象系数"关于纯物质的结果就汇编了近千页之多．关于这方面的总结可参看 R. W Powell 和 Y. S. Touloukian 的 "*Thermal Conductivities of the Elements*" 一文，载于 *Science* **181**, 999—1008 (1973).

一维热传导的微分方程

现在来考虑，在达到定态以前所发生的温度分布的调整．任意瞬间、任意点 x 处的温度表作 $\theta(x, t)$． 是否能找到一个函数 $\theta(x, t)$ 所遵循的方程呢？

假设(3)式对于任意瞬时仍然适合，因而瞬时热通量密度由下式给出[1]

$$J = -k\frac{\partial\theta}{\partial x} \tag{4}$$

考虑在 x 和 $x+\Delta x$ 之间的一小段圆柱棒（图 4.1）．穿过 x 处的截面流入这一段内的热流率为

$$A\left(-k\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_x, \tag{5}$$

这里 A 是横截面积(常量)．下标 x 表示括号内的表达式在 x 处取值．

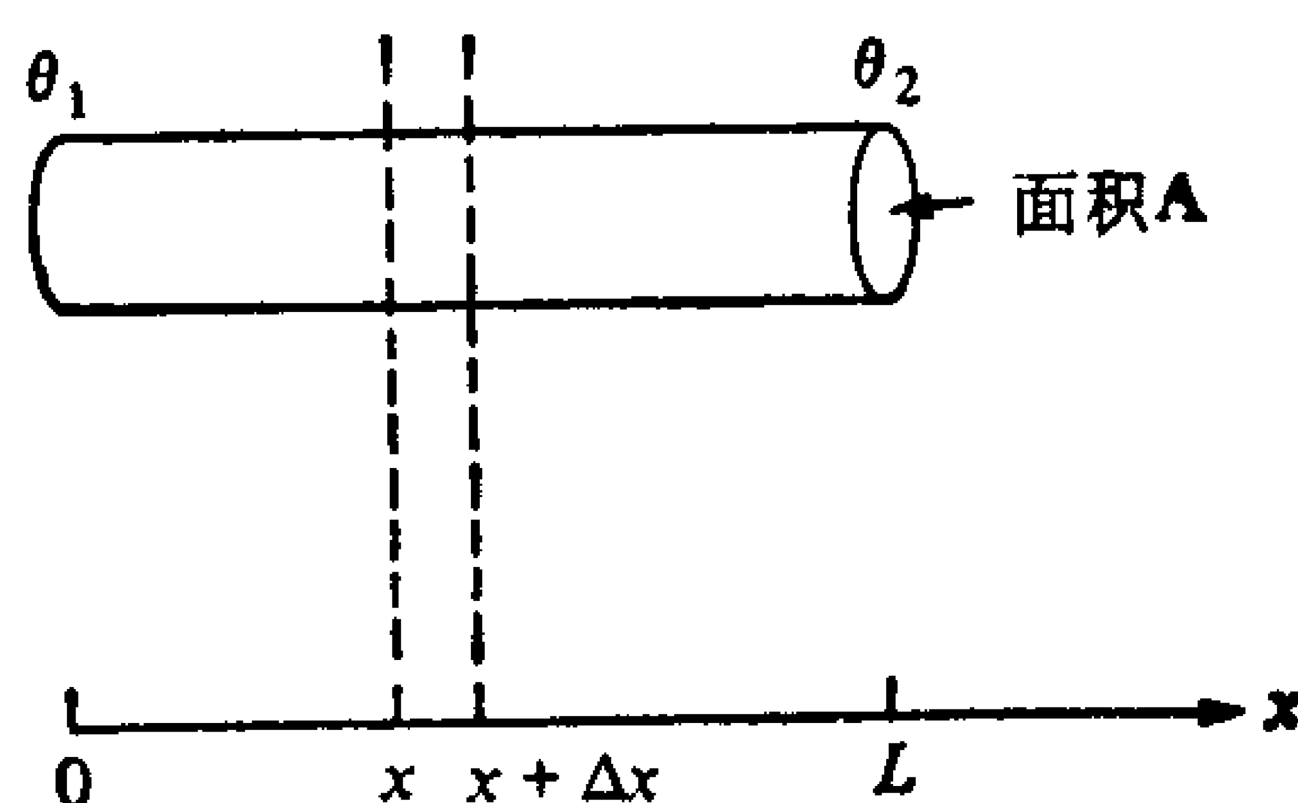


图 4.1 沿着一根棒的一维热传导．

穿过 $x+\Delta x$ 处的截面流出去的热流与(5)式具有相同的形式，不同之处只是表达式在 $x+\Delta x$ 处取值．因此，净得热量率为 $\dot{q}$，这里

1) 方程(4)是结构方程的一个例子．这种方程描述了一种特定物质的性质． 而普通物理定律，如质量守恒定律，则是描述所有物质的行为．为了看出 (4) 式不是普通的，我们提请读者注意，如果跟液体打交道，那就不得不在热通量密度上再加上由于对流产生的贡献． 建立结构方程不是一件容易的事情． 在本课中我们还将讨论许多这样的方程．

$$\dot{q}=A\left[\left(k\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}-\left(k\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{x}\right].\tag{6}$$

如果不存在热的源泉或漏洞，则每单位质量净得的热量正比于升高的温度 θ. 因此

$$\dot{q}=\frac{\partial}{\partial t}\left[c\theta\rho(A\Delta x)\right],\tag{7}$$

其中 ρ 是材料的密度，c 是材料的比热. （当温度增加一个单位时,单位质量的材料中的热量增加了 c 个单位.)如果令 (6) 式与(7)式相等,除以 Δx, 并且取 $\Delta x\to 0$ 的极限,则得

$$\rho c\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\theta}{\partial x}\right).\tag{8}$$

在我们的讨论中已经隐含了该棒是由均匀材料组成的，从而 ρ、c 和 k 都是常数;但由于 (8) 式是一个局域方程,即使对于一根非均匀的圆柱棒它也是适用的(此时 ρ、c、k 是 x 的函数).

在均匀材料的情况下,我们可以将(8)式写成

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\kappa\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2},\tag{9}$$

其中的 $\kappa=k/(\rho c)$ 通常称为**热扩散系数**,以表明(9)式与物质扩散方程之间的相似性. κ 的典型值对于铜是 1.14 (厘米)^2/秒，对于花岗岩是 0.011 (厘米)^2/秒.

一维热传导的初始边值问题

在求得了 $\theta(x, t)$所遵循的方程以后,我们现在来完成问题的表述.

我们要讨论 (x, t) 平面内区域D中(9)式的解(参见图 4.2),D的定义为

$$D: 0<x<L,\ 0<t<\infty.$$

这个无界区域的边界是(粗线画的)一条曲线C,它呈凹形(向上).根据物理上的考虑,为了使问题确定起见,显然棒的初始温度必须是已知的. 令其为

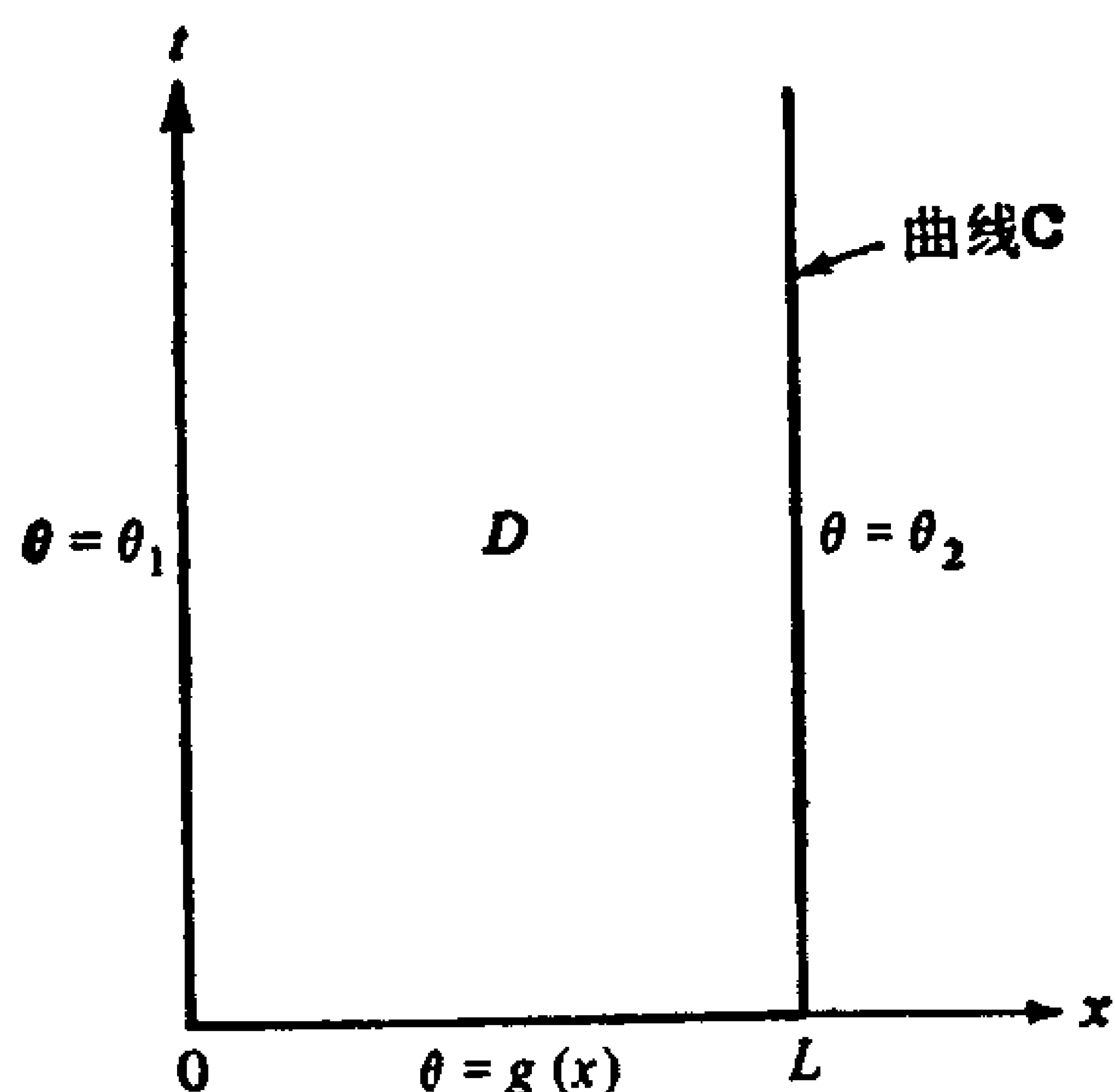


图 4.2 热传导问题的数学表述：域，它的边界，以及边界条件.

$$\theta(x,\ 0)=g(x). \tag{10}$$

对于所有 $t>0$，棒的两端的温度保持固定不变，故而有

$$\theta(0,\ t)=\theta_1,\ \theta(L,\ t)=\theta_2,\ \text{当}\ t>0\ \text{时}, \tag{11}$$

仅在 $t=0$ 开始时，该棒才可能放入槽内，因此 $g(0)$ 和 $g(L)$ 不必分别等于 θ_1 和 θ_2.

现在我们的数学问题已经表述好了. 为了强调一下这一点，我们把方程 [(9)，(10) 和 (11) 式] 重新写出来；问题是要对 $0<x<L$，$0<t<\infty$，求解 $\theta(x,\ t)$，其中

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\partial\theta}{\partial t}=\kappa\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2},\ 0<x<L,\ 0<t<\infty.\\&\theta(x,0\ )=g(x),(g\ \text{给定}),0>x<L.\\&\theta(0,\ t)=\theta_1,\ \theta(L,\ t)=\theta_2,t>0.\end{aligned}}$$

按照问题的物理解释，常常把条件(11)式叫作边界条件(加在棒的边界上)，而把条件(10)叫作初始条件(加在初瞬时的). 从数学上讲，它们都是在 D 域的凹形边界 C 上所规定的条件. 为了分清术语上的这种含混不清，要求对理论作更进一步的探讨(但不在这里进行).

过去、现在和将来

假定让热分布在棒内进行了一些时候以后，左端的温度将会

于时刻 $t_1(t_1>0)$ 变为 θ_1. 物理经验表明,棒内的温度分布会在将来 $(t>t_1)$ 受到影响,而不是在过去 $(t<t_1)$. 因此,从物理上来说,方程必须具有"时间感觉". 事实上,在区域

$$D_1 \equiv \{(x, t)\,|\,0<x<L, \ 0<t<t_1\}$$

中,解完全由图 4.3 中的粗黑线画出的曲线 C 上所规定的条件所决定,这在物理上是清楚的. 在 $t>t_1$ 以后,改变 $\theta(0, t)$ 和 $\theta(L, t)$ 的规定将不产生影响.

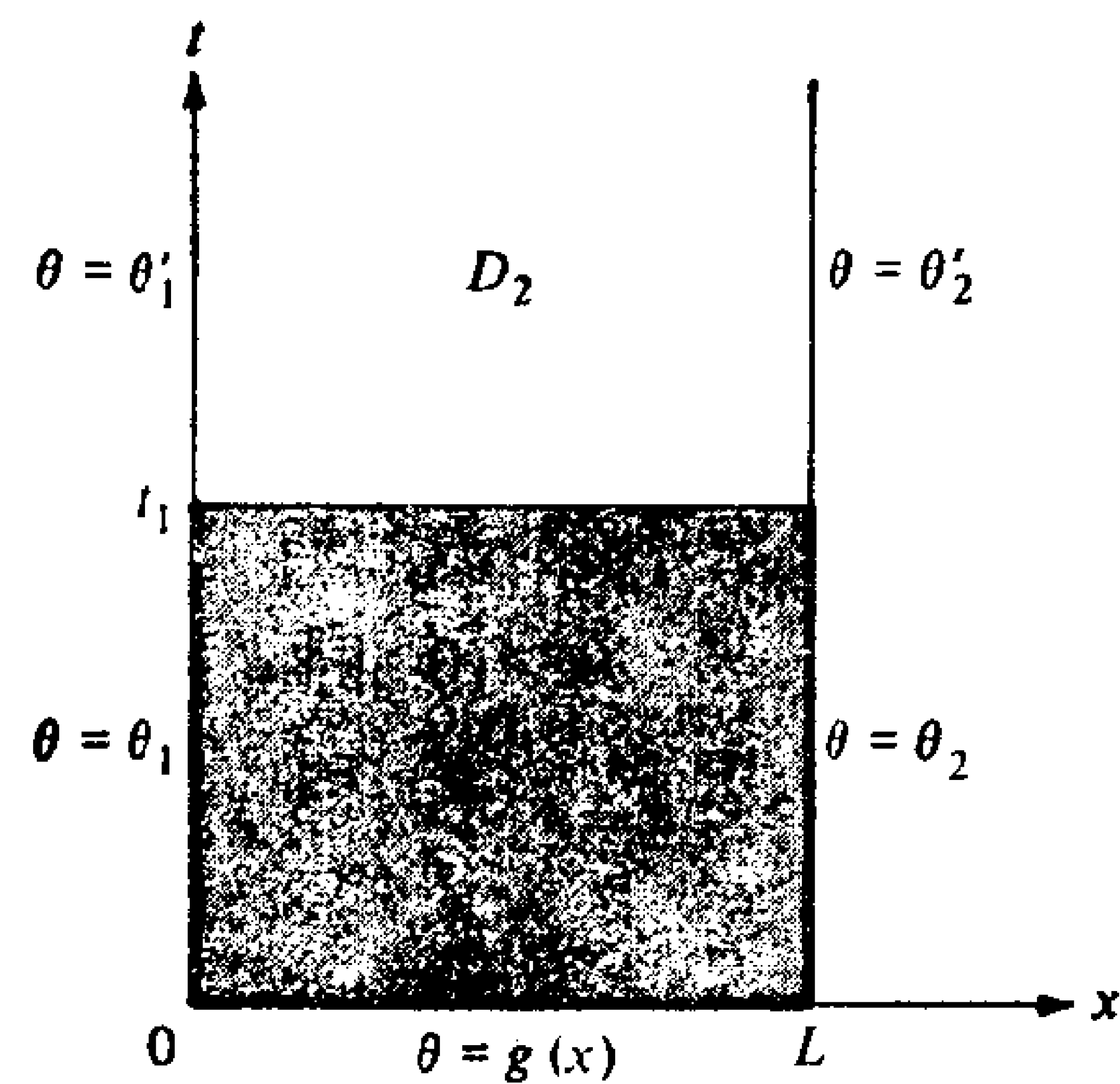


图 4.3 由边界条件的变化所示明的过去和将来之间的区别. 对于 $t<t_1$, 解只受到粗线勾划出的边界 C_1 上的变化的影响.

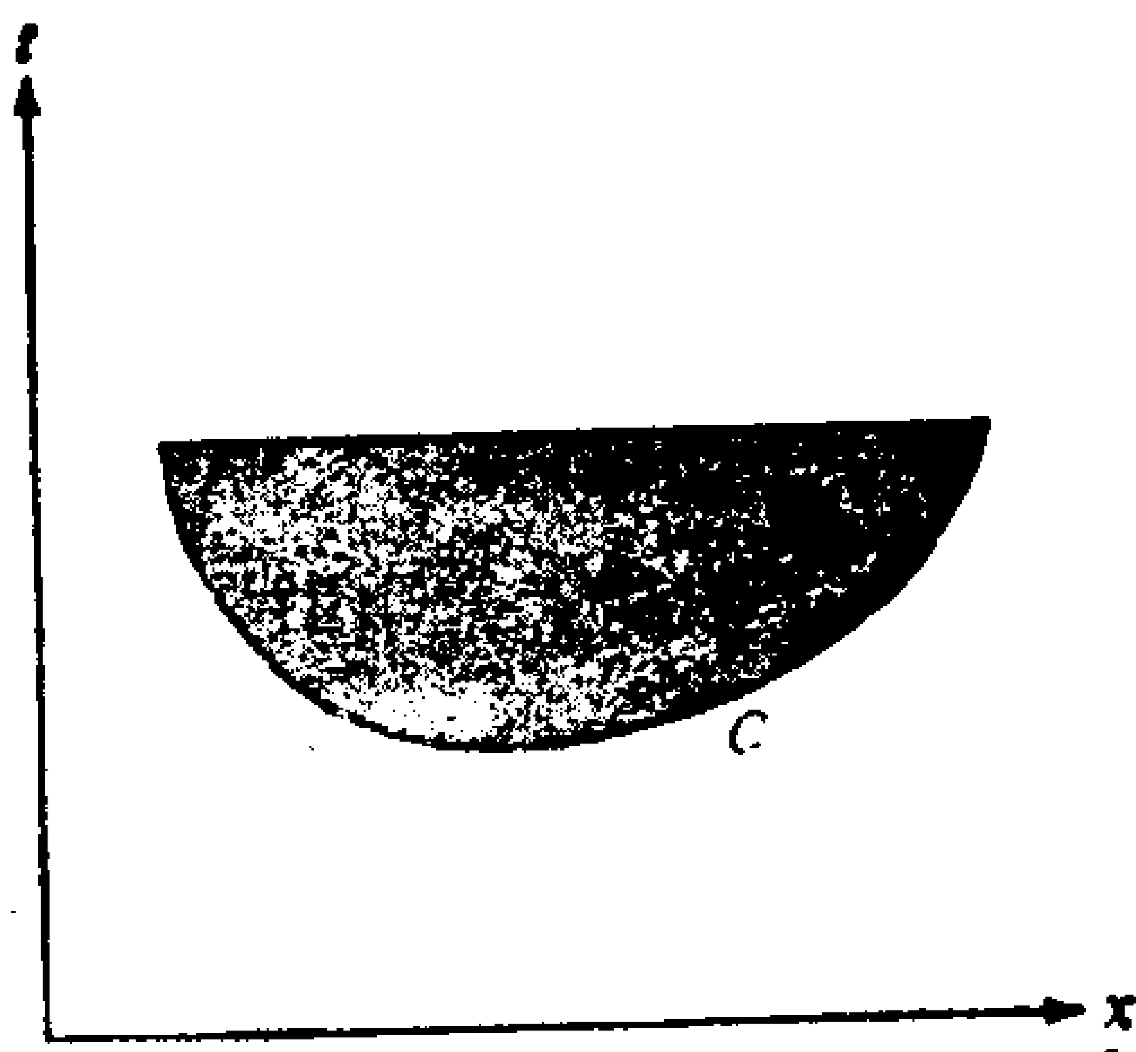


图 4.4 热传导问题的一般数学表述: 域和它的边界.

区域 D_2 内的解是由一条凹形曲线上类似的规定条件所确定的. 因此,我们可以作出这样的推测: *在以凹形曲线 C 和直线 $t=$常数为边界的域 D 内(见图 4.4)方程(8)的解是由 C 上所规定的 θ 值决定的*. 这的确是一个正确的结果. 可以证明,对于一条充分光滑的曲线 C 以及其上所规定的数值是连续情况下,解是唯一存在的.

三维空间中的热传导

不难把热传导问题的表述推广到空间三维情况: 我们一会儿就要证明,在均匀情况下,时刻 t、点 (x, y, z) 处的温度 $\theta(x, y,$

z, t) 的变化所遵从的方程是

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\kappa\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right) \text{ 或 } \frac{\partial\theta}{\partial t}=\kappa\nabla^2\theta. \tag{12}$$

[方程(12)推广了(9)式.]在非均匀介质的情况下,有(8)式的推广形式为

$$\rho c\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial\theta}{\partial z}\right). \tag{13a}$$

用向量记号表示,(13a) 式为

$$\rho c\frac{\partial\theta}{\partial t}=\mathbf{\nabla}\cdot(k\mathbf{\nabla}\theta). \tag{13b}$$

如果包围在某一给定体积的表面上的温度在所有时刻都已给定,而在体积内部的初始温度也已给出,则我们可望问题的解也就完全确定了.这是正确的,但存在定理的证明却是不容易的[1].

(13) 式的推导可以通过考虑一个矩形盒子,其中两个角位于 (x, y, z) 和 $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$,并且利用实质上与以前相同的推理来完成[2].[参见练习 2(b).] 该推导也可以通过把散度定理应用于下列方程来完成.这是在一个以任意的光滑闭曲面 ∂R 为边界的区域 R 内,关于热增加率的方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_R c\rho\theta d\tau=\oiint_{\partial R}k\frac{\partial\theta}{\partial n}d\sigma=\oiint_{\partial R}k\mathbf{n}\cdot\nabla\theta d\sigma, \tag{14}$$

(14)式中的 $\mathbf{n}$ 是单位外法向矢量.这个方程用到了下列假定:沿着 $\mathbf{n}$ 方向通过单元表面的热通量为 $-k(\partial\theta/\partial n)$,其中 $\partial/\partial n$ 指的是法向导数[请对照(4)式].由(14)式,得

---

1) 关于波动方程、拉普拉斯方程以及热方程的解的存在定理,在 R. Courant, K. Friedrichs 和 H. Lewy 等人的非凡论文["论数学物理学的偏微分方程", P. Fox 翻译,载于 *IBM Journal*, **11**, 215—234 (1967);原始论文载于德文杂志:*Math Ann.* **100**, 32—74 (1928)] 中给出了特别引人注目的证明.随着网格大小的减小,相应的有限差分格式的解便会趋近于一个极限值,它是满足所给定的偏微分方程和初始边值条件的;由此,存在定理便自动地得到了证明.该文还探索了格林函数与随机游走之间的联系.

2) 为了与头三章中采用的"粗略"手法相一致,这里只是略述了推导方法.在第十四章,尤其是 14.1 节中,对于所需要的概念作了更为仔细的讨论.

$$\iiint_R \left[c\rho \frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla \cdot (k\nabla\theta) \right] d\tau = 0. \tag{15}$$

既然 R 是任意的，那么若被积函数是连续的，则它必须为零[1]. 如果不是这样，在被积函数不为零的一点 P_0 处，我们必定能够找到一个小区域 R_0，在这个小区域中，被积函数与它在 P_0 点处的值同号. 当 $R = R_0$ 时，积分(15)就会不为零，即与原设矛盾.

一个问题的完整表述不仅取决于方程的推导，而且也与边界条件的规定有关. 一种常见的边界条件是

(a) 规定了所有时刻在边界上的各点的温度. (各点温度可以不相同.)

另一种可能的边界条件是

(b) 边界是绝热的，因而对边界上的每一点都有 $\partial\theta/\partial n = 0$.

第三种也是更普遍的条件是

(c) 从边界上散失掉的热量正比于表面温度高于环境温度的差值.

还有许多其他的可能性. 例如，规定界面或部分界面上的温度随时间的变化. 列举所有可能的情况是困难的. 而象纯粹数学家所用的手法所要求的那样，要证明所有必要的存在定理，就更加艰巨了. 在边界上可以规定类似于 (a), (b) 或 (c) 的一个条件，以此作为工作假设，这对于应用数学家来说也就足够了. 除非表明存在有一个合理疑点，否则我们就认为这一假设是正确的. 其实，对于非均匀介质，甚至对于比热(比方说)是温度的函数的情形，采用这一假设是很有用的.

一般来说，在指定的条件下可以证明解的唯一存在，但是这一点并非总是可能的. 应用数学家往往是从科学问题的考虑中获得所要指定的条件. 有时他通过证明最多只有一个解(唯一性)来检验他的方程的适用性. (如果所指定的条件比唯一性所要求的还

---

1) 这是 **Dubois Reymond** 引理——一个我们将要多次用到的结果.

要多，那末要么这些额外条件是多余的，要么它们得不到满足.)尽管不能把解的存在性认为是当然的，但要证明这一点却是出奇地困难. 应用数学家常常不顾其进展如何，而坚信作出努力来提供这些证明是值得的.

既然唯一性是易于证明的，我们现在就来给出这一证明. 然后再来叙述另一个一般结果——极大值原理，并对此作出评论.

唯一性定理的证明

考虑区域 R 内的热传导问题，界面 s 上的温度已给定. 令 $\theta(x, y, z, t)$ 为满足初始条件 $\theta_1 = g(x, y, z)$（当 $t = 0$ 时)的一个解. 为了证明唯一性，我们假定存在着满足同样条件的另一个解 $\theta_2(x, y, z, t)$. 于是，它们的差 $\theta = \theta_2 - \theta_1$ 也满足热方程(13)，但是却有下列边界条件和初始条件:

$$\theta = 0, \text{ 在 } s \text{ 上;} \tag{16a}$$

$$\theta = 0, \text{ 当 } t = 0 \text{ 时,} \tag{16b}$$

若能证明 θ 恒等于零，唯一性便得以证明. 为证明这一点，我们先用 θ 乘(13)式并在区域 R 上积分. 我们可得[练习 5(a)]

$$\frac{1}{2}\iiint_R \rho c \frac{\partial(\theta^2)}{\partial t}\, d\tau = -\varepsilon + \oiint_{\partial R} k\theta \frac{\partial \theta}{\partial n}\, d\sigma, \tag{17}$$

其中

$$\varepsilon = \iiint_R k(\nabla\theta)^2 d\tau.$$

由于 (16a) 式，面积分等于零. 既然 ρc 与 t 无关，我们就可以把(17)式在区间 $(0, t_1)$ 上对 t 进行积分，记住初始条件(16b)，则有

$$\left(\frac{1}{2}\iiint_R \rho c \theta^2 d\tau\right)_{t_1} - 0 = -\int_0^{t_1} \varepsilon\, dt. \tag{18}$$

若 $t_1 > 0$，则 (18) 式的左边是非负的，而其右边是非正的. 因此，两边都必须等于零. 既然 t_1 是任意的，必定有

$$\varepsilon = 0, \text{ 在所有时刻.} \tag{19}$$

因此，对所有时刻有 $\nabla\theta=0$. 故 $\theta(x, y, z, t)$ 只能是时间的函数. (18)式左边为零，这表明 $[\theta(t_1)]^2=0$, 而 $\theta=0$. □

极大值原理

根据下列直觉，即决不会由于扩散而使得热量增高，便能推测到偏微分方程理论中的一个重要结果. 这一结果就是，我们可望在一区域内部的温度决不会超过出现在边界上的或者初始时指定的最高温度. 略施小技，我们的确能够证明下列结果，如果 $\theta(x, t)$ 已被定义，而且在 $0\leqslant x\leqslant L$, $0\leqslant t\leqslant T$ 中是连续，若 θ 在这个矩形区域内还满足热方程 (9)，则当 $t=0$ 或 $x=0$ 或 $x=L$ 时，θ 取其极大值和极小值. (为简单起见，这儿在一维情形中叙述我们的结果，但对于维数更高的情形，这也是成立的.) 欲知其证明，请参看关于微分方程的教科书，例如 Tychonov 和 Samarski (1964, 165—167).

借助于极大值原理，很容易给出关于唯一性以及解对于初始条件和边界条件的连续依赖性的证明 (练习 11). 然而要记住，我们讲的极大值原理只是对于闭矩形内的连续解才适用，因此仅仅对于如此有限的一类解，才容许根据这一原理作出推论. 而上面给出的关于唯一性的证明并未用到这一限制，而是用了能量法.

正如在某种程度上已经示明的那样，偏微分方程理论的主要任务是要证明：各种各样问题的解是存在的、唯一的，而且连续地依赖于初始和边界条件. 这样的问题称为**适定的**.

分离变量求解法

没有明显的方法去解决上面提出的基本热传导问题. 亦即在初始条件(10)式，边界条件 (11) 式下热传导方程 (9) 式的求解问题. 傅里叶提出了一个灵巧的方法，它的基本思想是把线性方程 (9) 的无穷多个适当的简单解迭加起来. 这一方法的关键在于采用分离变量的技巧求出无穷多个这样的解.

由于我们下面将要讲到的理由，在我们探讨的那类问题中，

傅里叶方法只能直接应用于衰减至零的、减去定态解 θ_s 的那部分解. 我们用 $v(x, t)$ 来表示这个**瞬态**解

$$v(x, t) = \theta(x, t) - \theta_s(x). \tag{20}$$

既然 θ_s 是热方程 (9) 的一个定态解，那么瞬态解就满足同样的方程：

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \tag{21}$$

现在的初始条件是

$$\text{对于 } 0<x<L,\ v(x, 0)=f(x);\ f(x)=g(x)-\theta_s(x). \tag{22}$$

边界条件(11)式成为

$$v(0, t) = v(L, t) = 0,\ \text{对于所有 } t > 0. \tag{23}$$

注意，这些边界条件不象 (11) 式，它们是**齐次的**，意即它们是由零函数所满足的条件.

我们采用按步就班的方法来求解(21)，(22)和 (23) 式提出的问题. (完全相同的方法还用在解决 15.4 节中的有关问题. 合在一起，两个示例应该对于这种方法作出充分说明了.)

步骤 *A*. 取一乘积解:

$$v(x, t) = X(t)T(t). \tag{24}$$

步骤 *B*. 代入所要求解的微分方程. 由(24)和(21)式，得

$$XT' = \kappa X''T (X' = dX/dt,\ T' = dT/dt) \tag{25}$$

步骤 *C*. 分离变量. 即把(25)式写成形式

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\kappa T(t)}. \tag{26}$$

现在已把变量分离开了，因而左边仅是独立变量 x 的函数而右边仅是独立变量 t 的函数. 通过改变独立变量 x 和 t，看来 (26) 式的两端多少可以任意改变. 但是如果情形果真如此，那就会出现矛盾. 因此 (26) 式的两端都必须等于一个**分离常数** k，从而得到了**分离方程**

$$X'' = kX,\ T' = k\kappa T. \tag{27a, b}$$

步骤 *D*. 根据分离方程和适当的齐次边界条件所组成的这

样一个问题来确定分离常数的容许值．齐次边界条件由(23)式给出．它们是

$$X(0)T(t)=0,\ X(L)T(t)=0\ \text{对所有}\ t>0,$$

或(除了 $T\equiv 0$ 以外)

$$X(0)=X(L)=0. \tag{28}$$

必须将这些条件加到 (27a) 式的解上．通常，对于 $k>0$，$k=0$，$k<0$ 这三种情况分别进行考虑是有帮助的．

如果 $k>0$，我们记作 $k=\mu^2$，而 $\mu>0$．最终方程 $X''=X\mu^2$ 的通解是

$$X=C_1\cosh\mu x+C_2\sinh\mu x.$$

边界条件(28)要求 $C_1=C_2=0$．因而 $X=0$．

如果 $k=0$，必须在(28)式的条件下求解 $X''=0$．在此情况下，也只有平庸解 $X=0$．

如果 $k<0$，我们记作 $k=-\alpha^2$，而 $\alpha>0$．最终方程 $X''=-\alpha^2X$ 的通解是

$$X=C_1\cos\alpha x+C_2\sin\alpha x. \tag{29}$$

$X(0)=0$ 的要求仅当 $C_1=0$ 时得到满足．$X(L)=0$ 的要求给出了

$$C_2\sin\alpha L=0. \tag{30}$$

从(30)式得到的一个可能推论是 $C_2=0$，但是由于 $C_1=0$，这就又给出了一个平庸解．仅当分离常数 $k=-\alpha^2$ 取某些特殊数值时才能得到非平庸解．按照(30)式，由于 $\alpha=0$，只有当

$$\alpha=m\pi/L,\ m=1,2,3,\cdots \tag{31}$$

时，这样的解是许可的． 由 (31) 式；我们确实得到了非平庸解(29)，它具有下列形式：

$$X(x)=B_m\sin\frac{m\pi x}{L},\ B_m\ \text{为任意常数}. \tag{32}$$

步骤 E 在分离常数取 (d) 中所决定的数值的情况下，求解剩下的分离方程：由(31)式，因为 $k=-\alpha^2$，所以 (27b) 式成为

$$T' = -\frac{m^2\pi^2}{L^2}\kappa T. \tag{33}$$

这一方程的每个解都是一个常数因子乘以下式

$$\exp\left(-\frac{m^2\pi^2}{L^2}\right)\kappa t. \tag{34}$$

步骤 F　把全部可能的乘积解迭加起来并使之满足剩下的初始条件或边界条件. “迭加”的意思(粗略说来)是“加在一起”. 因此,我们把 v 取作下列无穷级数

$$v(x,\ t) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin\frac{m\pi x}{L}\exp\left(-\frac{m^2\pi^2}{L^2}\kappa t\right). \tag{35}$$

既然热方程 (21) 是线性的,则形如(35)式的一个有限级数当然是一个解 (因为每一项都是一个解). 在“适当条件”下,无穷级数也具有与有限和式相同的性质;假定这样的条件在这里能得到满足,以此为前提继续讨论下去,至少在某些有趣的例子中是这样做的.

边界条件(23)式是齐次的,从而,级数(35)应该满足 (23) 式,这是因为每一项都分别满足(23)式[1].

初始条件(22)式尚未满足, 但还有全部常数 B_m 随我们处置. 若我们试图要去满足这个条件,便可取

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin\frac{m\pi x}{L},\ 0 < x < L, \tag{36}$$

作为一个必要条件. 因此,如若我们将上式乘以 $\sin(n\pi x/L)$ 并且从 0 到 L 进行积分,便能形式地去求出典型系数(例如 B_n)所取的值. 可以证明(练习 8), B_n 由下式给出

---

1) 我们为什么选择傅里叶方法应用于瞬态解 v, 其原因现在已经清楚了;这是因为 v 满足齐次边界条件(23)式,而全解 θ 满足非齐次边界条件(11)式. 后一条件不具有线性性质. 所谓线性性质也就是个别满足这一条件的各函数之和仍满足该条件. 注意, X 方程(27)式以及与其相伴的边界条件(28) 式的齐次性意味着平庸解总是一种可能的解. 我们要想求得一个非平庸解, 就要去确定容许的分离常数的一个离散无限集,从而求得无穷级数 (35)——这是齐次性所起的关键作用的另一示例. 初学者常常忘记, 在按照标准方式应用傅里叶分离变量方法 (a)—(f) 之前,必须先使(带有两个独立变量的)分离方程中的一个具有齐次边界条件. (普遍法则是“除了一个以外的所有”方程都必须具有齐次边界条件.)

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx. \tag{37}$$

这是由下列公式得出的:

$$\left(\sin\frac{m\pi x}{L}, \sin\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (38a)$$

$$\left(\cos\frac{m\pi x}{L}, \cos\frac{n\pi x}{L}\right) = \begin{cases} L/2 & \text{如果 } m = n, \\ 0 & \text{如果 } m \neq n, \end{cases} \qquad (38b)$$

$$\left(\cos\frac{m\pi x}{L}, \sin\frac{n\pi x}{L}\right) = 0, \tag{38c}$$

其中我们用了记号[1)]

$$(f, g) = \int_0^L f(x)g(x)\,dx. \tag{39}$$

采用这个记号,(37)式便取下列形式(其中已用 m 代替 n):

$$B_m = 2L^{-1}\left(f(x),\ \sin\frac{m\pi x}{L}\right). \tag{40}$$

因此我们求得了问题的尝试解为

$$\theta(x, t) = \theta_s(x) + \sum_1^{\infty} B_m\left(\sin\frac{m\pi x}{L}\right)e^{-(m\pi/L)^2\kappa t}, \tag{41}$$

式中,B_m 是利用方程式(40),根据初始条件(22)式确定的.(41)式果真是一个解吗?为了做出肯定的回答,我们必须确保把函数 $f(x)$ 表示成(36)式的形式是可能的.如果 $f(x)$ 是有限个正弦项之和,那么这当然是对的.事实上,可以将任何"合理的"函数表示成这种形式,但要证明这一点却不容易.为了解决某些特殊问题中的这一困难,我们也要跨入一门普遍数学理论的门槛.但是在这样做以前,让我们先来考察一下所得解的某些含义.

解释;无量纲表示式

正如所预期的,解(41)式趋近于由(1)式给出的定态温度分布

---

1) 以后我们将看到,是如何把(,)看作两个向量标积的一种推广的,但这与我们目前的讨论无关. 为了证明(37)式只需用到(38a)式,不过(38b)式和(38c)式在以后要用到.

$\theta_s(x)$. 在无穷级数的各种项中，**基波**（$m=1$）比**谐波**（$m\geqslant 2$）衰减得慢的多. 因此，无论是怎样的初始温度分布，跟平衡分布的偏离很快就接近于正弦形式. 该正弦项的振幅随时间作指数衰减。 指数 $\kappa(\pi/L)^2$ 仅仅与棒的长度 L 及材料的热扩散系数 κ 有关[1).

对于这个问题，在与时间标度

$$t_0=L^2/\kappa \tag{42}$$

可作比较的时间内，解才会发生有意义的短暂变化. 而在长度标度 L 分之几的长度中才会发生有意义的空间变化. 把这些标度取作度量单位，这等价去引入下列变量

$$\xi=\frac{x}{L} \text{ 和 } \tau=\frac{t}{t_0}=\frac{\kappa t}{L^2}. \tag{43}$$

这些变量是**无量纲**的，它们的数值与度量单位无关.（例如，如果 $x=10$ 厘米，$L=100$ 厘米，则$\xi=1/10$，就和 $x=0.1$ 米，$L=1$ 米时一样.）采用这些变量，我们就可以把尝试解(41)取为 $\Theta(\xi,\tau)$，这里

$$\Theta(\xi,\tau)=\theta(L\xi,t_0\tau)=\theta_s(L\xi)+\sum_1^\infty B_m\sin m\pi\xi\cdot e^{-(m\pi)^2\tau}, \tag{44}$$

这一等式显示出对于 L 和 κ 没有明显的依赖性. 事实上，从一开始就可以引入无量纲参数. 于是(9)式便成了[练习 8(b)]

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}=\frac{\partial^2\Theta}{\partial\xi^2}. \tag{45}$$

这一方程的求解区域 D' 的定义是

$$D':0<\xi<1,\ 0<\tau<\infty. \tag{46}$$

齐次问题的初始条件和边界条件为

$$\Theta(0,t)=\Theta(1,t)=0,$$

$$\Theta(\xi,0)=G(\xi),\text{其中 } G(\xi)=g(L\xi).$$

---

1) 衰减最慢的谐波（$m=2$）象 $\exp(-4\pi^2\kappa t/L^2)$ 那样衰减. 在以 $L^2/\pi^2\kappa\approx 0.1L^2/\kappa$ 为时间单位时，减少到它初始值的 e^{-4}（即少于百分之二）. 对于10厘米长的铜棒，要小于10秒.

在原来的表述中，坐标为 (x, t) 的一点处的温度似乎可以以任意方式依赖于两个参量 κ 和 L. 而无量纲表述表明，如果取 ξ 和 τ 为独立变量，那么对于 κ 和 L 的明显依赖性就消失了．一般说来，由于采用了无量纲变量，就可以使得解所明显依赖的参量数目减少了.

借助于实验模型，采用无量纲表述以后可以作一些预言．因此，如果为了对一个热传导的实际问题进行测试，我们使用同样的材料构造出一个比例模型，那么当模型是实际尺寸的 $1/N$ 时，在实际情况中的时间标度就要大 N^2 倍.其理由是时间 t 只是出现在组合式 $\tau = \kappa t/L^2$ 中．而由于在模拟实验中，L 已代之以 L/N，所以只有当 t 代之以 N^2t 时，才能得到 τ 的一个给定数值．（关于应用模型的进一步讨论，请参见 6.2 节.）

可以将这些讨论直接用于三维方程(12)以及相应的边界条件和初始条件．所以，举例来说，假如把热的铜球投入冰水中使其冷却，则一个球的冷却时间要比直径较之大两倍的球的冷却时间长四倍之久(练习 4).

我们强调，无量纲形式的结果与度量单位无关．因此，无量纲表述揭示了问题的真正的数学本质．关于量纲分析的更充分讨论，可参见 6.2 节.

对于扩散到某一给定距离所需时间的估计

让我们来推导一个有关扩散的基本事实作为结束．这是最慢衰减模式（其空间依赖关系为 $\sin(\pi x/L)$）象 $\exp(-\pi^2\kappa t/L^2)$ 一样衰减这样一个结果的一个推论．既然在这个模式中热是集中在棒的中间的，我们就能够粗略地把初始热分布的衰减看成是热从棒中向外传到距离 $d = L/2$ 处．用 d 来表示，衰减因子为 $\exp(-\pi^2\kappa t/4d^2)$．在 $t = d^2/\kappa$ 这段时间内，正弦形温度分布衰减到 $\exp(-\pi^2/4)$，约为它的初始值的百分之八．这就是说，大约需要花 d^2/κ 个时间单位才能扩散到距离 d 那么远．另一种说法是．在时间 t 内，一种物质大约扩散了 $(\kappa t)^{1/2}$ 个距离单位.

练　　习

1. 热传导的一般初值问题是这样表述的，它的区域是在以凹曲线 C 和平行于 x 轴的一直线[特征曲线]为边界的域 D 上，并在初始曲线 C 上规定了温度值(图 4.4). 试从物理上解释一下为什么这样的表述是合理的.

2. (a) 检验一下一维热方程(8)也适用于非均匀棒.

(b) 利用课文中推导一维问题方程时所用的相同的论证可以推导出三维热传导方程. 考虑穿过一个矩形盒子的六个侧面流入盒内的热量；完成这一推导.

3. 利用课文中所使用的证明唯一性定理的方法，当包围导体所占体积的表面 S 上的边界条件为

$$\frac{\partial\theta}{\partial n}+h\theta=0,\ h>0$$

时，作出唯一性定理的证明. 可以象课文中那样规定初始温度分布.

4. 试把投入冰水中的铜球的冷却问题进行数学表述. 证明它所需要冷却时间比一个直径为其两倍的球所需要的冷却时间要长四倍.

5. (a) 验证(17)式.

(b) (34) 式中的表达式前面可以乘上一个任意常数 c. 试证：这不会给级数解(35)式带来新的普遍性.

6. 棒的右端绝热，从而用 $\partial\theta/\partial x$ 在 $x=L$ 处为零的条件来代替(11)式中的第二个边界条件，试用傅里叶级数来求解这一一维热传导问题.

7. 假设棒的二端都是绝热的，于是不再存在一个唯一的定态解. 讨论这一事实.

8. (a) 验证(37)式和(38)式.

(b) 验证(45)式.

9. 考虑半无限大平板 $z\geqslant 0$ 内的温度 θ. 假设当时间 $t<0$ 时有

$\theta=0$，但是存在有一个温度的跃变，即对于 $t>0$，当 $z=0$ 时有 $\theta=U$（一个正的常数）．求出 $\theta(z,\ t)$．借助于 $\operatorname{erf}\eta=2\pi^{-1/2}\int_0^\eta e^{-s^2}ds$（因此，$\operatorname{erf}\infty=1$）把答案写出来．

在时间 t 内，可望温度向外扩散了一个距离 $(\kappa t)^{1/2}$．而且，除了 z 以外，$(\kappa t)^{1/2}$ 是变量和参数仅有的另外一种具有长度量的组合．由于这两个原因，试寻找扩散方程的一个解，它具有如下形式

$$\theta(z,\ t)=f[z(\kappa t)^{-1/2}].$$

10. 试作一形式为 $v=f(x,\ t)\theta$ 的变量变换，把微分方程

$$v_t=\alpha v_{x,x}+\beta v_x+\gamma v;\ \alpha,\beta,\gamma\ 均为常数$$

转换成为标准形式(9)式．

11. 考虑 C 类函数，它们在闭矩形 $x\in[0,\ L]$，$t\in[0,\ L]$ 内连续，并且在该矩形内部满足热方程(9)．

(a) 利用最大值原理，对于通常的初始边值问题证明这一类函数具有唯一性．

(b) 试证：如果两个 C 类函数在三条边界线 $x=0$，$x=L$，$t=0$ 上的差小于 ε，则它们在整个矩形上的差也小于 ε．

4.2 傅里叶定理

我们已经讲过，如果在区间 $0<x<L$ 中任何合理的函数 $f(x)$ 都可以用一个傅里叶正弦级数[等式(1.36)]来表示，以及形式地求解热方程的初始值问题的过程．因为级数在区间 $(0,\ L)$ 的两个端点的值为零，所以就会很自然地预料到，象

$$f(x)=\frac{x}{L}\left(1-\frac{x}{L}\right)$$

这样的函数可以用级数来代表，而不是象 $f(x)=1$ 那样的函数．然而我们将会看到，在一种适当的意义上——事实上还不止在一种意义上，即使后者也是可能的．

现在来验证关于方程(1.36)的上述说法是正确的．我们将考虑级数(1.36)中的N项之和的极限，并试图算出 $N\to\infty$ 时的极

限值. 我们将看到,假若 $f(x)$ 在区间 $(0, L)$ 内是**分段光滑**的,则该极限在开区间$(0, L)$内趋向 $f(x)$. 如果区间$(0, L)$可以分为有限多个子区间,使得在每一个子区间中,当 x 趋近于子区间的端点时 $f(x)$ 趋近于一个(有限的)极限,并且 $f'(x)$ 存在且连续,那么光滑性要求就能被满足.

因为正弦函数是奇函数,所以,如果在 $(0, L)$ 上正弦级数代表 $f(x)$, 则在 $(-L, 0)$ 上它就代表了 $-f(x)$. 如果要在"全区间" $(-L, L)$ 上表示一个一般的函数那就必须同时用正弦函数和余弦函数. 我们将会看到, 可以容易地将收敛性结果推广到全区间的情形.

傅里叶正弦级数的加法

我们用 $S_N(x)$ 来表示级数(1.36)的前N项之和,因而

$$S_N(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} K_N(x, \xi)f(\xi)d\xi,\ 0<x<\pi, \tag{1}$$

其中

$$K_N(x, \xi)=\sum_{m=1}^{N}\sin(mx)\sin(m\xi),\ 0<x, \xi<\pi. \tag{2}$$

我们要证明当 $N\to\infty$ 时 $S_N(x)\to f(x)$. 为方便起见,在目前这一节中我们都让 $L=\pi$. 这样做并不会丧失普遍性,它等价于在无量纲化的过程中,选择 $\pi^{-1}L$ 作为长度标度.

如果利用复数表示式

$$\sin W=\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}$$

就能比较容易地完成(2)式中的求和. 其答案(练习 1) 为

$$K_N(x, \xi)=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)(x-\xi)\right]}{2\sin\left[\frac{1}{2}(x-\xi)\right]}\right.$$

$$-\frac{\sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)(x+\xi)\right]}{2\sin\left[\frac{1}{2}(x+\xi)\right]}\Bigg\}. \tag{3}$$

如果 x 是区间 $(0, \pi)$ 内部的一个固定点，(3) 式右边花括号内的第一项，除了 $\xi = x$ 以外，对于 $0 \leqslant \xi \leqslant \pi$ 都是很好定义了的。而即使在 $\xi = x$ 处，该项还是有一个确定极限 $N + \frac{1}{2}$。在图 4.5 中示意地给出了该项的图象。在一个很窄的区间 $|x - \xi| < \pi \Big/ \left(N + \frac{1}{2}\right)$ 内，函数有一个很陡的峰值。在这个区间的外面，它呈现出强烈振荡的行为。

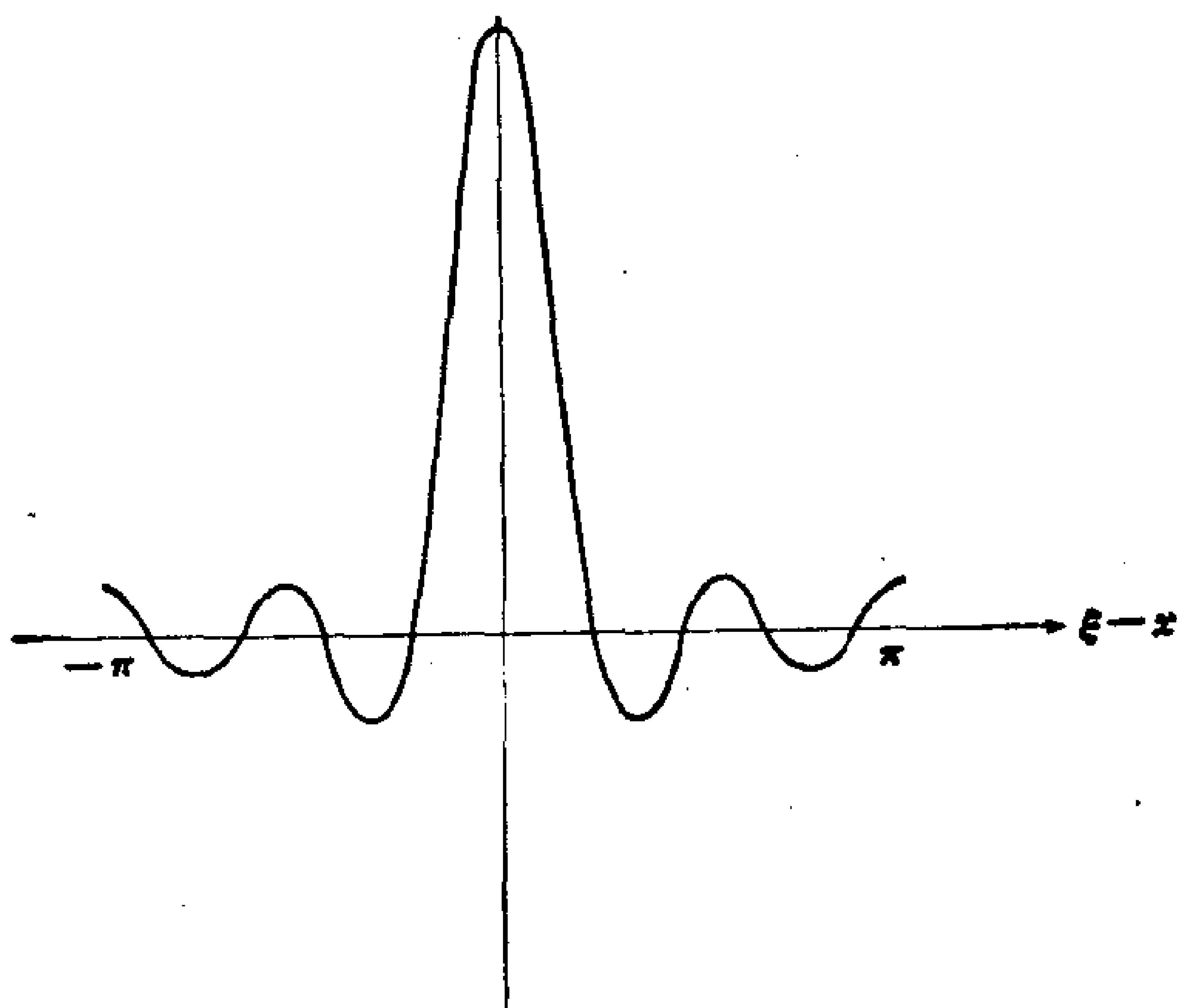


图 4.5 函数 $\sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)(x-\xi)\Big/ 2\sin\left[\frac{1}{2}(x-\xi)\right]\right.$ 的示意图.

(3) 式右边的第二项对于大 N 值也呈现出一种强烈振荡行为，但是没有陡峰。这两项的行为组成了 K_N，记住这一点，现在来考虑 $S_N(x)$，其中

$$S_N(x) = S_N^{(1)}(x) + S_N^{(2)}(x), \quad 0 < x < \pi, \tag{4}$$

式中

$$S_N^{(1)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)(x-\xi)\right]}{2\sin\left[\frac{1}{2}(x-\xi)\right]}f(\xi)d\xi, \qquad (5)$$

$$S_N^{(2)}(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)(x+\xi)\right]}{2\sin\left[\frac{1}{2}(x+\xi)\right]}f(\xi)d\xi. \qquad (6)$$

由于(6)式中被积函数的剧烈振荡性质,可以预料当 $N\to\infty$ 时积分趋近于零. 因为当N很大时,在分子中的正弦函数的周期上,另一个因子实际上是不变的,因此各周期对于积分实质上没有贡献. 对于(5)式,也可以采用类似的论证. 不过,当 ξ 接近 x 时是例外情况,在那里(粗略说来)大因子 $N+\frac{1}{2}$ 被小因子 $x-\xi$ "中和"了. 因此,仅当 ξ 在 x 附近时,$f(\xi)$的行为才是重要的. 我们采用下述引理的形式来叙述这些结论,其证明将在下面给出.

引理 1 若 $\phi(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 内分段光滑,则

$$\int_a^b \phi(\xi)\,{\cos \atop \sin}\lambda\xi d\xi=O(\lambda^{-1}),\ \text{当}\ \lambda\to\infty. \qquad (7)$$

引理 2 若 $\phi(\xi)$ 在闭区间 $[a, b]$ 内分段光滑,则ϕ在点 x_0 处连续,有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b \phi(\xi)\frac{\sin[\lambda(x_0-\xi)]}{x_0-\xi}d\xi=\pi\phi(x_0),\text{当}\ a<x<b.(8)$$

引理 3 若在点 x_0 处,$\phi(x)$ 有一个跳跃间断,(8)式仍然适用,只要我们把 $\phi(x_0)$ 定义为 $\phi(\xi)$ 在 $\xi\to x_0$ 时的左、右极限的平均:

$$\phi(x_0)=\frac{1}{2}[\phi(x_0-0)+\phi(x_0+0)]. \qquad (9)$$

这里,由定义

$$\phi(x_0\pm 0)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\phi(x_0\pm\varepsilon),$$

其中,指向下的箭头意味着 ε 递减至零;即,ε 通过正值趋近于

零.

由引理 1 得 $S_N^{(2)}(x) \to 0$. 根据引理(2),如果定义

$$\phi(\xi) = f(\xi) \frac{x - \xi}{2 \sin\left[\frac{1}{2}(x - \xi)\right]}. \tag{10}$$

则还有 $S_N^{(1)}(x) \to f(x)$. 进而,如果在 $x = x_0$ 处 $f(x)$ 不连续,则在 x_0 处正弦级数的和将是

$$f(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)], \tag{11}$$

与(9)式一致. 这就讲完了傅里叶正弦级数之求和过程——剩下的是证明引理.

引理的证明

为了证明引理 1，在整个区间上将积分拆成有限多个类似的积分,在每一个积分中，函数 $\phi'(x)$ 都是连续的. 取一个典型区间$[c, d]$,进行分部积分,得

$$\int_c^d \phi(\xi)e^{i\lambda\xi}d\xi = [(i\lambda)^{-1}\phi(\xi)e^{i\lambda\xi}]^d{}_c$$
$$- (i\lambda)^{-1}\int_c^d \phi'(\xi)e^{i\lambda\xi}d\xi.$$

由于上式所含的函数都是有界的,故立即得到了引理 1. □(为了方便起见，在被积函数中使用了复指数函数. 因为一个等式中的实部和虚部必须分别相等,故余弦项和正弦项都包括进去了.)

为了证明引理 2，令 (c, d) 为包含 x_0 的一个区间，在这区间内 ϕ 是光滑的. 我们只须在这个区间上考虑积分式(8),这是因为根据引理 1，当 $\lambda \to \infty$ 时其余的贡献都趋近于零. 利用恒等式

$$\phi(x) = \phi(x_0) + [\phi(x) - \phi(x_0)],$$

以及定义

$$F(x, x_0) = \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0}, \tag{12}$$

把问题中的积分写成

$$I(\lambda)=\phi(x_0)\int_c^d \frac{\sin\lambda(x-x_0)}{x-x_0}dx$$

$$+\int_c^d F(x, x_0)\sin\lambda(x-x_0)dx. \qquad (13)$$

当 $\lambda\to\infty$ 时，第一项趋近于 $\pi\phi(x_0)$，这是因为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin v}{v}dv=\pi. \qquad (14)$$

最容易的是采用复平面上的迴路积分法去证明公式(14). 另外，证明积分的收敛性也不困难，而本节中的运算使我们确信积分值为 π.

借助引理 1 能够证明，当 $\lambda\to\infty$ 时 (13) 式中的第二项趋近于零. 由于被积函数有界，所以，预先任意指定一正数 ε，我们能选择一个数 $\delta(\varepsilon)$，使得

$$\left|\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}F(x, x_0)\sin\lambda(x-x_0)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

按照引理 1，在区间 $(c, x_0-\delta)$ 和 $(x_0+\delta, d)$ 内，通过选择充分大的 λ，可以使得积分贡献任意小. 这样便得到了所希望的结果. □

为了证明引理 3，我们把区间 (a, b) 拆成区间 (a, x_0) 和 (x_0, b)，并且重复关于引理 2 的讨论，得到积分

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin v}{v}dv=\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin v}{v}dv,$$

按照 (14) 式，上式的值为 $\pi/2$. 剩下的推导都是很容易的(练习 3). □

一个形式变换

下面着手进行的是一种形式方法，对于迅速获得正确的解答，它是很有用的；但是对于证明解答的正确性，它却并不方便.

如果由下列关系式

$$\lambda(\xi-x_0)=u, \qquad (15)$$

在(8)中引入一个新变量 u，我们便得到一个积分，它的形式为

$$I(\lambda)=\int_{\lambda(a-x_0)}^{\lambda(b-x_0)}\phi\left(x_0+\frac{u}{\lambda}\right)\frac{\sin u}{u}du. \tag{16}$$

从形式上来看，显然有

$$\lim_{\lambda\to\infty}I(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x_0)\frac{\sin u}{u}du=\pi\phi(x_0). \tag{17}$$

然而，为了证明形式极限过程是对的，我们必须记作

$$\phi\left(x_0+\frac{u}{\lambda}\right)=\phi(x_0)+\left[\phi\left(x_0+\frac{u}{\lambda}\right)-\phi(x_0)\right],$$

然后再利用基本上与前面相同的论证.

全范围中的傅里叶级数

正弦级数的各项都是 x 的奇函数，因而，该级数定义了一个奇函数 $f(x)$. 这就是说，若 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 内由级数给出，则在区间$(-\pi, 0)$ 内，通过等式

$$f(x)=-f(-x),\quad -\pi<x<0, \tag{18}$$

这级数定义了 $f(x)$. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 以外，由傅里叶级数定义的函数是周期的：

$$f(x+2\pi)=f(x). \tag{19}$$

满足 (19) 式的周期函数不一定是奇函数. 如果要在区间 $(-\pi, \pi)$ 上表示一个一般函数 $f(x)$，可以采用“全范围”傅里叶级数[1)]

$$f(x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx);\quad -\pi<x<\pi. \tag{20}$$

如果形式地利用方程(1.38)，便得出下列系数表达式(练习 4)：

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx. \tag{21}$$

---

1) 符号“～”表示 (20) 式右边的级数“对应”于 f. 之所以不用等号(若持谨慎态度的话) 是因为级数往往并不收敛于该函数，至少不在通常的“收敛”意义上收敛于该函数.

现在必须证明，如果 (21) 式成立，级数 (20) 在适当的条件下收敛于 $f(x)$.

级数(20)也常常取复数形式

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{22}$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-in\xi} d\xi. \tag{23}$$

请注意

$$c_0 = a_0/2, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n). \tag{24}$$

还应注意，若 $f(x)$ 是实函数，则 $c_{-n} = \bar{c}_n$，这里的横杠表示复共轭. 至于复傅里叶级数的一个应用，请见 II 卷第八章.

傅里叶级数的加法

考虑形如(22)和(23)式那样的级数. 令

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}. \tag{25}$$

于是，利用(23)式，可知

$$S_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(x, \xi) f(\xi) d\xi, \tag{26}$$

现在，其中有

$$K_N(x, \xi) = \sum_{-N}^{N} e^{in(x-\xi)} = \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)(x-\xi)}{\sin\frac{1}{2}(x-\xi)}. \tag{27}$$

但(27)式仅包含了 (3) 式中的一个主要项，因此，根据前面证明过的那些引理可以立即导出所希望的结果. 这样，就有下述定理.

定理 如果 $f(x)$ 在区间 $(-\pi, \pi)$ 内分段光滑，那么它的傅里叶级数——如在(20)和(21)式所定义的，在 $x = x_0$ 处收敛于

$$f(x_0)=\frac{1}{2}[f(x_0-0)+f(x_0+0)]. \tag{28}$$

在端点，这一级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]$.

半范围级数

现在可以对于区间$(0,\pi)$内的傅里叶级数的行为作出了解了．根据"奇性"关系 (18) 式，上述定理表明，在$(0,\pi)$的端点处，级数必定收敛于零．(这并不奇怪，因为级数的各项在端点处都是零．) 因此，当一个在区间 $(0,\pi)$ 内的傅里叶正弦级数被当作区间 $(-\pi,\pi)$ 内的完全傅里叶级数时，它总是代表了一个奇函数，该奇函数在 $x=0$ 处为零，或者它的平均值在 $x=0$ 处为零．

练　　习

1. 验证(3)式．

2. (a)[†] 试证：(14)式的无穷积分是收敛的．

(b) 如果你熟悉迴路积分，请利用这个方法证明(14)式．

(c) 试讨论在用数值方法求 (14) 式中的积分值时所固有的困难．

3. 完成引理 3 的证明．

4. 验证(21)式．

[†]**5.** 如果周期为 2π 的一个函数在 $[-\pi,\pi]$ 上有连续的三阶导数 (包括端点)，试证：当 $n\to\infty$ 时，它的傅里叶系数为 $O(n^{-3})$．

4.3 傅里叶级数的性质

本节要处理的主要课题是：(i) 傅里叶级数的积分和微分；(ii) 伴随着级数非一致收敛性而出现的吉布斯现象；(iii) 傅里叶级数与最小二乘法近似式之间的关系；以及 (iv) 关于傅里叶系数的平方和的 Parseval 定理．但是，在讨论傅里叶级数的一般性

质以前，我们先考察几个简单的例子．我们特别要考虑具有一些简单的幂次和多项式的傅里叶级数．对于每种情况，都要考虑三种可能的展开：

(i) 在完整区间 $(-\pi,\ \pi)$ 内的全范围级数．

(ii) 在区间 $(0,\ \pi)$ 内的正弦级数．

(iii) 在区间 $(0,\ \pi)$ 内的余弦级数．

读者应该对导出下面的(1)，(2)，(4)，(5)，(7)，(8)和(9)式的所有必要的运算都加以验证(练习 1)．

常值函数的傅里叶级数

在完整区间上，关于常数函数 $f(x)=1$ 的级数只有一项，即常数项．所有的高阶项都等于零：

$$a_n = b_n = 0;\quad n \geqslant 1. \tag{1}$$

余弦级数也取同样的形式，因为 $f(x)$ 是偶函数．

正弦级数要有趣得多．它是

$$1 = \frac{4}{\pi}\left\{\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right\},\ 0 < x < \pi. \tag{2}$$

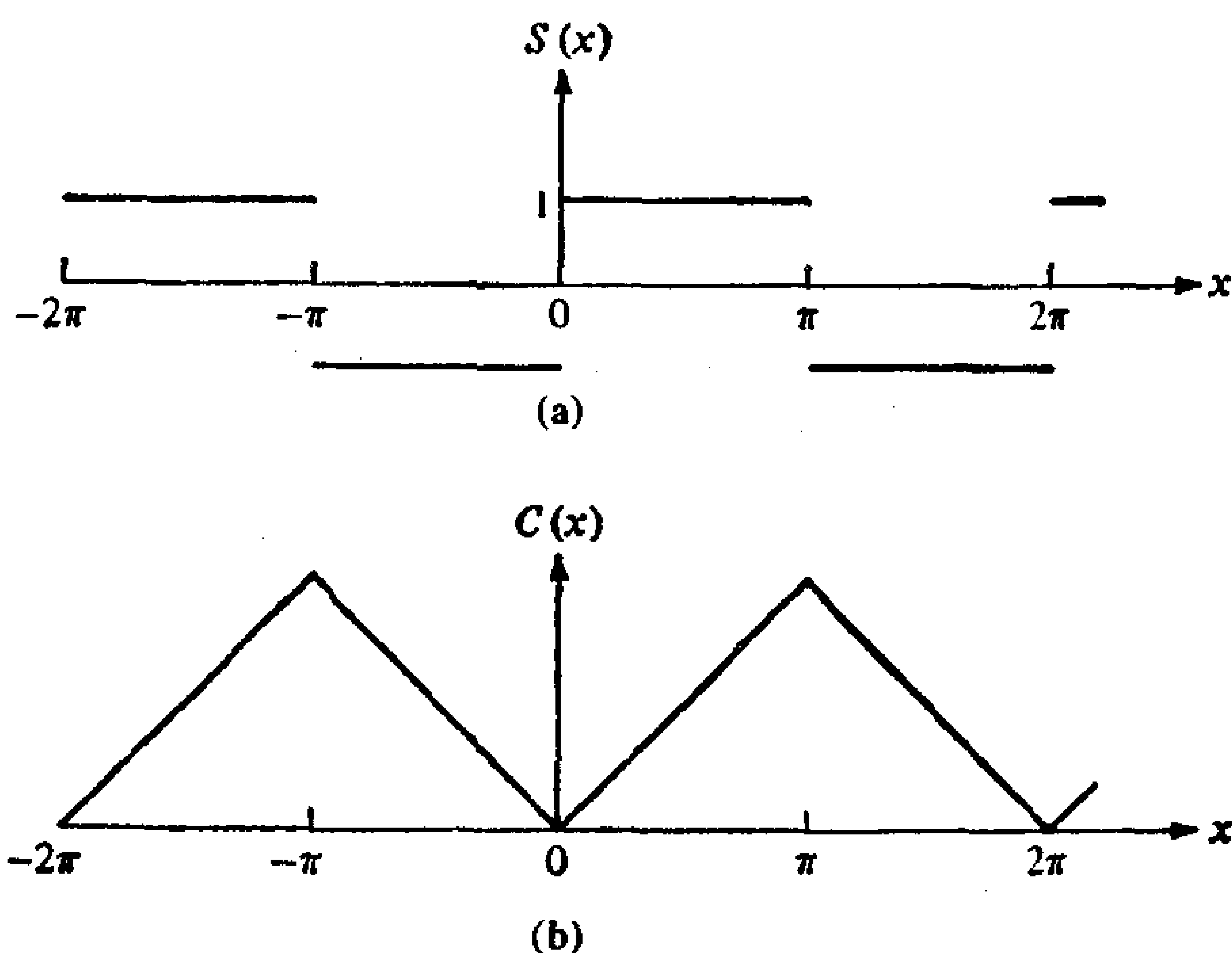


图 4.6　函数 $S(x)$ 和 $C(x)$．

因为正弦函数是奇函数，所以，对于区间 $(-\pi,\ 0)$，以上级数表示-1. 我们把级数(2)所代表的方形波函数记作 $S(x)$. 因此有

$$S(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0,\\ +1, & 0<x<\pi;\end{cases}\tag{3}$$

S 是周期为 2π 的周期函数. 该函数在 $x=0$ 处向上跳跃二个单位而在 $x=\pi$ 处则向下跳跃[图 4.6(a)].

线性函数的傅里叶级数

对于完整区间，$f(x)=x$ 的傅里叶级数是

$$x=2\left\{\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots\right\},\quad -\pi<x<\pi.\tag{4}$$

对于区间 $(0,\ \pi)$，显然，正弦级数仍然由(4)式给出；但是余弦级数在 $[-\pi,\ \pi]$ 内却代表了函数 $|x|$，它是

$$|x|=\pi-\frac{4}{\pi}\left\{\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\cdots\right\},\quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi.\tag{5}$$

我们把级数(5)所代表的函数记作 $C(x)$. 注意，$C(x)$ 是连续的，且在 $x=0,\ \pm 2\pi,\cdots\cdots$ 等处有拐角 [图 4.6(b)]. 还应注意

$$C'(x)=S(x).\tag{6}$$

比较 (2) 式与 (5) 式，或者直接考察函数 C 和 S，便能得到上述结果. 利用(6)式，并对(2)式中的级数从 0 到 x 积分，便有

$$\frac{\pi}{4}C(x)=(1-\cos x)+\frac{1}{3^2}(1-\cos 3x)+\frac{1}{5^2}(1-\cos 5x)+\cdots.\tag{7}$$

在 $x=\pi$ 处，上式给出

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots.\tag{8}$$

读者应该验证，在区间 $(0,\ \pi)$ 内形式地计算级数(2)的平方平均值，也能得到同样的答案. 这是(下面要考虑的) Parseval 定理的一

个特殊情况.

二次函数的傅里叶级数

可以用同样的精神来讨论 $f(x)=x^2$. 但根据经验，我们知道，令人感兴趣的主要是正弦级数. 我们采取间接的方法，对 (5) 式进行形式积分，求得的不是 x^2 而是多项式

$$\frac{\pi}{8}(\pi x-x^2)=\sin x+\frac{1}{3^3}\sin 3x+\frac{1}{5^3}\sin 5x+\cdots. \tag{9}$$

现在由(4)式和(9)式就可求得 x^2 的正弦级数. 把 $x=\pi/2$ 代入这个级数，可以求得关于 π^3 的一个级数[练习 8(b)]. 这个级数比关于 π^2 的级数 (8) 收敛得更快，因而可以用来作为计算 π 的一个相当实用的方法.

傅里叶级数的积分和微分

令 $f(x)$ 为一分段光滑的函数，它的傅里叶级数:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{10}$$

在区间 $(-\pi, \pi)$ 内收敛. 由于收敛不是一致的，所以根据标准定理不能保证级数可以逐项积分. 尽管如此，我们将看到，逐项积分还是容许的. 同样也没有理由认为可以对 (10) 式逐项微分；事实上，(2)式和(4)式就是微分后的级数不再收敛的明显例子[1].

现在我们来更仔细地考察这些问题. (10)式从 0 到 x 的形式积分导致

$$F(x)-\frac{a_0}{2}x\sim\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{a_n}{n}\sin nx+\frac{b_n}{n}[1-\cos nx]\right\}, \tag{11}$$

其中

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt. \tag{12}$$

(10)式的形式微分的结果是

1) 可以用一种适当的方式把微分后的级数加起来，但这一点已经超出了目前的讨论范围.

$$f'(x) \sim 0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx). \tag{13}$$

现在,我们来直接验证(11)式和(13)式,步骤是: (i) 计算有关函数的傅里叶级数,然后 (ii) 检查它们的收敛性. 对于(11)式,计算是直接了当的,读者自己易于验证(练习 3): 若记

$$F(x) - \frac{a_0}{2}x = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx), \tag{14}$$

则有

$$A_n = -b_n/n, \ B_n = a_n/n, \ n \neq 0. \tag{15}$$

级数(14)的收敛性是可以保证的,这是因为 F 是连续的(由于它是一个分段光滑函数的积分). 特别是在 $x=0$ 处, $F(x)$ 连续,且 $F(0)=0$, 故有

$$0 = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{16}$$

从(14)式和(16)式就得到了等式(11).

名堂更多的是(13)式的直接验证. 由于级数的收敛性根本得不到保证, 所以更谈不上它收敛于 $f'(x)$ 了. 为了搞清楚究竟是怎么回事,令

$$\frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n' \cos nx + b_n' \sin nx) \tag{17}$$

表示 $f'(x)$ 的傅里叶级数. 根据 a_n' 和 b_n' 的定义积分的分部积分,并且与 a_n 和 b_n 的相应积分进行比较,求得(练习 3)

$$\pi a_n' = \pi n b_n + (-1)^n [f(\pi) - f(-\pi)], \tag{18}$$

$$\pi b_n' = -\pi n a_n. \tag{19}$$

与(13)式对照可看出,若

$$f(-\pi) = f(\pi), \tag{20}$$

即若该函数是周期函数,而且包括 $-\pi$ 或 $+\pi$ 在内到处都没有间断,则当合成级数收敛时,形式微分是可行的. 傅里叶级数为 (5) 式的函数 $C(x)$ 便是一个例子. 注意 $C(-\pi) = C(\pi) = \pi$. 在这个例子中,可以证明 $C'(x)$ 有收敛的傅里叶级数(练习 4).

对于在 $(0, \pi)$ 内的正弦展开和余弦展开可以作与上述类似的考虑。参照类似于(18)和(19)式的等式可以知道，如果 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 内有正弦展开式，则该展开式可以通过微分 $f(x)$ 的余弦展开式来求得。另一方面，如果一开始我们就从 $f(x)$ 的一个正弦展开式做起，那么一般来说，形式微分是不行的。

吉布斯现象

在刚要进入本世纪的时候，一位美国物理学家 A. Michelson 制造了一部机器，借助于这部机器可以求得以图象给出的函数的头 80 个傅里叶分量。机器分析所得的这一结果可以通过下列方法进行检验，即把所求得的分量加在一起，看看这样得到的函数是否接近于原来的函数。在大多数情况中，它是正确的；但是当用于方波函数 $S(x)$ 的时候，在它的间断点处"出现了一个原来函数中不存在的奇怪的突点。Michelson 感到迷惑不解，猜想也许是机器的某个隐藏着的缺陷引起的毛病。他把他的观察写信告诉了著名的数学物理学家 Josiah Gibbs，征求他的意见。Gibbs 研究了这个现象，并解释了这个现象(发表在 1899 年给**自然**的一篇通讯中)。"[1]

部分和在间断点附近的异常行为称作**吉布斯现象**。考虑到三角函数是无穷可微、而傅里叶级数可以收敛成一个不连续函数这样一个事实，那么，这样一些异常行为或许应该一开始就预见到了。

作为吉布斯现象的一个简单例子，让我们来考虑(3)式中的方波函数 $S(x)$ 及其傅里叶级数在 $x=0$ 附近的行为。这一级数是收敛的，部分原因是由于相继项的大小是递减的，另一方面是由于正弦函数的符号改变。然而对于非常小的 x 值，如果 $(2k+1)x < \pi$，那么这种振荡行为对于前 k 项说来并不明显。所有这些项都是正的。事实上，现在就要证明，只要 $(2k+1)x$ 是有限的，与最终值之间总将存在着偏差。因此可以预期，仅当 $(2k+1)x$

---

1) 引文取自 C. Lanczos 所著的 *Discourse on Fourier Series* (Edinburgh: Oliver & Boyd, 1966)。这本书是进一步了解傅里叶级数的一本极好的资料。其思路与我们所讲的相似，但是它的材料却要丰富得多。

$\to\infty$ 时，(2)式中的部分和才会趋近于极限值.

对于 $S_N(x)$，特别是对于(3)式中的方波函数 $S(x)$，运用公式(2.26)和(2.27)，我们可知

$$S_N(x)=\frac{1}{2\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0}+\int_{0}^{\pi}\right)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)(x-\xi)}{\sin\frac{1}{2}(x-\xi)}d\xi. \tag{21}$$

在区间 $(-\pi,\ 0)$ 和 $(0,\ \pi)$ 内，分别引入变换 $\theta=x-\xi$ 和 $\theta=\xi-x$. 于是(21)式成为

$$S_N(x)=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{x+\pi}^{x}+\int_{-x}^{\pi-x}\right)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}d\theta. \tag{22}$$

[练习 6(a) 要求读者去证明上列式子，并证明下面的(23)、(25)、(26)以及(27)式.]等式(22)也可以写作

$$S_N(x)=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-x}^{x}+\int_{\pi+x}^{\pi-x}\right)\sin\frac{\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}d\theta. \tag{23}$$

$S(x)$ 的间断点之一在 $x=0$ 处. 让我们来集中讨论部分和 $S_N(x)$ 在该点邻近的行为，而 x 则取正数值. 当 x 很小时，第二项的作用也很小，这是因为被积函数中的分母接近于 1. 对于第一项，记以

$$N+\frac{1}{2}=m,\ m\theta=\eta, \tag{24}$$

由此便得

$$S_N(x)\approx\frac{1}{\pi}\int_0^{mx}\frac{\sin\eta}{m\sin(\eta/2m)}d\eta=I_N(x). \tag{25}$$

再记以

$$I_N(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{mx}\frac{\sin\eta}{\eta}\frac{(\eta/2m)}{\sin(\eta/2m)}d\eta,$$

我们看到，对于 x 的任意固定正数值，不管它是多么小，都有

$$\lim_{N\to\infty} I_N(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin\eta}{\eta}\, d\eta = 1. \tag{26}$$

另一方面，对于固定的 $y = mx = \left(N + \frac{1}{2}\right)x$，我们有

$$\lim_{N\to\infty} I_N(x) = \frac{2}{\pi} Si\left[\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right], \tag{27a}$$

其中的**正弦积分函数** Si 定义为[1]

$$Si(y) = \int_0^y \frac{\sin\eta}{\eta}\, d\eta. \tag{27b}$$

$Si(y)$ 的第一个极大值出现在 $y = \pi$ 处[练习 5(a)]。因此，$I_N(x)$ 和 $S_N(x)$ 在 $x \approx \pi\Big/\left(N + \frac{1}{2}\right)$，或者 $Nx \approx \pi$ 处近似地达到了峰值

$$S_{\max} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\eta}{\eta}\, d\eta \approx 1.179. \tag{28}$$

这意味着，在我们仅仅考虑第一组正项时，级数 (2) 的部分和达到了最大值，这正是我们大体上所预料的结果.

评论　把 S_N 与积分作这一比较，就可以采用下列尝试性的推理来导出 (27) 式. 如果用 h 表示 $2x$，并与以前一样引入

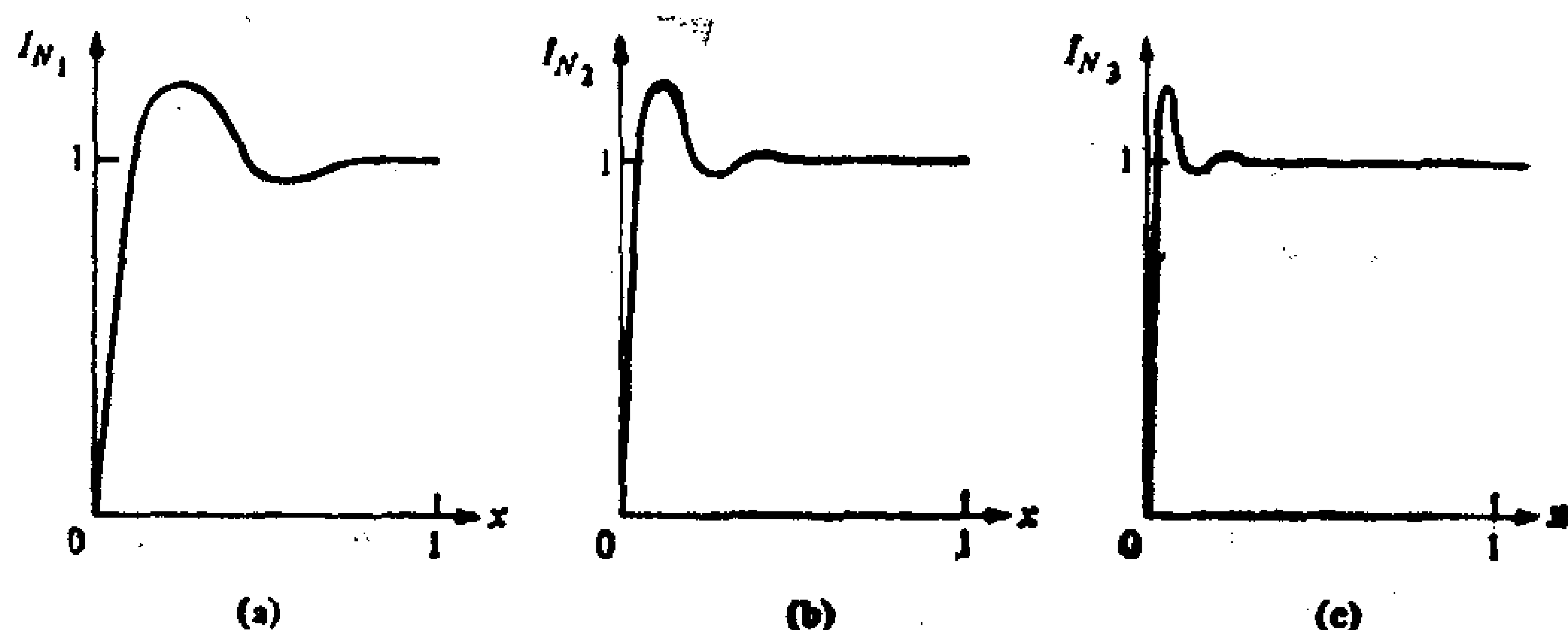


图 4.7　$I_N(x)$ 的定性图象，N 的取值分别在 (a)、(b) 和 (c) 逐一增大. 随着 N 增加，陡峰连续地变窄并移向任一固定点 x 的左边. 当 $N\to\infty$ 时 $I_N(x)\to 1$. 但是陡峰是始终存在的；因此对于任意 N，总是存在有 x 的小正数值，使得 $|I_N(x) - 1|$ 并不小，因而对于 $0<x<1$ 不是一致收敛的.

1) 关于 Si 的公式、图象和表格，参见 Abramovitz 和 Stegun (1964, pp. 231 ff.).

$y=\left(N+\frac{1}{2}\right)x$，就可以把 $S_N(x)$ 写成一个和式，它近似地等于(27)式中的积分．我们要求读者在练习 6(b) 中完成这一推导．

公式（27a）表明，当N很大时，使得 $I_N(x)$ 跟它的极限值 1 $\left[当\ x>0,\ \left(N+\frac{1}{2}\right)x\to\infty\right]$之间存在着偏差的那些 x 值限制在 $x=O(N^{-1})$ 的范围内． 当 $N\to\infty$ 时，最大误差保持有限，约为百分之十八，但是误差明显存在的范围在 $N\to\infty$ 时却缩减至零． 这是典型的吉布斯现象． 对于收敛但不是一致收敛的级数，这是一个极好的实例(图 4.7)．

具有最小二乘误差的近似

研究傅里叶级数的点态收敛性极其有趣，因而当然希望对这一近似方法作一更简单的剖析． 一种简单的方法便是最小二乘法，它具有更大的普遍性，首先是由 Gauss 提出来的．

考虑三角函数的一个有限和

$$\tilde{S}_N(x)=\sum_{n=-N}^{N}\gamma_n e^{inx},\quad \gamma_{-n}=\bar{\gamma}_n. \tag{29}$$

如果想要这个和逼近一给定的函数 $f(x)$，就要使得差

$$\varepsilon_N(x)=f(x)-\tilde{S}_N(x) \tag{30}$$

在某种意义上尽可能地小． 这可以通过适当选择待定系数 γ_n 使得下列**均方误差**取极小值来做到这一点：

$$M=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varepsilon_N^2 dx. \tag{31}$$

(31)式定义的量M是系数 γ_n 的一个二次函数，因此，它取最小值的必要条件是要求满足联立线性方程

$$\frac{\partial M}{\partial\gamma_n}=0. \tag{32}$$

方程(32)给出条件

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-\tilde{S}_N(x)]e^{inx}dx=0,$$

或条件

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx,\ n = 0, 1, 2, \cdots, N. \tag{33}$$

读者易于验证这些条件[练习 7(a)]. 因此，量 γ_n 是由 (2.23) 式定义的傅里叶系数，记作 c_n. 事实上，略作运算就能证明

$$M = \langle f^2\rangle - \sum_{n=-N}^{N}|c_n|^2 + \sum_{n=-N}^{N}|c_n - \gamma_n|^2, \tag{34}$$

其中 $\langle f^2\rangle$ 表示 f^2 的平均值(在区间 $[-\pi, \pi]$ 上):

$$\langle f^2\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

如果注意到当 γ_n 可变时，只有最后一项我们可加以处置，那么就能清楚地看出，为了使误差取最小值，必定要有 $\gamma_n = c_n$，这一条件也是充分的.

注意，系数 γ_n 是由(33)式最终决定的；如果在近似和式 (29) 中取更多的项，则这些系数是不改变的。

可以把最小二乘法用各种方式加以推广. 例如，假如有函数 $\phi_0(x)$，$\cdots$，$\phi_n(x)$ 的一个无穷集，这些函数满足下列条件:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\phi_m(x)\phi_n(x)w(x)dx = \delta_{mn}, \tag{35}$$

其中涉及一些给定的非负函数 $w(x)$. 在指出这样一组函数的用途以前，先提一些经常用到的术语. 根据定义，当 $m \neq n$ 时条件(35)乃是这些函数的一个性质：它们在区间 $[-\pi, \pi]$ 上对于权函数 w 是正交的. 我们说，当 $m = n$ 时条件(35)给出了该函数集的正规化，因为它把 ϕ_n 的一个任意常数因子确定了下来. 相互正交和正规化的函数称作是正交的. (后面的讨论将会说明为何要用术语“正交”.)

给定一组函数，它们满足正交条件(35)，我们就可以试图用有限和

$$\tilde{S}_N(x) = \sum_{n=0}^{N}\gamma_n\phi_n(x), \tag{36}$$

并使加权均方误差取最小值

$$M_w = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon_N^2(x) w(x) dx}{\int_{-\pi}^{\pi} w(x) dx}, \tag{37}$$

在区间 $(-\pi, \pi)$ 内逼近一个任意函数 $f(x)$. 其中, $\varepsilon_N(x)$ 是由(30)式定义的. 注意,在 M_w 的计算中, w 相对较大的那些 x 处的误差,其权重也较大,故称之为"加权"误差.

令 $\langle\ \rangle_w$ 表示加权平均值,因此

$$\langle f^2 \rangle_w = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) w(x) dx.$$

故得(34)式的推广式如下[练习 7(a)]:

$$M_w = \langle f^2 \rangle_w - \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 + \sum_{n=-N}^{N} |c_n - \gamma_n|^2, \tag{38}$$

其中

$$c_n = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \phi_n(x) w(x) dx}{\int_{-\pi}^{\pi} w(x) dx} \tag{39}$$

把这些 γ_n 选得与(39)式所定义的那些 c_n 一样,就会使误差取最小值.

对于给定的 $w(x)$ 构造出函数组 $\phi_n(x)$,这种方法基本上就是将要在 5.2 节中讨论的 Gram-Schmidt 过程的方法. 在这里我们不打算讨论这一过程,只是想说,完全可以采用按部就班的方式来进行处理,即使限制了 $\phi_n(x)$ 为 n 次多项式也照样可以处理. 为了给出一个示例,我们仅仅举出勒让德多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad -1 < x < 1. \tag{40}$$

可以把它们看作是定义在区间 $(-1, 1)$ 上的一些多项式,它们在非加权的意义上 $(w = 1)$ 相互正交. 习惯上,给勒让德多项式所加的正规化要求不是

$$\int_{-1}^{1} P_n^2 dx = 1$$

而是 $P_n(1) = 1$.

贝塞耳不等式和 Parseval 定理

若把 $\gamma_n = c_n$ 代入(34)式，由于 $M > 0$，我们便得到**贝塞耳不等式**

$$\sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 \leqslant \langle f^2 \rangle, \tag{41a}$$

用实系数表示出来[参照(2.24)式]，就是

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2) \leqslant \langle f^2 \rangle. \tag{41b}$$

假如除了有限多个间断点以外，傅里叶级数按点态方式收敛，则

$$\lim_{N\to\infty} M = 0,$$

从而

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n^2| = \langle f^2 \rangle \tag{42a}$$

或

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \langle f^2 \rangle \tag{42b}$$

这两个等式就是 **Parseval 定理**. 可以从(2.20)或(2.22)式形式地求得它们.

甚至当均方误差不趋近于零的时候，不等式(41)还是确保了(42)式中的无穷级数具有收敛性.

Riesz-Fischer 定理

假如我们现在提出下列问题，它可以看成是 Parseval 定理的逆问题，给出一组实数 $a_0, a_m, b_m, m = 1, 2, \cdots, \infty$，使得级数

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2)$$

收敛，那么，是否存在有一个函数 $f(x)$ 使得级数

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{43}$$

是它的傅里叶级数?

这个问题的肯定答案取决于要引入勒贝格测度和勒贝格积分等概念. 随着这些概念引入之后,就得到 Riesz-Fischer 定理[1], 它可以叙述为 (i) 级数 (43) 确实是函数 f 的傅里叶级数,它是平方可积的; (ii) 级数的部分和平均收敛于 f.

从数学观点来看, 我们提出的问题是个很自然的问题. 看起来它会有一个简单的解,但正是在这儿,产生出新的数学概念和理论. 另一方面,就物理应用而言,这一数学问题就不会这么自然地被提出来.

Parseval 定理的应用

上面是理论性的讨论, 现在我们来考虑 Parseval 定理的一些基本的应用,这是有实际意义的. 特别是我们将指出,根据普朗克的辐射定律计算斯蒂芬辐射常数时所出现的积分是如何计算的. 如练习(9)所指出的那样,该积分是

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x^3dx}{e^x-1}. \tag{44}$$

首先我们注意,如果在(2)式中令 $x=\pi$, 然后应用 Parseval 定理,就得到(8)式的另一种推导法. 其次, 若把 Parseval 定理应用于(5)式,就得到[练习 7(b)]

$$1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{96}. \tag{45}$$

为了如练习(9)所要求的那样去计算(44)式,把被积函数中的分母展成 e^{-x} 的幂级数,并且逐项积分, 从而得到下式的一个常数倍:

1) 参看 E. C. Titchmarsh 所著的 *Theory of Functions* (Oxford: Oxford University Press, 2nd ed., 1949), p. 423.

$$S_4=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots, \tag{46}$$

此式与（45）式不同，这儿出现了全部整数而不单是奇整数．但 S_4 和级数（45）有联系，因为那些偶数项构成了 $2^{-4}S_4$，因此[练习7(b)]

$$S_4=\pi^4/90. \tag{47}$$

如果提出要求出 S_4 的和这样一个问题，那么，恐怕很少有人能够通过傅里叶级数这样一条表面上是迂迴曲折的道路得到(47)式的答案．因此，我们的运算可以看成是一个示例，显示了数学分析所具有的可能是意料不到的适用性．

练　　习

1. 证明下列傅里叶级数的运算：(1),(2),(4),(5),(7),(8)[两种做法——见(8)式下面的说明]，以及(9)式．

2. 完成(9)式下面所概述过的运算．

3. 证明(15),(18)和(19)式．

4. 试证：$C'(x)$ 有一个收敛的傅里叶级数．

5. (a) 试证：正弦积分函数的第一个极大值出现在 $y=\pi$ 处．

(b) 不去参考文献，就你所能，试推导出正弦积分函数的尽可能多的性质．

6. (a) 验证(22),(23),(25),(26)和(27)式．

(b) 完成(28)式下面所描述的试探式的推理过程．

7. (a) 验证(33),(34)和(38)式．

(b) 验证(45)和(47)式．

(c) 为什么平均立方误差不是一个有用的概念？

8. 借助于本节证明过的一些结果，试证：

(a) $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$

(b) $\frac{\pi^3}{32}=1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\cdots.$

(c) $\frac{\pi^4}{96} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \cdots$.

(d) 利用级数 (c) 算出 π 的近似值.

9. (a) 利用课文中的提示，试证

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}.$$

(b) (a) 中的积分出现于热辐射理论中. 如物理学课本中所讨论过的那样，按照普朗克定律，温度 T 时的辐射密度 $u(\nu)$ [指单位体积，频率 ν 的单位范围内]为

$$u(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3/c^3}{\exp(h\nu/kT) - 1},$$

这里 h 是普朗克常数，k 是玻耳兹曼常数.

试证：温度 T 时，在一空腔内的总辐射密度为

$$\frac{8\pi^5 k^4}{15 h^3 c^3} T^4,$$

它就是著名的斯蒂芬定律，给出了对于温度的四次幂的比例关系.

10. 对于级数(2)中的许多项之和作出数值计算，以便对吉布斯现象作实际观察. 把结果画出.

11. 假定一根棒的初始温度本来是均匀的，两端突然变为零度，试把热方程之解的许多项之和进行数值计算. 注意，一般而言这时不存在吉布斯现象. 你能够想出存在有吉布斯现象的一种情形吗?

12. 本练习与非齐次边值问题

$$\frac{d^2y}{dx^2} + ky = f, \quad 0 < x < \pi; \quad y(0) = y(\pi) = 0 \qquad (48)$$

有关. 这里 k 为一个给定常数，f 是 x 的给定函数.

(a) 利用分部积分法，试证：如果(48)式有一解，则对于

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + k\phi = 0, \quad 0 < x < \pi; \quad \phi(0) = \phi(\pi) = 0$$

的所有解 ϕ，f 必须与之正交［在区间 $(0, \pi)$ 上，权函数为1］.（这个必要条件将在练习7、2、11中用到，与应用扰动理论求特征值有关.）

(b) 假定

$$f=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx, \quad y=\sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin nx.$$

由于 f 是已知的，所以 c_n 就是傅里叶正弦级数的已知系数. 问题是要确定 k_n. 采用代入(48)式的办法去定出它们. 试证：存在着零个、一个或任意多个解，这要取决于 f 的性质.（这是"Fredholm 互斥性"的一种特殊情况.）这些结果与(a)中的结论是相容的吗？

第五章　傅里叶分析的进一步讨论

在第四章中，我们考察了热传导问题的简单形式，介绍了由试图求解这个问题而产生的傅里叶级数学理论的某些方面．我们的讨论遵循了历史发展的顺序，并可作为用以说明应用数学作用的一个专题研究．

在本章中，我们还是本着这个精神去做研究，不过水平要稍高一些．我们又一次从特殊问题出发来概述具有广泛的适用范围和意义的理论和方法．

我们首先考虑几个特殊的热传导问题．非均匀介质中的热传导问题的研究，导致了比调和函数更普遍的本征函数的讨论．无穷均匀介质的情况将引向傅里叶积分这一论题．其后再指出，按照傅里叶级数或傅里叶积分作时间序列分析(例如气象记录)往往是方便的，但是这样做并不是充分的，也存在着不能这样表示的时间序列，需要采用广义调和分析理论，因而对此作一扼要介绍．

5.1　热传导的其他方面

本节一开始先把地球年温度变化的研究化为均匀介质中的热传导这样一个比较简单的问题．简单的计算就可以阐明解的主要特点．然后，我们把讨论转向传热方程的数值分析．最后，借助于非均匀介质中的热传导问题来说明数值方法和分析方法混合使用的优点．

地下温度的变化

在地面上，时刻 t 的日平均温度 $f(t)$ 可以看作是以一年为周期在作变化．我们可以把这一变化表示为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2\pi int/T}, \text{其中 } \bar{C}_n = C_{-n}, \ T = 1 \text{ 年}. \quad (1)$$

我们想要知道随后的地下温度(比方说,在油井内)变化. 由于所涉及的深度只是几米的数量级, 因此我们可以忽略地面的曲率. 这两个近似——忽略日变化和忽略曲率——使我们可以建立一个简化模型. 原则上可以通过分析包含曲率和日变化效应的模型来验证这种近似. 然而这样做是相当复杂的, 而且也确实是不值得的,至少在现阶段是如此. 但是利用某些参数很小这一事实,我们对于简化问题可以给出一个似乎合理的论证. 采用一种可以推荐给读者普遍使用的处理方法,这样我们在试图进行详细运算之前,就可以立即来概述上述论证.

在简化模型中,时刻 t、深度 x 处的温度分布 $\theta(x, t)$ 所遵循的方程是通常的热传导方程,

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}, \quad (2)$$

这里 κ 是土壤的温度扩散率,其值近似于

$$\kappa = 2 \times 10^{-3} \text{ 厘米}^2/\text{秒}. \quad (3)$$

相应的时间尺度 T 是 1 年:

$$T = 3.15 \times 10^7 \text{ 秒}. \quad (4)$$

在时间 T 内, 以扩散率 κ 扩散的物质, 它的散布距离的数量级为 $\sqrt{\kappa T}$. 这是扩散的一个基本事实(见 4.1 节末尾). 在现在的例子中,这一长度尺度为

$$\sqrt{\kappa T} \approx 250\text{厘米} \approx 8 \text{ 英尺}. \quad (5)$$

对于日变化,时间尺度是 $T/365$, 因此长度尺度就要比(5)式小一个因子 $\sqrt{365} = 19$. 因而, 忽略日变化所产生的误差预计为 5% 或 10%,而当局限在几米的深度之内时,地球曲率对于这一现象所产生的影响是完全可以忽略的.

为了按照我们的简化模型去求出地下温度, 首先注意边界条件 $\theta(0, t) = f(t)$, 其中 $f(t)$ 由(1)式给出. 我们以下列形式的解作为试探:

$$\theta(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n w_n(x) e^{2\pi int/T}, \tag{6}$$

其中 $\bar{C}_n = C_{-n}$，因此 θ 为实数.（横杠表示复共轭)我们作下列规定:

(i) 每项都满足(2)式.

(ii) $w_n(0) = 1$，从而(1)式将得到满足.

(iii) $w_n(x)$ 保持有界,且当 $x \to \infty$时估计应该趋于零（$n \neq 0$），这是因为极深处的温度对表面温度的变化不会是敏感的.

所有这些规定都能够满足吗？我们必须通过计算搞清楚.

由第一个规定可得下列 $w_n(x)$ 的常微分方程:

$$\frac{d^2 w_n}{dx^2} = p_n^2 w_n, \quad p_n^2 \equiv \frac{2\pi in}{\kappa T} \tag{7}$$

p_n 的可能值为

$$p_n = (1 \pm i) q_n, \text{ 其中 } q_n = \left(\frac{|n|\pi}{\kappa T}\right)^{1/2} > 0 \tag{8}$$

而±号是按 $n \gtrless 0$ 的情况分别选取的（练习 1). 故（7）式的通解为

$$w_n(x) = A_n e^{(1\pm i)q_n x} + B_n e^{-(1\pm i)q_n x}. \tag{9}$$

由于条件（iii)，我们必须有 $A_n = 0$. 为了满足条件（ii)，我们必须有 $B_n = 1$. 因此,解(6)的最后形式成为

$$\theta(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-(1\pm i)q_n x} e^{2\pi int/T}. \tag{10}$$

为了强调θ 是实函数,我们把复系数写成极坐标形式,设:

$$C_n = |C_n| e^{i\gamma_n} \text{ 故有} C_{-n} = \bar{C}_n = |C_n| e^{-i\gamma_n}. \tag{11}$$

于是,方程式(10)便成为

$$\theta(x, t) = |C_0| + 2\sum_{n=1}^{\infty} |C_n| e^{-q_n x} \cos\left(2\pi n \frac{t}{T} + \gamma_n - q_n x\right). \tag{12}$$

为了对这个解作出解释,我们首先注意到,余弦因子代表了一

个频率为 $2\pi n/T$、波数为 q_n 的波。(如果不熟悉这方面的知识，请参考 12.2 节)因此第 n 个"分波"以速率:

$$\frac{2\pi n}{q_n T}=\left(\frac{4\pi\kappa|n|}{T}\right)^{1/2} \tag{13}$$

传播．另外，在传播方向上存在有指数形式的阻尼．由(8)式，其阻尼系数 q_n 会按如 $|n|^{1/2}$ 那样增加．

常数 $|C_n|$ 和 γ_n 给出了各种阻尼波的波幅和相位．它们可由初始条件求得，但这对于我们所要寻求的一般了解几乎无所裨益．

由于阻尼随 n 增加，所以对于解的最重要的贡献来自 $n=1$ 的那一项．采用上面所引用的数值，其中 $\sqrt{\kappa T}\approx 250$ 厘米，我们从(8)式得到

$$q_1\approx 0.71\ \text{米}^{-1}. \tag{14}$$

因此，在点 $x_1=4.4$ 米处，$qx_1=\pi$；温度与表面条件反相，但其幅度下降到地面温度幅度的 $e^{-\pi}=0.0435$ 倍．**当地面上是夏天时，在 4.4 米深处却是冬天．**然而，此处的温度变化大约仅是地面变化的百分之四左右．这一点表明在深地窖里储藏酒和蔬菜的好处．

如上面所指出的，日变化的渗透性要浅得多；所有变化都发生在很薄的一个表面层里．在很多过程中都有这种现象，例如电磁学中的趋肤效应即如此．II．练习 3、2、1 就是讨论一个振荡平面边界在粘滞液体中所产生的完全类似的效应．

在所有这些情况中，基本要素都是某一个量随时间的周期变化，这一量的分布是由扩散过程决定的，而基本项则如(2)式所示．

传热方程的数值积分

随着大型计算机的出现，在分析方法与数值方法的优越性之间出现了新的平衡．至此，我们都集中于使用分析方法．不过，我们已经无意中讨论了传热方程数值积分的基础．因为，由有限差分法求得传热方程近似解的自然方程就是差分方程(3.3.1)，它是

我们讨论随机走动的基础.

事实上,考虑差分方程:

$$\theta(x,\ t+k)-\theta(x,\ t)=\frac{1}{2}[\theta(x-h,\ t)+\theta(x+h,\ t)]-\theta(x,\ t), \tag{15}$$

[此式等价于(3.3.1)式]. 对于小的 h 和 k 取近似,得:

$$k\theta_t(x,k)+O(k^2)=\frac{1}{2}\Big[\theta(x,\ t)-h\theta_x(x,\ t)+\frac{h^2}{2}\theta_{xx}(x,\ t)+O(h^3)+\theta(x,\ t)+h\theta_x(x,\ t)+\frac{h^2}{2}\theta_{xx}(x,\ t)+O(h^3)\Big]-\theta(x,\ t)$$

或

$$\theta_t=\frac{h^2}{2k}\theta_{xx}+O(k)+O\left(\frac{h^3}{k}\right).$$

固定 h^2/k, 在 $h\to 0$, $k\to 0$ 时的形式极限下,便得扩散方程:

$$\theta_t=D\theta_{xx},\ D\equiv\frac{h^2}{2k} \tag{16a, b}$$

现在,如果从微分方程(16)出发,并把(15)式看作一个"近似",就必须坚持认为 $h=\Delta x$ 和 $k=\Delta t$ 是由下式所联系的:

$$\Delta t=\frac{(\Delta x)^2}{2D}.$$

因此,当与 x 的剖分相比时, t 的增量要小一个量级. 事实上,关于数值分析的书中证明了一个极其重要的有关结果,即若

$$\Delta t<\frac{(\Delta x)^2}{2D} \tag{17}$$

则分析中的有限差分法是**稳定的**. 其意思是说,如果初值改变了一个小量,则解也发生了同样量级的变化. 另一方面,若间隔 Δt 很大,使(17)式的不等号反向,则该方法是**不稳定的**.这时,初始条件中的任何小误差(或不可避免的小舍入误差)最终会使其后的计算值产生大误差.

参照图 5.1,我们看到,根据(15)式我们可以根据 P 点及其邻

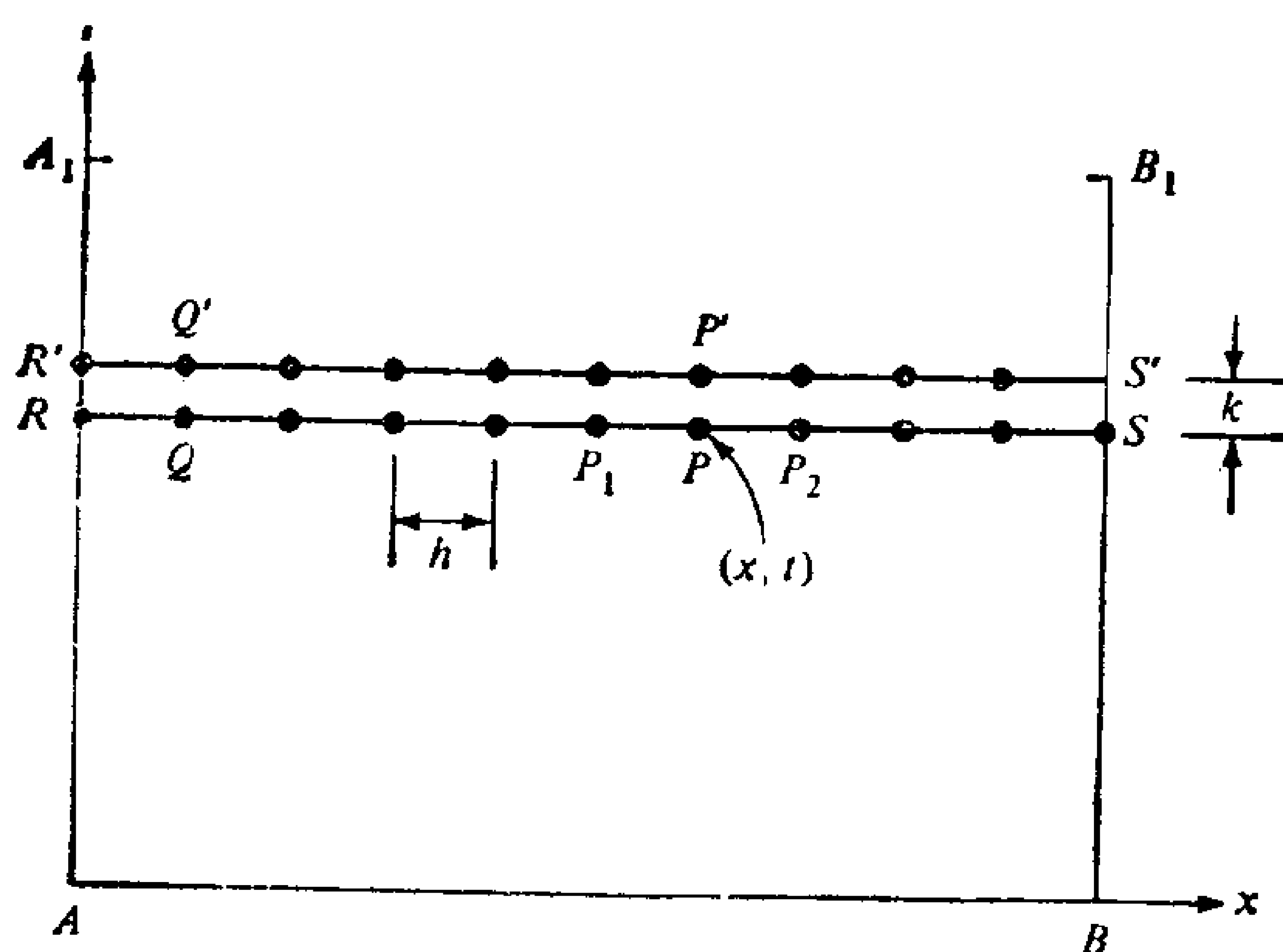


图 5.1 传热方程的数值分析中所涉及的网格点．特别是，为了求得 $P'(x, t+k)$ 处的温度 θ，需要知道 $P(x,t)$，$P_1(x-h,t)$ 和 $P_2(x+h,t)$处的 θ.

点 P_1 和 P_2 处的值求得内点 P' 处 $u(x, t)$ 的值．对于 Q' 可以得到同样的条件．对于边界点 R' 和 S'，情况就不同了；但若 u 是沿边界 AA_1 和 BB_1 给定的，则数值积分过程仍然是可行的．[若边界条件是绝热的，则取 $u(R') = u(Q')$ 以与 $\partial u/\partial x = 0$ 一致．] 因而在整个区域 A_1ABB_1 内都能求解[1].

在无限长杆（$-\infty < x < +\infty$）的热传导问题中，预料温度分布会趋于常数值，而无穷远处的导数则为零．倘若取充分大的区间 $-A < x < A$，并且在其端点加上适当的条件，那么有限差分法仍然能够使用．

分析方法与数值方法的比较，清楚地表明前者可以更好地洞悉问题本质．例如，毫无疑问，可以用数值方法发现温度分布对于其稳态的偏离最终成为正弦型的，但是分析解（方程 4.1.41）直接地、清楚地表明了这一点．还有，第三章中考虑的源解显然是很难

1) 我们的问题是适定的（well posed）．这种信念产生于如下事实的核验：采用一种直捷了当的数值格式，至少在原则上能够求得偏微分方程加上相应的边界条件和初始条件的一个解．在 II. 附录 3.1 中可以找到关于这种事实的另一种核验，还有适用于更复杂问题的一种数值格式．

用数值法来描述的.

数值解的主要优点在于当微分方程不具有简单形式时它所具有的更大的普遍性. 分析方法之所以能漂亮地解决问题, 主要是因为微分方程是线性的而且系数是常数. 事实上其几何形状也必须很简单. 假设我们遇到一个涉及非均匀材料的问题. 在下节中将会看到,分析方法就会变得繁复了. 况且,对于非线性问题, 分析方法即便还是可用的话, 往往也是非常笨拙的. 但即使对于这类问题还是存在着分析法比纯数值法优越的某些情况, 主要是当涉及到奇点和其他迅速变化的情况. 一般而言,混合法,即这两种方法同时兼用是最切合实际的.

使用混合方法时,一开始可以先分析一种粗糙模型,以便求出最重要的效应并决定有关参数的范围. 然后, 再对比较完全的模型作出数值分析,便可以得到所需的细节. 对于了解甚少的问题, 首先从少量数值试验出发, 对现象取得一般了解, 这样做是明智的. 借助于这种了解,我们往往就能提取现象的核心部分,加以分析研究. 这样有助于再回到计算机上去获得详细图象.

含有大量参数的三维问题也许将在很长一段时间内完全用数值分析是无能为力的. 而且,即使数值分析可资应用的话,得到的过多的数据对于一般人也是没有什么用途的, 除非他从某种分析角度已经对问题有了认识.

非均匀介质中的热传导

现在我们来研究一个例子,它示明了混合方法的某些优点,并且引出了一个重要的课题称为 Sturm-Liouville 理论.

假设我们要处理的是一种成分不均匀的合金内的热传导问题. 于是,密度 ρ, 比热 c 和热传导率 k 都是位置的函数. 如 4.1 节中所述,热传导方程便为

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial \theta}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial \theta}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial \theta}{\partial z}\right) \tag{18}$$

或

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla \theta).$$

这个方程仍然具有变量 t 已被分离出来的简单解：

$$\theta(x, y, z, t) = U(x, y, z) e^{-\lambda t}. \tag{19}$$

在一维情况中，U 满足一个常微分方程

$$\frac{d}{dx}\left(k \frac{dU}{dx} \right) + \lambda \rho c U = 0, \tag{20}$$

其中 k，ρ 和 c 是变量 x 的函数。

一般而言，不能用简单的分析方式求得(20)式的显示解，但我们可以通过与均匀介质的情况作类比，仍然能够对于它的解获得本质的了解．为确定起见，我们来考虑一个特殊问题，这是端点位于 $(0, L)$ 的一根杆，两端温度保持在零度，因此

$$U(0) = U(L) = 0. \tag{21}$$

我们来扼要重述一下我们关于均匀情况下的工作． 当 k，ρ 和 c 为常数时，仅当 $\lambda = \mu_n$ 时(20)式有非平庸解，其中

$$\mu_n = \frac{k n^2 \pi^2}{\rho c L}, \ n = 1, 2, \cdots. \tag{22}$$

相应的解是

$$U_n(x) = \sin \frac{n \pi x}{L} \tag{23}$$

的常数倍．相应于特别初始值的解可以通过迭加求得．

在现在情况下，通过与刚才陈述的进展过程以及与(6)式作类比，我们期望具有下式形式的解：

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) e^{-\lambda_n t}. \tag{24}$$

这里，每个 $U_n(x)$ 是由微分方程 (20) $(\lambda = \lambda_n)$

$$\frac{d}{dx}\left(k \frac{dU_n}{dx} \right) + \lambda_n \rho c U_n = 0 \tag{25a}$$

定义的．边界条件是：

$$U_n(0)=0,\ U_n(L)=0. \tag{25b}$$

由 (25) 式给出的问题具有**平庸解** $U\equiv 0$. 非平庸解函数 $U_n(x)$ 通常只对某些常数 $\lambda_n(n=1, 2, \cdots)$ 才存在. U_n 叫作属于**本征值** λ_n 的**本征函数**. 注意,如果 $U_n(x)$ 是一个解, 则对于任何常数 C_n, $C_nU_n(x)$ 也是解. 如果现在将初始条件 $u(x, 0)=f(x)$ 加在级数解(24)上,则对于常数 C_n 的某些选值必定有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} C_nU_n(x). \tag{26}$$

这样, 热传导问题的解看来是取决于把一个任意函数表示成(在适当的意义上)具有(26)式形式的一个无穷级数的可能性. 所需要的理论与技巧的本体部分称为 Sturm-Liouville 理论. [1]这里对它不作详细探讨,但在下节中将要介绍几个事实,它们可以根据一些比较简单的论证来得到. 我们将示明它们对于求得我们的问题的显式解为什么是有用的.

至此,让我们来简要地比较一下求解 (18) 式的目下采用的方法与纯粹的数值方法. 如果问题的域非常复杂, 宜于决定一开头就使用数值法. 然而,在这儿即使采用形如 (19) 式的解的迭加也会更简单一些. 让我们在一维情况下来考察这一点, 但是所作的评论对更高的维数也是适用的.

在一维介质的情况下,我们知道,对于各向同性的情况有,

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2\kappa}{L^2},\ n=1, 2, \cdots;\ \kappa=\frac{k}{\rho c}. \tag{27}$$

由于相应的第 n 个空间本征函数 ϕ_n 乘有因子 $\exp(-\lambda_n t)$, 所以, 除了一个很短暂的初始阶段(其中 $\kappa t\pi^2/L^2$ 的大小还不到 1)以外, 在级数解 (24) 中只有 n 值较小的那些项才是重要的. 有理由期望, 这一定性特征不会由于引进各向异性而发生改变, 各向异性"很大"这种可能的例外情况则另作别论. 因此, 大部分各向异性问题的实际求解都将化为求少量较低阶的本征函数和本征值. 它

1) 参见 Courant 与 Hilbert (1953, 第一卷,第五章).

们可以通过对某些常微分方程进行数值积分来求得，这是与偏微分方程(18)大不相同的．因此，我们还是可望解的定性行为是这样的一种，其中各种"模式"都会以十分不同的速率衰减下来．然而，在高度各向异性的情况下，模式的形状可以是远离正弦型的．

分析法还有进一步的优越性．可以证明这样求得的本征函数和本征值与其他物理问题也有关系．考虑方程

$$\rho c \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{28}$$

(它在连续介质振动的情况下出现)，我们试图用一个简单的正规模式来求解，其形式为

$$w = W(x,\ y,\ z)e^{i\omega t}. \tag{29}$$

若 $\omega^2 = \lambda$，则 $W(x, y, z)$ 所满足的方程与 $U(x, y, z)$ 所满足的方程相同．如果边界条件也相同，我们就面临着具有同样一组本征函数的相同的本征值问题．两个看上去不相关的问题，一个涉及扩散另一个涉及振动，就这样通过数学上的考虑而汇合在一起了．

练　　习

1. 验证(7)式和(8)式．

2. 出于什么物理理由可望(25)式的所有本征值都是正的？

3. (课题项目) 对于寻找地球的年温度变化这一问题完成数值分析．假定表面温度仅取两个值——半年是"夏天"值，另外半年是"冬天"值．把结果与(12)式的适当的特殊情况作比较．

4. 当 $k = \alpha x^m$，$\rho c = \beta x^n$；α, β, m 和 n 都是常数时，利用贝塞耳函数确定(25)式的本征函数，并加以讨论．

5. 对于球状地球的年温度变化问题作出公式表述．如果 $u(r, t)$ 表示的温度是半径 r 和时间 t 的函数，引入一个新的应变量 $ru(r, t)$．不去实际解出任何方程，试讨论由于球状所引起的修正．

*6. 解(12)式表明,年温度以一个依赖于深度的幅度振荡. 在苏联的一个观察站, 测得的幅度在 1, 2, 3, 4 米处分别 11.5, 6.8, 4.2 和 2.6℃. 利用这些数据去确定地球的温度扩散率 κ 的一个值.

*7. 深达地面以下 2 或 3 千米的测量揭示出随深度的温度增加大约是每 100 米 3℃ 左右. 如我们所看到的,在这些深度处年变化量是不明显的. 然而,对于这一实测结果的合理解释是温度梯度乃是地球冷却的一个结果. 试证: 基于下列的数据,这是一个不令人满意的假说. 岩石大约在 1200℃ 溶化, 玄武岩和花岗岩的平均温度扩散率是 6×10^{-3} (厘米)^2/秒,而地球的年龄约为 10^9 年.[1]

5.2 Sturm-Liouville 系统

现在考虑对前节中提出的数学问题稍微作一点推广. 这便是要决定**二阶 Sturm-Liouville 微分方程**:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dU}{dx}\right] + [\lambda\rho(x) - q(x)]U = 0. \qquad (1)$$

的某些解. 此处 λ 是一个参数; p, ρ 和 q 是 x 的实值函数; 而函数 p 和 ρ 是正的. (在前面例子中,函数 q 恒等于零. 对于通常的傅里叶级数, $p = \rho = 1$, $q = 0$.) 我们仍然把边界条件取为

$$U(a) = 0, \ U(b) = 0. \qquad (2)$$

然而,进行下去就会清楚,代替 (1) 式引入其他齐次[2]边界条件时,讨论的要点不会有很大改变. (见练习 7.)

---

1) 这个问题和前面的问题取材于 Tychonov 和 Samarski (1964, pp. 215—255) 关于热扩散理论在地球物理学上的应用的杰出讨论.

2) "齐次"或"均匀" (*homogeneous*) 这个词已经使用得过多了, 但它的各种用法已成为传统. 这里是其中的四种: (a) 关于一个函数的齐次条件是一个必定能被零函数满足的条件. 因此,(1)式是一个齐次方程,但 $U'(0) - 5 = 0$ 就不是一个齐次边界条件. (b) 各项同性材料是一种成分为均匀的材料. (c) 特定的微分方程 $dy/dx = f(y/x)$ 也称为"齐次的". (d) 一个 n 变量函数称为 m 次齐次的,若

$$f(tx_1, tx_2, \cdots tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \cdots x_n),$$

我们现在将证明：

(i) 仅仅对于 λ 取某些实的离散值 λ_i，才存在有非平庸解.

(ii) 在

$$\int_a^b \rho(x)U_i(x)U_j(x)dx = 0, \text{ 若 } \lambda_i \neq \lambda_j \tag{3}$$

的意义下，这些解以权函数 $\rho(x)$ 相互正交. 通过与我们关于傅里叶级数的经验作类比，也可望有 (iii) 具有无穷多的本征函数，以及 (iv) 能够在适当的意义下把很广的一类函数表示成本征函数的一个无穷级数. 如前所述，要证明最后这两个命题是不容易的，这里不打算证明. 不过尽管不能对于较高阶的本征函数和本征值的存在性给出一个粗略的证明，我们仍将指出如何能够近似地计算出它们较高阶的本征函数和本征值，我们还将指出 (vi) 如何通过数值和分析相混合的方法，或者直接通过数值方法来计算出较低阶的本征函数. [**较高(低)阶的本征值**就是较大(小)的本征值. 相应的本征函数也就称为"较高的"和"较低的".]

本征值和本征函数的性质

我们希望证明，边界条件(2)仅仅对于 λ 值的一个离散集才能得以满足. 我们的意思是说，可以使各个本征值 λ 成为一个小圆圈的中心，而该小圆圈内不再有其他本征值.

令 U_α 和 U_β 构成 (1) 式的**基本解集**. 根据定义，这就意味着对某些常数 C_α 和 C_β(1) 式的任何解都可表示成下列形式

$$U(x, \lambda) = C_\alpha U_\alpha(x; \lambda) + C_\beta U_\beta(x; \lambda) \tag{4}$$

(注意，已经表明了 U_α 和 U_β 对 λ 的明显依赖.) 边界条件(2)要求

$$C_\alpha U_\alpha(a; \lambda) + C_\beta U_\beta(a; \lambda) = 0,$$
$$C_\alpha U_\alpha(b; \lambda) + C_\beta U_\beta(b; \lambda) = 0.$$

仅当

$$\begin{vmatrix} U_\alpha(a; \lambda) & U_\beta(a; \lambda) \\ U_\alpha(b; \lambda) & U_\beta(b; \lambda) \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

C_α 和 C_β 的这一对齐次方程的解才是非平庸的.

我们断言这个**久期方程**或**特征方程**(5)将给出本征值的一个可数集.(与存在本征值的一个连续统的那样一种连续谱的情况相反,这儿给出了**离散谱**.)通过证明 $U_\alpha(x, \lambda)$ 和 $U_\beta(x, \lambda)$ 可以选作参量 λ 的解析函数,λ 在这里被视为复变量,可以构造出一个证明. 熟悉复变理论的读者就会知道从解析函数的零点都是孤立的这一事实就可得出上述结论.

不难证明(一旦有了证明思想以后——见练习 1)*本征值必须都是实数*. [本征函数也总是可以取作实数. 见练习 1(b).] 进而,与傅里叶函数的情况相类比,可以料到*本征值序列没有上界*. 我们还可望较高阶的本征函数(相应于较大的本征值 λ)*迅速地振荡*. 这些料想结果是正确的. 它们构成了渐近估算本征值和与它们相应的本征函数的基础.

正交性和正规化

现在要证明,相应于不同本征值的一对本征函数满足正交条件(3). 考虑两个方程

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dU_i}{dx}\right)+(\lambda_i\rho-q)U_i=0, \tag{6a}$$

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dU_j}{dx}\right)+(\lambda_j\rho-q)U_j=0. \tag{6b}$$

如果以 U_j 乘 (6a) 并以 U_i 乘 (6b),再相减,得

$$U_j\frac{d}{dx}\left(p\frac{dU_i}{dx}\right)-U_i\frac{d}{dx}\left(p\frac{dU_j}{dx}\right)+(\lambda_i-\lambda_j)\rho U_iU_j=0.$$

若在限 (a, b) 之间积分这个方程,并且加上边界条件(2),利用分部积分法我们求得[练习 2(a)].

$$\int_a^b\left[U_j\frac{d}{dx}\left(p\frac{dU_i}{dx}\right)-U_i\frac{d}{dx}\left(p\frac{dU_j}{dx}\right)\right]dx=0, \tag{7}$$

所以

$$(\lambda_i-\lambda_j)\int_a^b\rho U_iU_jdx=0. \tag{8}$$

因此,除了 $\lambda_i=\lambda_j$ 以外,正交条件(3)必定是满足的.

如果存在着属于同一本征值的有限数 s 个线性独立的本征函数，我们就能（通过 **Gram-Schmidt 程序**）构造出一个属于这个本征值的 p 个相互正交本征函数的集合．为了做到这一点，我们假定 U_{n1}，U_{n2}，$\cdots$，U_{ns} 为属于本征值 λ_n 的所有线性独立的本征函数．现在我们来逐一确定相互正交的本征函数 V_1，V_2，$\cdots$，V_s．我们取 U_{n1} 作为 V_1．对于 V_k，我们取作

$$V_k = C_{k1}V_1 + \cdots + C_{k,k-1}V_{k-1} + U_{nk}, \quad 1 < k \leqslant s. \tag{9}$$

我们假定所有前面的 V 都已选定，并加上 V_k 需与相互正交的 V_1，$\cdots$，V_{k-1} 都正交这一要求，于是便得[练习 2(b)]

$$C_{k,m}(V_n, V_m) + (U_{nk}, V_m) = 0, \tag{10}$$

其中[1]

$$(U, V) = \int_a^b \rho(x)U(x)V(x)dx. \tag{11}$$

除非 U_{nk} 已经与所有的 V_m 相正交，否则 $C_{k,m}$ 不会都等于零．

为了将记号标准化，我们把特征函数集记作 $\{\phi_n(x)\}$，它们是互相正交并正规化的，故有 $(\phi_n, \phi_n) = 1$．因此

$$(\phi_m, \phi_n) = \delta_{mn}, \tag{12}$$

其中

$$\delta_{mn} = 0, \ m \neq n, \ \delta_{mm} = 1.$$

不过应当记住，某些本征值可以是相同的．如果有两个线性独立的本征函数都具有相同的本征值，我们就说这个本征值的**多重度**为 2，或叫双重的，其他依次类推．区间 $(-\pi, \pi)$ 内的调和函数可以作为多重本征值的一个例子：

$$\phi_0(x) = 1,$$

$$\phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \phi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \tag{13}$$

---

1) 记号(,)强调了与矢量标积之间的联系．事实上，在把一线性独立矢量集化为一相互正交集的纯代数工作中首先会遇到 Gram-Schmidt 程序．某些读者可能已经知道，这里所暗示的关系基本上是一种恒等的形式结构．在 II 附录 12.1 中要阐明这个问题，在那里，Sturm-Liouville 理论的观念将被推广到自伴算子．

$$\phi_{2n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \quad \phi_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx.$$

这些函数 $\{\phi_{2n-1}(x), \phi_{2n}(x)\}$ 具有共同的本征值 n^2，形成一个双重对[1].

按本征函数展开

假若我们试图用一套本征函数集 $\{\phi_n\}$ 把一个任意函数 f 表示成一个级数，正如用傅里叶级数去表示它那样，那么我们可以用类似的方式去求其系数．的确，如果

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \phi_n(x), \tag{14}$$

则有(形式地)

$$(\phi_i, f) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\phi_i, \phi_n) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \delta_{in} = C_i,$$

即，

$$C_n = (\phi_n, f) = \int_a^b \phi_n(x) \rho(x) f(x) dx. \tag{15}$$

(14)式中的项数仅为有限数的话，这便是一个例外的函数．因此，在我们可望(14)式对于普遍一类函数都成立以前，我们必须要有无穷多个本征函数．当然，单是这一个要求是不够的，比方说，若偶然在函数系列中没有包括 $\phi_0(x)$，我们就不会取得成功．因此需要证明，对于某类函数本征函数具有完备性——这就是说本征函数的一个合适的级数将收敛于该类中的任何一个函数，要证明这一点决不是容易的．因此，我们只限于说，Sturm-Liouville 问题对于系数函数只要求微弱条件的本征函数集对于广泛一类函数说来的确是完备的.

---

1) 这些 ϕ 可以视为问题

$$\phi'' + \lambda^2\phi = 0, \quad \phi(-\pi) = \phi(\pi), \quad \phi'(-\pi) = \phi'(\pi)$$

的本征函数．与 Sturm-Liouville 方程(1)作比较，我们进一步肯定权函数 $\rho(x)$ 恒等于1．正交性已由 (4.1 38) 式所断言了.

要枚举出这些本征函数，这也许同函数在问题所涉及的区间中所具有的零点数有关．例如，对于调和函数(13)式，$\phi_m(x)$ 在开区间（$-\pi$，π）内有 m 个零点．本征函数的这种行为是由某些**振荡定理**所保证的．读者可以参考关于微分方程的书籍，那里可以找到关于完备性定理和振荡定理的证明．

本征函数与本征值的渐近近似

当 n 和 λ_n 较大时，通过分析本征函数 ϕ_n 和有关的本征值 λ_n 的行为，可以对它们的本质获得深入了解．为此起见，通过引入一个新的自变量 $t=t(x)$ 和一个新的应变量 w 首先把原始微分方程(1)变换成 Liouville 正规形式是方便的，其中

$$U=y(x)w. \tag{16}$$

摆在我们面前有两个函数，我们的目标在于对方程施加两个合意的条件．若选择这些条件为 (i) dw/dt 的系数应为零，(ii) λ 的系数应为 1，则必须(练习 3)取函数 w 和 t，使得

$$U(x)=\frac{w}{[p(x)\rho(x)]^{1/4}},\quad t(x)=\int\left[\frac{\rho(x)}{p(x)}\right]^{1/2}dx. \tag{17a, b}$$

这样便得 **Liouville 正规形式**，

$$\frac{d^2w}{dt^2}+[\lambda-\hat{q}(t)]w=0 \tag{18}$$

其中

$$\hat{q}=\frac{q}{p}+(p\rho)^{-1/4}\frac{d^2}{dt^2}[(p\rho)^{1/4}]. \tag{19}$$

对于形如 (1) 式的方程，很难知道 λ 很大时解的行为是怎样的．然而，对于 (18) 式，这却是一件容易的事情[1]．假定与 $\hat{q}$ 相比 λ 很大，我们立刻就会猜出 (18) 式具有近似解 $\exp(\pm i\lambda^{1/2}t)$．因此，当 λ 很大时，试图通过级数

---

1) 因此我们向 Liouville 学到了：假设一个方程含有一个大的参数，如果引入新变量使得某些项相对该参数必定是小的，则我们大概会得到某些有用的结果．这些项忽略后可得首次近似．

$$w(t) = \exp(\pm i\lambda^{1/2}t)[w_0(t) + \lambda^{-1/2}w_1(t) + \cdots]. \qquad (20)$$

去求解(18)式是“自然的”. 读者应该用直接代入法去计算这个级数的几项(练习 4). 他将看到,比如 w_0 必定是一个常数.

现在把边界条件 $w = 0$ 施加于端点 (t_a, t_b). 我们必须使这些点相应于原始端点 $x = a$ 和 $x = b$. 这可以通过把(17)式写成形式

$$t = \int_a^x \left[\frac{\rho(\xi)}{p(\xi)}\right]^{1/2} d\xi,$$

并且取

$$t_a = 0,\ t_b = \int_a^b \left[\frac{\rho(\xi)}{p(\xi)}\right]^{1/2} d\xi \qquad (21)$$

来实现. 我们发现 (练习 5) 对于大的 n, 本征值和本征函数满足:

$$\lambda_n^{1/2} = n\pi \left\{\int_a^b \left[\frac{\rho(x)}{p(x)}\right]^{1/2} dx\right\}^{-1} + O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad (22)$$

$$U_n(x) = [p(x)\rho(x)]^{-1/4} \sin\left\{ n\pi \frac{\int_a^x [\rho(x)/p(x)]^{1/2} dx}{\int_a^b [\rho(x)/p(x)]^{1/2} dx}\right\} \times \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \qquad (23)$$

这些结果从实用角度说来是非常有用. 它们非常精确, 即使对于相当小的 n 值也是如此,这一点或许会令人惊奇,但却很典型.

作为一个例子,考虑贝塞耳方程

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dU}{dx}\right) + \left(k^2 x - \frac{m^2}{x}\right)U = 0. \qquad (24)$$

这是(1)式取 $p = \rho = x$, $q = m^2/x$ 的一个特殊情况. Liouville 变换(17)式是 $U = wx^{-1/2}$ 以及 $x = t$, 而所得的方程(18)式是

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \left(k^2 - \frac{m^2 - 1/4}{x^2}\right)w = 0 \qquad (25)$$

当 k 很大(而 x 不在零附近)时,通解的首次近似为

$$w(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx.$$

若加上边界条件 $w(a)=w(b)=0$，则导得近似本征函数为

$$w_n(x) = \sin k_n(x-a), \tag{26}$$

其中

$$k_n = \frac{n\pi}{b-a};\ n=1,2,3,\cdots$$

如果 $a=1$ 以及 $b=2$，则最低的近似本征值为 $k_1=\pi$. 当 $m=0$（这是最有利的情况）时，实际上的最低本征值是在 3.1 和 3.2 之间(练习 6). 当然，当 $m=\frac{1}{2}$ 时，我们的"近似"给出了精确解.

一旦一个近似解的形式已知，往往就能用比原来更为直接的方法来得它. 在目前的情况下，继较简单的变换 $U=vp^{-1/2}$ 之后再作形式代换 $v=e^{i\lambda^{1/2}\phi}\{v_0+\lambda^{1/2}v_1+\cdots\}$ 便可进行运算. 这样做以后，ϕ 将自动地成为由 (17b) 式所定义的函数 $t(x)$ (练习 10). 级数是不收敛的，但它却是渐近的——而且非常有用. 这种形式的一个渐近级数在经典力学与薛定谔表述形式的量子力学之间起了桥梁作用. 在水波理论中，这一形式在很久以前就已用到了. 我们还发现即使当 $\rho(x)$改变符号时，这种处理方法也是有用的. 在这种情况下，必须引用"JWKB 理论"来解决在 $\rho(x)$ 的零点附近发生的困难. 不过，深入探讨这些问题已经超出了我们的范围. 读者可参考象 Cole (1968, 3.7 节)这样的参考文献.

计算本征函数与本征值的其他方法

往往能方便地采用数值技巧计算本征值和本征函数. 一种方法是求解两个线性独立函数 $U_1(x,\lambda)$ 与 $U_2(x,\lambda)$ 的初值问题，其中除了微分方程(1)式之外，这些函数分别满足初始条件

$$U_1(a,\lambda)=0,\ U_1(b,\lambda)=1,$$

$$U_2(a,\lambda)=1,\ U_2(b,\lambda)=0.$$

如果通解 $U(x,\lambda)=C_1U_1(x,\lambda)+C_2U_2(x,\lambda)$ 要满足边界条件(2)，则 C_1 与 C_2 必须满足齐次方程

$$C_1U_1(a, \lambda) + C_2U_2(a, \lambda) = 0,$$
$$C_1U_1(b, \lambda) + C_2U_2(b, \lambda) = 0,$$

当且仅当

$$U_1(a, \lambda)U_2(b, \lambda) - U_1(b, \lambda)U_2(a, \lambda) = 0,$$

它们才有非平庸解. 采用数值方法便可定出这些超越方程的根. 然而,这不是一件容易的工作,特别是在具有复本征值的更复杂的(非自伴)问题中, 还有另外的困难, 比方说, 当 U_1 随 x 增长得比 U_2 更迅速时. 除非采取预防措施, 否则舍入会带来一点儿误差, 因而代替计算 U_2 我们去计算 $\varepsilon U_1 + U_2$. 虽然 ε 很小,但是 U_1 也会变得如此之大,以致 U_1 与 $\varepsilon U_1 + U_2$ 不可区分了,这样就不能按要求的那样给出独立于 U_1 的解. 不过,尽管这些或那些困难, 本征值的数值运算还是在很多研究中取得了巨大的成功.

另一种有用的近似方法利用了这样一个事实: 本征值往往可以被表征为某些表达式的最小值. 这一变分演算中的 Rayleigh-Ritz 法在 12.4 节中作了简要说明,并且在 II 第十二章中进行了更充分的讨论.

练 习

1. (a) 以下列方式证明, (1)式的本征值是实的,

(i) 取(1)式的复共轭,从而求得 U 的复共轭 $\bar{U}$ 的方程. 记住, p, ρ 和 q 都是 x 的实值函数,虽然 λ 可能不是.

(ii) 如果 $\lambda \neq \bar{\lambda}$, 推断它与相应于不同本征值的本征函数的正交性相矛盾.

(b) 试证: 如果 U 是(1)式的一个本征函数,则 Re U 和 Im U 中至少有一个是实本征函数.

2. (a) 验证(7)式和(8)式.

(b) 把课文中关于 Gram-Schmidt 程序的讨论中所略去的细节都补上.

3. 证明: 为了得到 Liouville 正规形式(18)式,变量变化确实应该象(17)式内所给出的那样.

4. 采用形式替代，至少算出级数(20)式中的二项.

5. 证明(22)式和(23)式.

6. 考虑 $m=0$ 时的(25)式，使之满足边界条件 $w(1)=w(2)=0$. 如果熟悉贝塞耳函数，试求出本征值 k_n 的一个超越方程. 用贝塞耳函数表，证明 k_1 位于 3.1 和 3.2 之间.

7. (a) 当边界条件 (2) 式用 $U'(a)=U'(b)=0$ 来替代时，试证 (3)式.

(b) 是否存在着仍能导出(3)式的更一般的边界条件?

8. 对于四阶 Sturm-Liouville 问题,

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[f(x)\frac{d^2U}{dx^2}\right]+\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dU}{dx}\right]+[\lambda\rho(x)-q(x)]U=0;$$

$$U(a)=U'(a)=U(b)=U'(b)=0.$$

试证(3)式.

9. (a) 试证：广义二阶方程

$$a(x)\frac{d^2U}{dx^2}+b(x)\frac{dU}{dx}+[c(x)+\lambda d(x)]U=0$$

可以通过变量的一个适当变化纳入 Sturm-Liouville 形式.

(b) 一般的四阶本征值问题是否能纳入练习 8 的形式?

10. 对于 (17b) 完成 (26) 式下面所概述的另外一种处理方法.

11. 推广练习 4.3.12 的结果，使得它们能应用于二阶 Sturm-Liouville 问题(1)和(2)式.

5.3 傅里叶变换的简短导引

这一关于一个大课题的简短讨论是出于下列愿望：要求得一根长 L 的杆中的热传导问题的解在 $L\to\infty$ 时的极限 我们从傅里叶级数导出傅里叶变换公式. 我们重新得出了关于无限长杆内热流动的一个较早得到的结果，以此作为检验. 关于傅里叶变换的进一步应用可以在II第八章中关于色散波的处理中找到.

傅里叶变换公式与傅里叶恒等式

在 4.1 节中我们考虑了沿一根长度为L的杆内的热传导问题的解。在$L\to\infty$时的极限下，应该能够重新得到第三章中借助于源解所得到的无穷区间热传导问题的解。这里的关键是在极限$L\to\infty$下推广一个任意函数的下列表示:

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}B_m\sin\frac{m\pi x}{L}.$$

(比较方程 4.1.36) 更一般地，是要讨论当$L\to\infty$时下列复变形式的傅里叶级数的极限

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}C_n e^{in\pi x/L},\tag{1}$$

其中

$$C_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(\xi)e^{-in\pi\xi/L}d\xi.\tag{2}$$

当L很大时，似乎不存在明显的方法来简化 (1) 式和 (2) 式。的确，对于固定的n，C_n中的被积函数在$L\to\infty$时高度振荡。从而，在$\exp(-in\pi\xi/L)$的单独一次振荡期间，f的变化是很难被注意到的，因此，正的贡献与负的几乎相抵。另一方面，对于量级与L相同的那些n值上述全部思想都是不适用的。

从 Liouville 变换的研究中我们学到了通过改变问题所给出的变量 (在此情况下是n和L) 去弄清楚大参量的作用。前段指出了n/L的重要性;因此，我们将引入这个量的一个倍数来当作一个变量:

$$k=\frac{n\pi}{L}.\tag{3a}$$

(所加因子π恰好使得最后的公式略为简单一些。)结果表明，第二个变量(称Δk) 应该取为相邻k值(当n增加 1 时)之差:

$$\Delta k=\frac{\pi}{L}.\tag{3b}$$

由此，(2)式便为

$$C_n = C(k) = \frac{\Delta k}{2\pi}\int_{-L}^{L} f(\xi)e^{ik\xi}d\xi. \tag{4}$$

现在我们把(4)式引入(1)式，得

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx}\frac{\Delta k}{2\pi}\int_{-L}^{L} f(\xi)e^{-ik\xi}d\xi;\ k = \cdots,\ -2\Delta k,\ -\Delta k,\ 0,\ \Delta k,\ \cdots \tag{5}$$

(5) 式中的积分当 $L\to\infty$ 时的行为决定性地依赖于 $|\xi|$ 很大时 $f(\xi)$ 的行为．此刻，我们已有了足够的东西；因此，我们越过这一问题来考虑函数 $f(x)$，它在区间 $(-A, A)$ 的外部恒等于零，若取 $L > A$，(5) 式中的积分就可取在极限 $(-\infty, \infty)$ 之间，因而代表了一个确定的函数

$$g(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-ik\xi}d\xi. \tag{6}$$

由此，(5)式便成为

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}g(k)\frac{\Delta k}{2\pi}. \tag{7}$$

若积分收敛[1]，则当 $L\to\infty$ 和 $\Delta k\to 0$ 时求和的极限为

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(k)e^{ikx}dx. \tag{8}$$

在 (6) 式中，函数 g 即是函数 f 的**傅里叶变换**．注意，从 g 回到 f 的逆公式(8)实质上与傅里叶变换公式 (6) 具有相同的形式，其主要差别在于因子 $\frac{\pi}{2}$ 和 i 的符号改变．通常把数字因子重作分配，以使公式更具对称性．宜于把(6)式和 (8) 式结合成为**傅里叶恒等式**：

1) 非平庸极限涉及了这样一些表达式，例如两个小项之商，或(像这儿遇到的)很多非常小的项之和．在计算目前遇到的极限方面我们已经取得了成功，因为通过改变变量就已经把我们的问题化为很多小项之和，它的极限易知为一个定积分．

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{ik(x-\xi)} d\xi. \tag{9}$$

至此为止,我们只是对于 $|x| > A$ 时 $f(x) \equiv 0$ 的情况证明了(9)式. 现在将通过一个极限过程,对于远为普遍的一类函数来证明(9)式.

考虑函数 $f(x, K)$,它由下列积分所定义:

$$f(x, K) = \frac{1}{2\pi}\int_{-K}^{K} dk \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{ik(x-\xi)} d\xi. \tag{10}$$

若 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)| d\xi$ 存在,则积分顺序可以交换,故有

$$f(x, K) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{2i \sin K(x-\xi)}{i(x-\xi)} d\xi. \tag{11}$$

现在把 (11) 式中的积分区间拆成子区间 $(-\infty, a)$, (a, b), (b, ∞); $a < x < b$. 可以证明,若 f 的变化是有界的,则来自这些子区间中的第一个和最后一个子区间的贡献随 $K \to \infty$ 而趋近于零.[1] 若 f 分段光滑,则 4.2 节内所证明过的引理精确地适用于中间子区间的处理. 特别是,按照(4.2.8)式,

$$\lim_{K\to\infty} f(x, K) = f(x).$$

因此,确立了等式(9),其解释与以前对于间断性所作的解释相同.

用傅里叶变换求解传热方程

建立了傅里叶变换关系式以后,我们就能容易地解决无限长杆的热传导问题. 我们还是来寻找 $\theta_t = \kappa\theta_{xx}$ 的解,它具有形式 $X(x)T(t)$. 我们要求 $X(x)$ 在 $|x| \to \infty$ 时保持有限. 这种形式的最一般的解是 $\exp(ikx - k^2\kappa t)$ 的倍数,其中 k 是任何实数. 我们根据这些简单解,采用迭加法构造出通解

---

1) 见 Jeffreys 与 Jeffreys (1962, p. 454). 请回忆一下,假若对于某些 M 和每一可能的剖分 $-\infty < x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} < +\infty$ 有 $\sum_{i=0}^{N} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| < M$, 则 $f(x)$ 是有界变化的.

$$\theta(x, t)=\int_{-\infty}^{\infty} A(k)\exp(ikx-k^2\kappa t)dk. \tag{12}$$

在以前，$x=0$ 和 L 处的边界条件要求我们只选择波数 k 的一可数族(离散谱)，但现在的 k 却可以是任何实数(连续谱)．以前，我们对于容许的本征函数取加权和；现在是连续谱，求和便成为用函数 A 加权的一个积分．

如果取 $A(k)=g(k)/2\pi$，我们可以通过(6)式和(8)式使之满足一个任意的初始条件

$$\theta(x, 0)=f(x), \tag{13}$$

如果把(6)式代入(12)式，就可以用初始分布 $f(x)$ 把解直接表示出来：

$$\theta(x, t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\exp[ik(x-\xi)-k^2\kappa t]d\xi. \tag{14}$$

交换积分顺序，再对 k 进行积分，便可求得［练习 1(a)］下列形式的解：

$$\theta(x, t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-(x-\xi)^2/4\kappa t}d\xi. \tag{15}$$

以前在 3.4 节中用源解方法也获得过这个结果．注意，(15) 式是问题的有效解，即使当 $|f(x)|$ 的无穷积分不收敛时也有效，因此解 (15) 式可以直接加以验证．[1] 作为试探性推理和形式操作的强有力的示例，这便是一个例子．不过，我们要记住去检验这样求得的最终答案的有效性．然而，在很多实际情况中，即使作出这种检验也是太困难了．我们必须求助于其他方法确保最终答案的正确性，例如，与观察作比较．

练　　习

1. (a) 求证(15)式．

1) 关于一形式解实际上满足问题的全部条件的严格证明，当然便给出了一个（构造上的)存在定理．对于这样一种处理传热方程的方法，请参看 S. L. Sobo'ev: *Partial Differential Equations of Mathematical Physics* (New York, Pergamon, 1964) 一书的第八讲．

(b) 考虑下列特殊情况下的(15)式：当 x 为负时，f 为零，而当 x 为正时，f 取常数值 θ_0. 请推出

$$\frac{\theta}{\theta_0}=\pi^{-1/2}\int_{-\eta}^{\infty}\exp(-\xi^2)d\xi,\ \eta\equiv\frac{x}{2(\kappa t)^{1/2}}.$$

(c) 把答案表示成一个级数形式，它在 η 很大时可望是有效的.

2. (a) 试证：傅里叶恒等式可写成如下形式

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos k(\xi-x)d\xi.$$

(b) 当 f 为偶(奇)函数时，试求出只包含余弦(正弦)函数的傅里叶恒等式的一种形式.

(c) 利用 (b) 求证：

$$D(x)=2\pi^{-1}\int_0^{\infty}k^{-1}\sin k\cos kx\,dk,$$

其中

$$D(x)=\begin{cases}1\\0\\\frac{1}{2}\end{cases}\text{当}\begin{cases}|x|<1,\\|x|>1,\\|x|=1\end{cases}$$

3. 如果你熟悉贝塞耳函数，试把本节结果推广到具有柱对称的情形，看看能推到哪一步. 从半径为 R 的圆柱内的热传导问题出发，并且考虑极限 $R\to\infty$. 试导出：

$$f(x)=\int_0^{\infty}\xi J_0(\xi x)\int_0^{\infty}sJ_0(\xi s)f(s)dsd\xi.$$

5.4 广义调和分析

虽然傅里叶级数是由热传导问题的解的本征函数提出来的(我们已经在 5.1 节中看到，这些本征函数不必是调和函数)，但是读者或许已经看到它对于分析随时间变化的信号以及周期结构具有最大的应用价值. 为了稍微看一下这些应用范围，让我们来考察一下周期现象的几个例子. 人们感受到的不同颜色是由于不同频率的电磁波. 耳朵在受到不同频率的机械波刺激时能够觉察出

不同的音调． 在无生命的晶体点阵中以及有生命的百足虫中，也出现周期结构．行星、双星和变星的周期运动已为人们所熟知．气候的日变化和年变化是地球周期运动的结果．

然而，尽管周期性到处可见，一旦我们决定把随时间变化的信号（例如温度记录）分解成调和分量，我们就引进了人为的一些东西，因为这种序列实际上不必是周期的．诚然，我们能够从气候变化中分离出日、年变化，从太阳黑子活动中分离出 11 年的循环等周期分量．但是仍然可能遗留下了大量信号．因而必须准备处理那些非周期的时间变化，这些变化以不衰减的（尽量是有界的）幅度无限期地继续下去．这样的问题是迄今所讨论过的傅里叶分析方法所无法解决的．为此要用到所谓**广义调和**分析．

关于不能用标准傅里叶方法分析的函数的评注

虽然在这里不能讲述一般理论，这太复杂了，但是通过考虑由几个周期函数之和构成的一个函数（这些周期函数的周期是不可度的），还是能够对问题的本质有所体会．一个例子是

$$f(t)=A_1e^{i\omega_1 t}+A_2e^{i\omega_2 t}+A_3e^{i\omega_3 t}, \tag{1}$$

式中的所有整数 m 和 n 满足

$$m\omega_i\neq n\omega_j;\ i,\ j=1,\ 2,\ 3;\ i\neq j.$$

我们可以给 $f(t)$ 加上一个函数，其形状为

$$\phi(t)=e^{-\omega_0^2t^2},\ \omega_0>0. \tag{2}$$

虽则这个函数与调和函数毫不相似，但是这个函数随着 $|t|\to\infty$ 充分迅速地衰减，以致可以用傅里叶变换方法将它分解为调和分量．另一方面，(1)式中的函数 $f(t)$ 并不呈现单一的周期行为，因而不能够表示为一个傅里叶级数．即使在无穷远的将来当它衰减下去后也不能．因此，不能用一个正常的傅里叶积分来表示．当然，上述函数已经分解成周期分量——但是，如何来分解那些不具备这种简单性的更一般的函数呢？

第一步是作充分长的记录，最好是延续很长时间，使之能把可能要表达的任何重要的周期分量的许多周期包括在内．例如在气

象记录的情况下至少需要 10 年的观察. 在以此种记录为基础的傅里叶分析中，真实的周期分量是如何显现出来的？为了对此有所了解,我们来考察一个单独的周期分量的傅里叶分析,该周期分量持续了一段有限的时间周期:

$$f_T(t)=\begin{cases}A_0e^{i\omega_0 t}, & |t|\leqslant T,\\ 0, & |t|>T.\end{cases} \tag{3}$$

我们将把 f_T 称为**截断正弦函数**.

现在我们同时利用傅里叶级数和傅里叶积分来分解 (3) 式所定义的截断正弦函数. 当考虑 $T\to\infty$ 时的极限时，若使用第一种方法，我们得到离散的调和分量. 如果区间 $2T$ 碰巧恰好是周期 $2\pi/\omega_0$ 的整数倍，我们甚至就能够精确地还原出该函数. 若用第二种方法,则得到一个连续谱,但是大概在 $\omega=\omega_0$ 处具有一个峰值. 我们来考察处理细节.

截断正弦函数的傅里叶级数分析

令 $\Omega=2\pi/2T=\pi/T$ 为基频. 我们希望把(3)式表示成下列形式

$$A_0e^{i\omega_0 t}=\sum_{-\infty}^{\infty}C_ne^{in\Omega t},\ \text{对于}\ -T<t<T. \tag{4}$$

于是[练习 1(a)]

$$C_n=A_0\frac{\sin(\omega_0-n\Omega)T}{(\omega_0-n\Omega)T},\ n\neq\frac{\omega_0}{\Omega}. \tag{5}$$

重要的分量相应于 $(\omega_0-n\Omega)$ 取小值者.

如果 ω_0 刚巧是 Ω 的整数倍,比如 $\omega_0=k\Omega$, 则在傅里叶级数中只有一个非零系数 C_k. 若 $k<\omega_0/\Omega<k+1$, 则 C_k 和 C_{k+1} 均是重要的. 最坏的情况是 $\omega_0/\Omega=k+\frac{1}{2}$, 即当区间 $2T$ 刚好是基本周期 $2\pi/\omega_0$ 的半整数倍时,有[练习 1(b)]

$$C_{k+1}=C_k=\frac{2A_0}{\pi}. \tag{6}$$

这些都是主要的系数，各自的振幅大约为 $0.64A_0$. 它们的频率与 ω_0 差别不太大，相对误差仅为 $\frac{1}{2}k$. 如果记录所覆盖的时间间隔大约为 10 个周期的话，它恰好是百分之五.

可能会感到不解的是，我们有两个相当大的分量，其幅度之和超过了 A_0. 实际上，我们应该考虑"能量" E 的度量，这儿应是

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2.$$

于是 Parseval 定理 (4.3.42) 保证了

$$E = |A|^2. \tag{7}$$

另外，贝塞耳不等式(4.3.41)保证了有限个数分量只具有能量中的一部分. 在刚才考虑过的例子中，两个主要分量只含有能量的大约百分之八十.

截断正弦函数的傅里叶积分分析

刚才讨论过的傅里叶级数方法在把一个正弦型分量分成两个时显得有些困难. 我们将证明，傅里叶积分法只导出了"谱线展宽"——从实验物理学家那儿借用来的表达方式. 广义傅里叶变换关系

$$a(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

以及它的逆式对于截断正弦波(3)式给出了下列公式:

$$a_T(\omega) = \frac{A_0 T}{\pi}\,\frac{\sin(\omega_0-\omega)T}{(\omega_0-\omega)T} \tag{8}$$

和

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}a_T(\omega)d\omega, \tag{9}$$

这在练习 2 中要求读者加以验证. 图 5.2 画出了 (8) 式中的函数 $a_T(\omega)$ 的平方. 中心极大值与第一个次极值之比约为 $(3\pi/2)^2 \approx 22.5$. 因而，能量实际上全部包含在阴影区所示的中心带内，它在频率上的分布为 $\Delta\omega = 2\pi/T = 2\Omega$, 其中所含的能量比值为

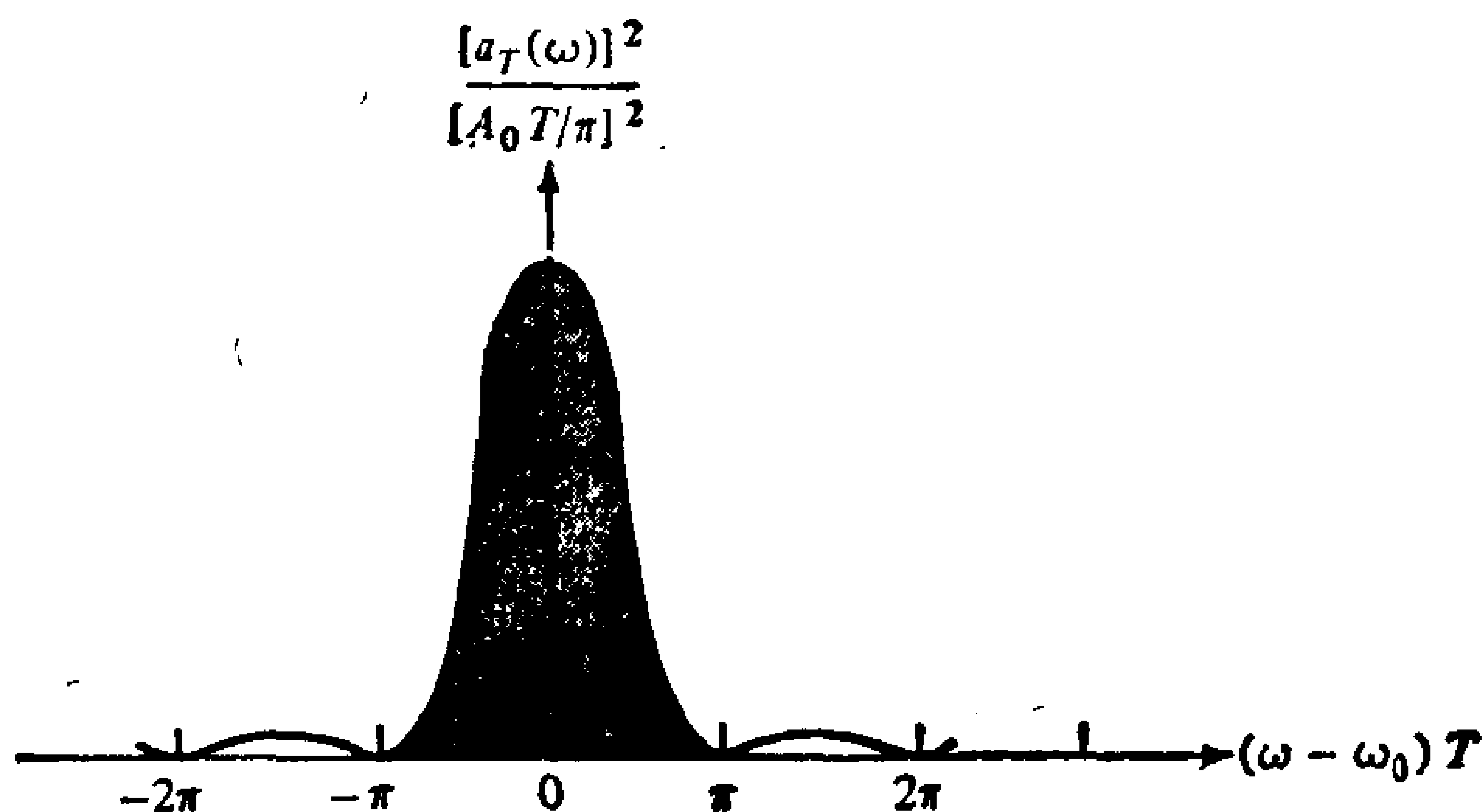


图 5.2　截断正弦函数(3)式的傅里叶积分表示中的频率 ω_0 的谱线展宽.

$$\mathscr{F}=\frac{\int_{-\pi}^{\pi}\eta^{-2}\sin^2\eta d\eta}{\int_{-\infty}^{\infty}\eta^{-2}\sin^2\eta d\eta},\tag{10}$$

约为总能量的百分之九十[练习 3].

傅里叶积分方法的优点在于把原始信号再现为单个分量，展宽了它的线谱,但是频率没有失真. 这一方法对于考虑 $T\to\infty$ 的情况也是方便的. 如果我们考虑(8)式的极限值,我们可得

$$a_\infty(\omega)\equiv\lim_{T\to\infty}a_T(\omega)=\begin{cases}\infty, & \omega=\omega_0;\\ \text{不确定} & \omega\neq\omega_0.\end{cases}\tag{11}$$

为了求得确定的极限值,引进定义

$$A_T(\omega)=\int_{-\infty}^{\omega}a_T(\omega)d\omega=\frac{A_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\eta}\frac{\sin\eta}{\eta}d\eta,\tag{12}$$

其中 $\eta=(\omega-\omega_0)T$. 当 $T\to\infty$时，$A_T(\omega)\to A_\infty(\omega)$，其中

$$A_\infty(\omega)\equiv\begin{cases}A_0 & \text{对于 }\omega>\omega_0,\\ 0 & \text{对于 }\omega<\omega_0.\end{cases}\tag{13}$$

采用标准记号,我们把(13)式写作

$$A_\infty(\omega)=A_0H(\omega-\omega_0),\tag{14}$$

其中 $H(x)$ 是 **Heaviside 函数**,其定义为

$$H(x)=\begin{cases}1 & \text{对于 }x>0,\\ 0 & \text{对于 }x<0.\end{cases}\tag{15}$$

至此，我们就可以充分解释我们的结果了．从 (9) 式知道，$a_T(\omega)$ 实质上是频率为 ω 的谐波的振幅(指每单位频率)．定义式 (12) 表明，$A_T(\omega)$给出了累积振幅．在极限过程中，如 (13) 式和 (14)式所表明的那样 $A_T(\omega)$ 经历了一次跳跃．对于 $A_\infty(\omega)$ 的整个贡献都是来自单个频率 ω_0．因此，傅里叶积分方法会任意地逼近到恰好再现出的周期为 ω_0 的信号，只要观察该信号的时间长度无限增加的话．

更加精确有效的结果可以在引入 Stieltjes 积分后求得[1]．据此，(9)式可写为

$$f_T(t) = \int_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} e^{i\omega t} dA_T(\omega). \tag{16}$$

而形式极限 $T\to\infty$ 是有意义的，因为对于带有间断点的函数 A_T，Stieltjes 积分也有意义．事实上，在(14)式给出的 $A_\infty(\omega)$ 的极限形式下，对于 $-\infty < t < \infty$，方程(16)导致原始函数 $A_0 e^{i\omega_0 t}$．为了从(9)式求得这一结果，应该在极限 $T\to\infty$下，记作

$$a_T(\omega) \to a_\infty(\omega) = A_0\delta(\omega - \omega_0). \tag{17}$$

这里的 $\delta(x)$ 是狄拉克 δ 函数，它满足

---

1) 令 F 是连续的．黎曼积分 $\int_a^b F(\omega)d\omega$ 是由 $\sum_i F(\omega_i^*)(\omega_{i+1} - \omega_i), \omega_i \leqslant \omega_i^* \leqslant \omega_{i+1}$ 这一熟知的极限来定义的．若 A 是一个单调递增函数，则 Stieltjes 积分 $I_A = \int_a^b F(\omega)dA$ 是由 $\sum_i F(\omega_i^*)[A(\omega_{i+1}) - A(\omega_i)]$ 这一类似的极限来定义的．若 A 是一阶梯函数[对此我们用(15)式中的 Heaviside 函数表示]，于是该积分化为一个求和

$$A(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n H(\omega - \omega_n) \Rightarrow I_A = \sum_{n=1}^{\infty} C_n F(\omega_n).$$

(我们假定 $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ 是非负常数的一个收敛级数．) 若 A 是连续可微的，我们就得到一个寻常黎曼积分

$$I_A = \int_a^b F(\omega)A'(\omega)d\omega.$$

至于证明和进一步的知识，参见分析方面的教科书，例如 D. Widder 的 *Advanced Calculas* (Englewood Cliffs, N. J. Prentice-Hall, 1947) 一书的第五章．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a) = f(a). \tag{18}$$

因为(12)式中的 $A_T(\omega)$ 的定义意含着关系式 $A_T'(\omega) = a_T(\omega)$,(14)和(17)式意味着

$$\delta(x) = H'(x). \tag{19}$$

这是一个有效而有用的形式结果.

读者将会发现，参照 4.2 节中的引理来证明所有表述形式的正确性,这是值得的.

推广到稳态时间序列

上述讨论可以用来表述更一般的情况，即所谓稳态时间序列函数 $f(t)$.[1]为此,考虑一个截断函数 $f_T(t)$，其中

$$f_T(t) = f(t), \quad |t| \leqslant T;$$
$$= 0, \quad |t| > T.$$

若我们仿照(8)式定义

$$a_T(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_T(t)e^{-i\omega t}dt, \tag{20}$$

于是 $a_T(\omega)$ 在区间 $(\omega, \omega+\Delta\omega)$ 内的累积贡献为

$$\Delta A_T(\omega) = \int_{\omega}^{\omega+\Delta\omega} a_T(\omega)d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_T(t)\,\frac{e^{-i\omega t} - e^{-i(\omega+\Delta\omega)t}}{it}\,dt, \tag{21}$$

式中已经交换了积分顺序. [收敛性困难使得我们不能像相应的公式(12)那样引入一个从$-\infty$到ω的积分.]于是,因子 t 在分母中的出现有利于(21)式中的积分在$T\to\infty$时的收敛性. 如果积分的确存在,可望引入一个函数 $A(\omega)$ 使得 $f(t)$ 可以表示为 Stieltjes 积分

$$f(t) = \int_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} e^{i\omega t}dA(\omega). \tag{22}$$

1) 我们不想在这里给出一个精确定义. 稳态时间序列的特性已在本节开头叙述过了,并以气象记录作为一个典型例子 也可参看(24)式下面的评论.

定理 1 若 $A(\omega)$ 定义为

$$A(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{1-e^{-i\omega t}}{-it}dt, \tag{23}$$

则方程式(22)成立.

证明 把无穷长直线 $-\infty<\omega<\infty$ 分成长度为 $\Delta\omega$ 的区间(使零点处于一部分之中),并考虑求和

$$S_N(t)=\sum_{n=-N}^{N}e^{i\omega_n' t}[A(\omega_n+\Delta\omega)-A(\omega_n)],$$

其中 $N(\Delta\omega)=\Omega$ 是一固定数. 在极限 $\Delta\omega\to 0$、$\Omega\to\infty$ 之下,可望 $S_N(t)$ 将逼近 $f(t)$, 正如(22)式所表明的那样. 在以上表达式里, ω_n' 可以取区间 $(\omega_n,\ \omega_n+\Delta\omega)$ 内的任何值;把它取为 $\omega_n+\Delta\omega/2$ 是方便的.

经过不多的计算可以证明

$$S_N=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t')\frac{2\sin[(\Delta\omega/2)t']}{t'}\sum_{n=-N}^{N}e^{i\omega_n'(t-t')}dt'.$$

利用(4.2.27)式,我们看到上述积分中的求和部分是

$$e^{i(\Delta\omega/2)(t-t')}\frac{\sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)(t-t')(\Delta\omega)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}(t-t')(\Delta\omega)\right]}.$$

因此,对于固定的 Ω, 当 $N\to\infty$ 时 S_N 的极限是

$$S(\Omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t')\frac{\sin\Omega(t-t')}{t-t'}dt'.$$

极限过程 $\Omega\to\infty$ 对我们来说是早已熟悉的(4.2 节,引理 2). □

(1) 式具有振荡行为, (2) 式当 $|t|$ 增加时迅速衰减,对于把 (1) 式的振荡行为与 (2) 式的附加贡献结合在一起的一个时间序列,函数 $A(\omega)$ 有三个间断点,分别在 $\omega=\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 处,而在其间则有光滑变化,这是顾及(2)式的结果.

自相关函数和功率谱

很清楚,如果型如 (1) 式的分立分量的个数无穷多,而振幅平

方组成的无穷级数仍然收敛，则 $A(\omega)$ 可能会是非常复杂的。另外，表示噪音或扰动的函数一般说来不能用这样一个无限求和再加上具有傅里叶变换的一个函数来表示。通过下面的考虑可以最清楚地看清这一点。

我们引入**自相关函数** $R(\tau)$，用以分析噪音信号（用一杠来表示复共轭）：

$$R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{t_0-T}^{t_0+T}\overline{f(t)}f(t+\tau)dt\equiv\langle\overline{f(t)}f(t+\tau)\rangle_t. \tag{24}$$

（根据定义，对于稳态时间序列，自相关函数与参考时间 t_0 无关。）在(1)式所给函数的情况中，自相关函数为（练习 5）

$$R(\tau)=|A_1|^2e^{i\omega_1\tau}+|A_2|^2e^{i\omega_2\tau}+|A_3|^2e^{i\omega_3\tau}, \tag{25}$$

它呈现**非调和周期行为**。然而对于噪声或扰动信号，有

$$R(\tau)\to0 \text{ 当 } \tau\to\infty\text{时},$$

这是因为信号的随机性质消除了大距离情况的自相关性。

Norbert Wiener 及其他数学家们已经严格地发展了广义调和分析理论。我们这里不能够进一步详述，只是提一下一个主要结果。该理论表明存在有一个*功率谱*，它定义为

$$\frac{1}{2}F(\omega)=\lim_{\Delta\omega\to0}\frac{|\Delta A|^2}{\Delta\omega}. \tag{26}$$

进而可以证明这个功率谱出现在与 $R(\tau)$ 相联系着的傅里叶余弦变换中：

$$R(\tau)=\int_0^\infty F(\omega)\cos\omega\tau d\omega, \tag{27a}$$

$$F(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty R(\tau)\cos\omega\tau d\tau. \tag{27b}$$

对于 $\tau=0$，结合（27a）与(24)式得出关系式

$$\langle|f(t)|^2\rangle_t=\int_0^\infty F(\omega)d\omega. \tag{28}$$

方程式(28)是 Parseval 定理的等效公式，它表明“功率谱”这一术语是正确的，因为 $F(\omega)d\omega$ 给出了频率区间（ω, $\omega+d\omega$）对于

"能量"的贡献即 f^2 的平均值]。

功率谱与自相关之间的余弦变换关系的核验

推导(27)式是相当困难的。不过在统计意义上，自相关函数 $R(\tau)$ 是由总体均值(对于一种现象的多次重复取平均)

$$R(\tau)=\langle f(t)f(t+\tau)\rangle \tag{29}$$

来定义的，于是这一结果相对来说比较容易得到。我们取 $f(t)$ 为实函数。

从(21)式出发，并且考虑它的极限形式(当 $T\to\infty$ 时)：

$$\Delta A(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{e^{-i\omega t}-e^{-i(\omega+\Delta\omega)t}}{it}dt. \tag{30}$$

我们通过将(30)式与它的复共轭相乘来构成 $|\Delta A(\omega)|^2$，并在复共轭中采用 t' 作为 ΔA 表达式中的积分变量。这样，(t,t') 内的双重积分就可以变换成一个使用变量 (t,τ) 的积分，其中

$$\tau=t'-t. \tag{31}$$

于是得到

$$\begin{aligned}(2\pi)^2|\Delta A(\omega)|^2 &=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\tau}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}dt\frac{\{1-e^{i(\Delta\omega)(t+\tau)}\}\{1-e^{-i(\Delta\omega)t}\}}{t(t+\tau)}\\ &\quad\cdot f(t)f(t+\tau).\end{aligned}$$

让我们取统计平均。则有

$$\begin{aligned}(2\pi)^2\langle|\Delta A(\omega)|^2\rangle &=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\tau}d\tau R(\tau)\int_{-\infty}^{\infty}dt\,\frac{\{1-e^{i(\Delta\omega)(t+\tau)}\}\{1-e^{-i(\Delta\omega)t}\}}{t(t+\tau)},\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta\omega\to 0}\frac{\langle|\Delta A(\omega)|^2\rangle}{\Delta\omega} &=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\tau}d\tau R(\tau)\\ &\quad\cdot\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|1-e^{ix}|^2}{x^2}dx,\end{aligned}$$

其中变量 $x=(\Delta\omega)t$ 是一个新的积分变量，可以证明(练习 7)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|1 - e^{ix}|^2}{x^2} dx = 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = 2\pi. \qquad (32)$$

因此

$$\frac{1}{2} F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau.$$

现在，$R(\tau)$ 必须是 τ 的一个偶函数，这是因为

$$R(\tau) = \langle f(t) f(t + \tau)\rangle = \langle f(t - \tau) f(t)\rangle = R(-\tau).$$

因而就建立了余弦变换关系式.

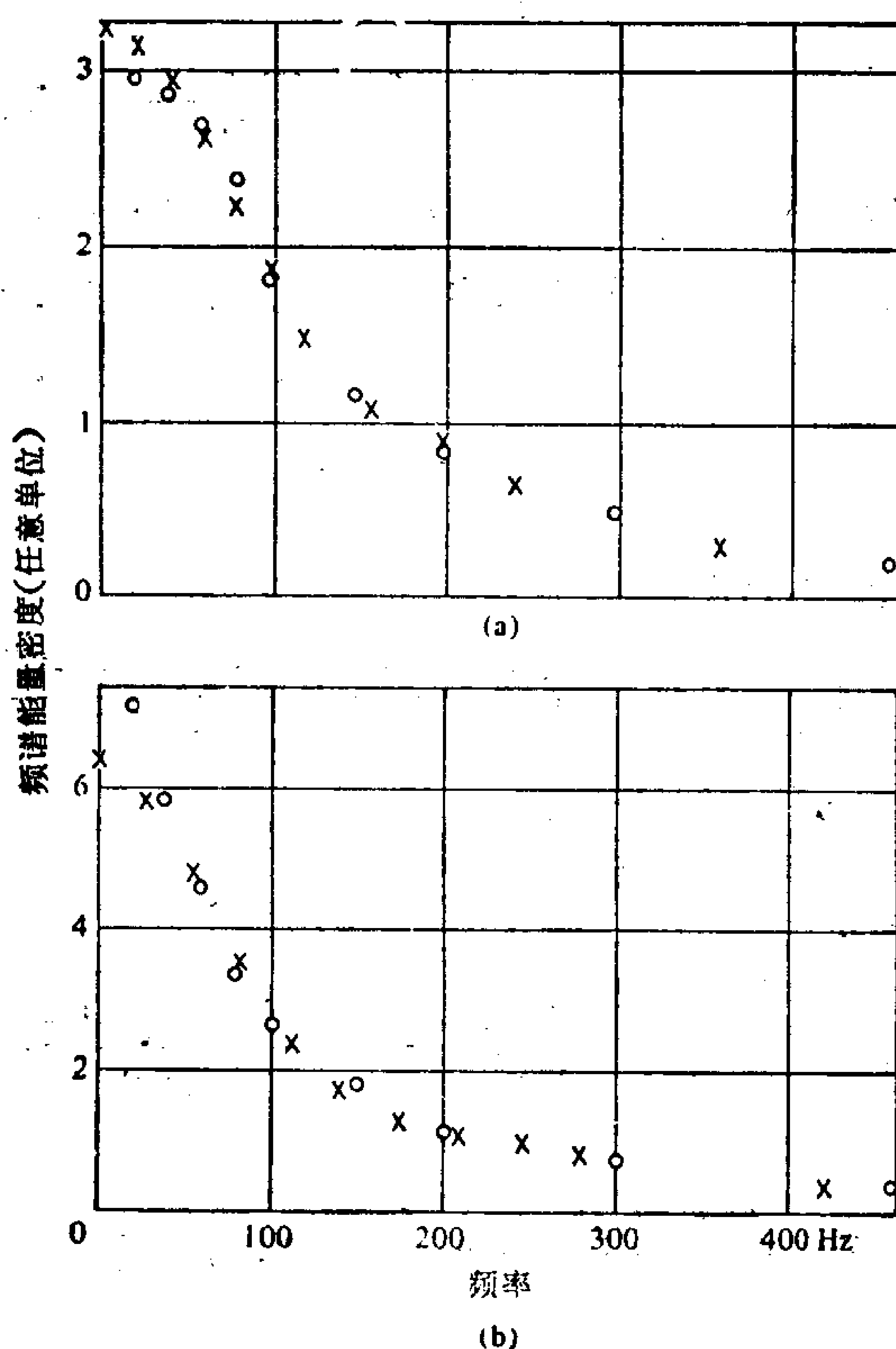


图 5.3 一维谱：○是直接度量；×是变换后的双重相关性.
[经许可从 R. Stewart 与 A. A. Townsend 的 *Phil. Trans. Roy. Soc.* (London), **A234**, 359 页(1951)一文中复制而得.]

应用

对于扰动信号，傅里叶变换关系式(27)的实验验证是由 G. I. Tayler 首先完成的．（见图 5.3.）

在现代射电观测台里，入射辐射的频谱分析是采用 (27) 式完成的． 首先算出入射信号的相关函数 $R(\tau)$，然后再求得谱函数 $F(\omega)$，它是前者的傅里叶余弦变换． 所有这些都是自动化仪器完成的．关于 F 的知识提供了关于信号源特性的线索．

练　　习

1. (a) 求证(5)式．

(b) 求证(6)式．

2. 求证(8)式．

3. 试证：(10)式中所定义的比值$\mathscr{F}$约为 $\frac{9}{10}$．

4. (课题项目)如 (19) 式下面所建议的那样，证明本节中各种形式结果的正确性．

5. 试证：(1)式中所给函数的自相关函数被用在(25)式中．

6. 把定理 1 证明中的详细步骤补上．

7. 如果你熟悉围道积分法，试利用它们来建立(32)式．

第 II 部 分

用常微分方程说明的一些基本过程

第六章　简化，量纲分析和尺度化

本卷第II部分将讲述并演示若干对应用数学家有价值的方法．本章是第II部分六章中的第一章，其中论述一些把数学问题的原始表达形式加以修改的步骤，修改以后的数学问题就变得更加易于处理了．把某些看来比较小的项删掉之后会使问题的求解比较容易，6.1节就是讲述这样修改数学问题所带来的好处和可能出现的错误的．6.2节中我们证明采用无量纲变量会使确定题解所需的参数数目减少．这仅是量纲分析的一个方面，量纲分析是一个简易的方法，而且比人们最初料想的更为微妙和有用．

在6.2节中，我们说明可以有若干种方法来选择无量纲变量，但在每种情况下所出现的较少的无量纲参数，其数目是相同的．在6.3节中，我们讨论一个特殊的选择过程，这个过程将给出所谓"尺度化了的"无量纲参数．当用这些参数对一个问题作无量纲表述时，其中出现的无量纲参数就获得了额外的意义：它们示明了各项之间的相对大小．因而，如果能选取正确地"尺度化了的"参数（这并非一件易事），那末采用某些扰动方法去求解问题的时机往往就成熟了．这些方法有两类：较简单的正则扰动方法（这是第八章的论题，以及较复杂的奇异扰动方法(第九章的论题)．扰动方法乃是我们最有用的应用数学工具之一．因此，值得花费一些气力去理解6.3节中所讨论的方法，这个方法把问题表述得能使扰动计算变得略为"自然"一些．

本章[1] 的教学策略是通过讲述一个特殊问题——从地面径向抛射一个质点，而且这个质点只受到随距离而改变的重力的作用(我们把所有的阻尼效应都忽略了．)——把各种观念介绍出来．因

1) 6.1节和6.3节大体上并且在大多数情况下是逐字逐句根据 L. A. 西格尔的文章 "Simplification and Scaling" [SIAM Rev. 14, 547–71 (1972)] 写成的．

为抛射问题是一个非常简单的问题，读者应能全力以赴地去掌握新的概念和技巧．这些题材和下一章的题材，在第八章处理生理流动问题时获得了很重要的应用．这里所需要的数学知识就是两个非线性常微分方程边值问题的求解法．以后在分析包括偏微分方程在内的更为复杂的问题时，要用到这里的许多观念．

6.1 基本简化步骤

把一个已知方程组简化之后，就有可能避免大量的机械运算和繁重的分析工作，而仍能得到有用的答案．即使对于那些不用多费工夫便能精确求解的方程组，简化后的方程组的解答不仅足够精确，而且它的特点比精确解更加明显．强有力的简化方法可以使我们能很快地求解方程，并立即判定思路是否正确．

下列**基本简化步骤**是应用数学家经常使用的：

第一步．*设法把比较小的项辨认出来*．在实践中，所谓某一已知项是否小，一般是指与同一方程中的其他项进行比较而言的．

第二步．*删掉比较小的项*，从而求解所得的简化问题．

第三步．*核对自洽性*．这就是说，利用所得到的近似解去估算被忽略的那些项，以确保它们确实是比较小的．

现在我们来介绍有关这一过程的几个例子．为此，我们用符号“～”表示“看来近似等于”，用“≈”表示“近似等于”．

基本简化步骤示例

例1 我们假定

$$x + 10y = 21, \qquad 5x + y = 7 \qquad (1a, b)$$

是一个非平庸的问题．在(1a)式中，x 项的系数比 y 项的系数小，因而人们很可能会想到在初级近似中可以把 x 项略去．于是，我们得到

$$y \sim 2.1, \qquad x \sim \frac{1}{5}(7 - 2.1) \approx 0.98. \qquad (2)$$

用(2)式中给出的值作为未知数的近似值，我们便可估算出(1a)式

左端第一项与第二项比值的大小为 $0.98/21 \approx 0.05$. 这个比值比 1 小，因而我们所取的近似看来是自洽的. 另外，x 和 y 的近似值都接近于真值 $x=1$, $y=2$.

例 2 （抛射问题），考虑这样一个问题：把一个具有不变质量 m 的物体从地球表面以初速 V 径向上抛. 令 R 表示地球的半径，$x^*(t^*)$ 表示时刻 t^* 时物体与地面的径向距离.（这里采用带星号的变量，这样在以后讨论这个例子时，我们就可以引进不带星号的无量纲变量.）如果我们忽略空气阻力，那末基本方程和初始条件为

$$\frac{d^2x^*}{dt^{*2}}=-\frac{gR^2}{(x^*+R)^2}, \quad x^*(0)=0, \quad \frac{dx^*}{dt^*}(0)=V. \qquad (3)$$

（在这里我们仅仅令加速度与单位质量所受的力相等，而把平方反比定律写成这样的形式，以使得 $x^*=0$ 时，它正确地给出加速度 $-g$.）

如果在某种意义上来说 V 比较小，那末位移 x^* 应该比 R 小. 于是，我们就可以考虑用下列简化式代替(3)式

$$\frac{d^2x^*}{dt^{*2}}=-g, \quad x^*(0)=0, \quad \frac{dx^*}{dt^*}(0)=V, \qquad (4)$$

其解为

$$\frac{dx^*}{dt^*}=-gt^*+V, \quad x^*=-\frac{1}{2}gt^{*2}+Vt^*. \qquad (5)$$

在 $t^*=Vg^{-1}$ 时刻，速度为零，我们从(5)知道，x^* 达到的最大值为 $1/2V^2g^{-1}$. 因此 x^*/R 最多等于 $1/2V^2/gR$，而当 V^2 比 gR 小时，我们的近似是自洽的.

对于近似是自洽的这种性质一般总是感到心安理得，但是精确地讲在现在的情况下，自洽性倒底意味着什么呢？为了使读者对这个问题的回答产生兴趣，我们现在来举出几个例子说明上述基本简化步骤可能会出问题的某些情况.

两个惩戒性的例子[1]

例 3 考虑方程

$$0.01x + y = 0.1, \qquad x + 101y = 11. \tag{6a,b}$$

在 (6a) 式中，x 项的系数比 y 项的系数小；因而忽略前一项，我们便得到

$$y \sim 0.1, \qquad x \sim 11 - 101(0.1) = 0.9. \tag{7}$$

用 (7) 式进行估算，我们得到 (6a) 式左端的第一项与第二项之比的大小为 $(0.01)(0.9)/0.1 = 0.09$. 因为这个数值比 1 小，因而我们的近似看来是自洽的. 但是精确解为 $y = 1$, $x = -90$; 所以对 y 的"近似"偏离了 9 倍，而对 x 的"近似"则偏离了 99 倍，而且符号也错了.

为了弄明白出了什么毛病，让我们把(6)式加以一般化，从而考虑下列关于 $x(\varepsilon)$ 和 $y(\varepsilon)$ 的方程

$$\varepsilon x + y = 0.1, \qquad x + 101y = 11. \tag{8}$$

当 $\varepsilon = 0.01$ 时方程(8)化为(6)式. (7)式的近似相当于取 $\varepsilon = 0$. 但是当 $\varepsilon = 0.01$ 时，$x(\varepsilon) \approx x(0)$ 和 $y(\varepsilon) \approx y(0)$ 是否正确呢? 一旦提出这个问题，我们便清楚，当 ε 在 $\varepsilon = 0$ 附近变化时，如果 $x(\varepsilon)$, $y(\varepsilon)$ 变化很快，那末我们就难以回答了. 从(8)式的精确解可以看到，情况确实如此:

$$x = \frac{0.9}{1 - 101\varepsilon}, \quad y = \frac{0.1 - 11\varepsilon}{1 - 101\varepsilon}, \quad \varepsilon \neq 1/101. \tag{9}$$

例 3 说明，一个看来自洽的近似实际上可能并不自洽. 用 $x(0)$, $y(0)$ 作为 $x(0.01)$, $y(0.01)$ 的近似时，我们通过忽略 $\varepsilon x(\varepsilon)$ 项来对原方程作简化. 如果 $|0.01x(0.01)|$ 比 $|y(0.01)|$ 小，那末这个方法是自洽的. 假若我们只知道近似解 $x(0)$ 和 $y(0)$，那末我们能够做到的核对自洽性的最好的方法就是考察一下 $|0.01x(0)/y(0)|$. 这个比值是一个令人满意的小量 0.09，因而所取的近似

1) 其他例子可参阅 C.Lanczos, *Applied Analysis* (London: Pitman, 1957), 第 198 和 276 页.

看来是自洽的．然而我们却受到了蒙骗，因为精确解的结果是

$$\left|\frac{0.01x(0.01)}{y(0.01)}\right| = 9.$$

因此，我们得把**表观自洽**（对于被忽略项来说，所作的近似是小的）与**真正自洽**（被忽略项确实是小的）区别开来．基本简化过程的第三步实际上应该称之为对于表观自洽性的核对．

例 3 的近似是一个蹩脚的近似，这一点并不意外，因为这个近似在表观上是自洽的，但却不是真正自洽的．不过一种近似表观上能够自洽，但却不能真正自洽，这是令人感到沮丧的．更使人感到沮丧的是一个似乎真正自洽的近似却可能会是一个十分不精确的近似，下面就是一个示例．

例 4 （Wilkinson, 1963, 第 41 页）．多项式

$$(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-20)$$
$$= x^{20} - 210x^{19} + \cdots \tag{10}$$

的零点为头 20 个正整数．如果在上式中加上了 εx^{19} 使 x^{19} 的系数发生了改变，此处 $\varepsilon = -2^{-23} = -1.19\times 10^{-8}$，那末较小的零点几乎没有改变，但较大的零点却发生了根本的变化，以致变更后的方程有了五对共轭复根，它们的近似地为 $10\pm 0.64i$，$12\pm 1.7i$，$14\pm 2.5i$，$17\pm 2.8i$ 和 $20\pm 1.9i$．无论是用近似零点还是用精确零点来计算，所加的项 εx^{19} 比原有的项 $-210x^{19}$ 仍然要小．表观的和真正的自洽性似乎都得到了证明，但这样的近似却仍然是一种蹩脚的近似．

调节和灵敏度

我们已向大家示明存在着**劣质的自洽近似**．显然有必要更谨慎地考察一下这个问题．我们将会发现，可以作出某些一般性的评述，但是，更进一步的理解多少需要对各种问题的类型作一些详细的分析．

如同例 3 所说明的那样，仅当问题得到了很好的调节，也就是说把问题的表述作了微小改变之后，其解随之也只产生微小的改

变，那末把一个问题改变了一个小量这样一种知识才是有意义的。如果情况并非如此，那末这个问题便称之为**病态调节的**．如果即使被忽略项真的很小，但也不能指望这种忽略使解的改变很小的话，那末为了方便起见，也采用这样的术语：**一个问题的解对忽略 T 项很敏感**．因而 Wilkinson（1963）报导说，(10)式的较小的零点对任何系数的改变(这种改变显然可以看作是忽略了某些项)并不敏感．而且甚至较大的零点对某些系数的小改变也是不敏感的．但是较大的零点对某几个系数的小改变是敏感的，这几个系数就是多项式中与较高幂次项相乘的那些系数．

对于核对自洽性的价值，似乎可能作出的唯一的一般结论是：*缺乏表观自洽性几乎肯定是与蹩脚的近似联系在一起的*．为了示明这一点，令 x 表示一个问题的真解，$\tilde{x}$ 表示忽略 T 项得到的近似解．如果 $T(\tilde{x})$ 或 $T(x)$ 很小，那末忽略 T 就分别是表观自洽和真正自洽的．(这里所用的符号是象征性的，例如 x 可以是矢量函数，T 可以依赖于 x 的分量及它们的几个导数．如果解对 T 的忽略很敏感，那末按照定义，就不能指望这种忽略能得到一种好的近似．假定 T 连续变化，如果解对 T 的忽略不敏感，那末

$$[T(x)\text{小}] \text{ 意味着 } [\tilde{x} \approx x] \text{ 意味着 } [T(\tilde{x})\text{小}].$$

因而发现表观误差 $T(\tilde{x})$ 很大与假设该忽略项真正很小，这在逻辑上是不自洽的，而忽略一个真正很大的项就不可能指望得到好的近似．

含糊不清的词眼“大”和“小”一次又一次出现，但是这些词的确切涵义只能在一个特殊问题的行文中才能给出．因而(譬如说)加速度数值的大小，可以随时间尺度的改变而改变，但是这种改变对加速度是否可以忽略却不起作用．举一个稍为不同的例子，例如某一温度应该是 1℃，但却算作 1.1℃，那末误差就是 10%．如果用华氏温度，百分误差仅为 0.5%．但是，后面这个百分比比前面的小得多这是没有什么意义的．无论采用何种温度尺度，决定某一误差能否接受取决于问题的科学背景，因而必定与所用的单位无关．

注评．时间尺度的改变和温度尺度的改变之间的差别在于：前者只涉及单位的选择，而后者还涉及零点的选择．

为了作更进一步的研究，必须考虑问题的具体类型．我们将要讨论的是函数零点的确定和二阶常微分方程．有关线性代数方程组的类似的论述，请参阅本章开头提到的 1972 年西格尔的文章．

函数的零点

令 $f(x, \varepsilon)$ 的一个零点为 $x(\varepsilon)$，因而

$$f[x(\varepsilon), \varepsilon] \equiv 0. \tag{11}$$

假定 ε 是一个小参数，并令零点 $x(\varepsilon)$ 的近似 $x^{(0)}$ 是取 $\varepsilon = 0$ 得到的，即 $x^{(0)}$ 满足 $f(x^{(0)},0) = 0$；让 $f(x, 0)$ 而不是让 $f(x, \varepsilon)$ 等于零的**方程误差**为 $f(x,\varepsilon) - f(x,0)$．按照这个表达式是在 $x = x^{(0)}$ 处还是在 $x = x(\varepsilon)$ 处算得而把误差称之为表观的还是真正的．因而对于真正的方程误差 g，我们有

$$g \equiv f[x(\varepsilon), \varepsilon] - f[x(\varepsilon), 0] = -\varepsilon f_x^{(0)} x'(0) + O(\varepsilon^2).$$

（我们继续用上角标 0 表示 ε 已取作零．）表观方程误差或**残数**满足

$$r \equiv f[x^{(0)},\varepsilon] - f[x^{(0)},0] = f[x^{(0)},\varepsilon] = \varepsilon f_\varepsilon^{(0)} + O(\varepsilon^2).$$

我们希望把 r 与解的误差 $h = x(\varepsilon) - x^{(0)}$ 联系起来．我们将只保留 ε 的最低次幂．准确到最低阶有

$$h(\varepsilon) = \varepsilon x'(0),$$

但是

$$0 \equiv f[x(\varepsilon),\varepsilon] - f[x^{(0)}, 0] = \varepsilon\{f_x^{(0)} x'(0) + f_\varepsilon^{(0)}\} + O(\varepsilon^2),$$

花括弧中的表达式为零暗示着两件事：

(i) 真正的误差和表观误差在一价近似范围内是相等的；

(ii) 在一价近似范围内，误差为

$$h = -\frac{r}{f_x^{(0)}}. \tag{12}$$

误差不仅与残数 r 有关，而且还依赖于问题的条件，这在一般

情况下总是正确的．在现在这种情况下，“条件”与 $f_x^{(0)}$ 有关．特别是，如果 $f_x^{(0)}$ 很小，那末 f 的小改变就与 x 的 $O(1)$ 改变有关；换句话说，方程的小改变与解的非小改变联系在一起．如果存在着这样的劣质调节，那末尽管残数是小的，误差也仍可以是大的．相反，对于调节得很好的问题 [$f_x^{(0)}$ 的量级为 1]，(12) 式表明，大的残数 r 排除了小的误差 h.

如果我们把(12)式写作如下的形式

$$\frac{h}{x}=-\frac{1}{f_x^{(0)}}\left(\frac{r}{x}\right),$$

那末，我们就看到，在估算相对误差 h/x 时，与此有关的正是相对残数 r/x，其中 x 是解．除了劣质调节的情况之外，r 可以与近似解的大小相当.因而在例 4 中，人们除了应当考查忽略项与保留项的比值之外，还要考查忽略项与估算解的比值．后一比值为 $\varepsilon\tilde{x}^{19}/\tilde{x}$.对于 $\varepsilon=-2^{-23}$，这个比值在 x 接近于 1 时是小的，但在 $\tilde{x}$ 比 2 大得多时变大了．这就清楚地告诫我们，对于较大的根来说发生了困难．实际上这种告诫多少有点过早，因为对于大约直到 10 的零点，这里的调节因子仍可使误差保持在合理的范围内．[有关这一问题的敏感性的详细讨论，请参阅 Wilkinson (1963).] 在正规的情况下，可以指望多项式的各项在其系数具有单位数值时大小相同；在这种情况下，与任何保留项的比较，将给出所需的残数和解之间的比值大小．但例 4 的多项式并不是“正规”的，其中的很多系数非常大，不过这些项因为符号交替而几乎相消．具有这样的大而又几乎相消的项的“变态”方程是并不罕见的；在把忽略项与保留下来的假定的“典型”项相比较时，我们必须牢记这一点．

二阶微分方程

考虑 $x(t,\varepsilon)$ 的一个初值问题：

$$f(t,x,\dot{x},\ddot{x},\varepsilon)=0;\quad x(0)=A,\quad \dot{x}(0)=B,$$

$$|\varepsilon|\ll 1,\qquad \cdot=\frac{d}{dt}. \tag{13}$$

下面的推理与刚才讨论方程 $f[x(\varepsilon),\varepsilon]=0$ 时所用的推理十分类似.

令 $\varepsilon=0$, 可以求得一个近似解:

$$f(t, x^{(0)}, \dot{x}^{(0)}, \ddot{x}^{(0)}, 0)=0.$$

再令 $\varepsilon=0$, 我们还可以写出方程误差

$$f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \varepsilon)-f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, 0)$$

为了得到残数,我们计算 $x=x^{(0)}$ 时的方程误差

$$r\equiv f(t,x^{(0)},\dot{x}^{(0)},\ddot{x}^{(0)},\varepsilon)=\varepsilon[f_5]_{\varepsilon=0}+O(\varepsilon^2).$$

真正的方程误差 g 满足

$$g=-f(t,x,\dot{x},\ddot{x}, 0)=-\varepsilon[f_2x_\varepsilon+f_3\dot{x}_\varepsilon+f_4\ddot{x}_\varepsilon]_{\varepsilon=0}+O(\varepsilon^2),$$

(下标表示偏导数.)但是

$$\begin{aligned}0&=f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \varepsilon)-f(t, x^{(0)}, \dot{x}^{(0)}, \ddot{x}^{(0)}, 0)\\&=\varepsilon[f_2x_\varepsilon+f_3\dot{x}_\varepsilon+f_4\ddot{x}_\varepsilon+f_5]_{\varepsilon=0}+O(\varepsilon^2),\end{aligned}$$

因此与以前一样,用一种使我们能想起所有项都是在 $\varepsilon=0$ 处计算的上标,我们得到

$$f_4^{(0)}\ddot{x}_\varepsilon^{(0)}+f_3^{(0)}\dot{x}_\varepsilon^{(0)}+f_2^{(0)}x_\varepsilon^{(0)}=-f_5^{(0)}. \tag{14}$$

从(14)我们得到结论: 当准确到最低阶时, 残数方程误差和真正的方程误差是相同的. 同样现在我们也可得到用残数表示的误差表达式. 为此,我们作如下的定义

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(t)&\equiv(f_2^{(0)}, f_3^{(0)}, f_4^{(0)}),\\\mathbf{h}(t)&\equiv(x-x^{(0)}, \dot{x}-\dot{x}^{(0)}, \ddot{x}-\ddot{x}^{(0)}).\end{aligned} \tag{15}$$

我们注意到

$$\mathbf{h}(t)\equiv\varepsilon(x_\varepsilon^{(0)}, \dot{x}_\varepsilon^{(0)}, \ddot{x}_\varepsilon^{(0)})+O(\varepsilon^2),$$

因而,准确到最低阶时,(14)意味着

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{h}=-r \tag{16}$$

而

$$|r|=|\mathbf{F}||\mathbf{h}||\cos(\mathbf{F},\mathbf{h})|\leqslant|\mathbf{F}||\mathbf{h}|$$

因此,

$$|\mathbf{h}|\geqslant\frac{|r|}{|\mathbf{F}|}.$$

我们再次看到，如果问题不是劣质调节的，那末大残数就排除了小误差。

请注意，误差矢量 $\mathbf{h}$ 和条件矢量 $\mathbf{F}$ 不仅涉及解的特性，而且也涉及到解的头两个导数的特性。因此，即使方程的小改变与解本身的小改变相互联系在一起，（例如）如果解的二阶导数受到了显著的影响，也会引起劣质调节。

一个小残数是否意味着小误差，很难从(16)式对此作出任何普遍的结论。劣质调节无疑是必须加以排除的。对于小的 r 不是由于 $x_\varepsilon^{(0)}$, $\dot{x}_\varepsilon^{(0)}$, 和 $\ddot{x}_\varepsilon^{(0)}$ 的非小量误差的相消而得到的这一点，人们必然感到自我满足。在特殊情况下人们还可以作出进一步的结论。为了举例说明这一点，考虑

$$\ddot{x}+(1+\varepsilon x)^{-2}=0;\quad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=1. \tag{17}$$

如在 6.3 节中说明的那样，(17)式是在参数 $\varepsilon=V^2/Rg$ 很小时把例 2 中的抛射问题的基本方程恰当地无量纲化后的形式。在此情况下，$\mathbf{F}=(0,0,1)$，并且 $r=\varepsilon x^{(0)}(t)$，因此可以从(16)式立即推得

$$|\varepsilon\ddot{x}_\varepsilon^{(0)}|\leqslant\varepsilon\mathrm{Max}\ x^{(0)}(t). \tag{18}$$

准确到 ε 的一阶项，上述关系表明，加速度的误差是小的。积分两次就可以估计 x 本身的误差（练习 1）。

考虑一个非线性单摆的小振动，可以引进一个重要观点。7.1 节指出，这个问题的恰当的表述形式为

$$\ddot{\theta}+\varepsilon^{-1/2}\sin(\varepsilon^{1/2}\theta)=0;\quad \theta(0)=1,$$
$$\dot{\theta}(0)=0,\quad 0<\varepsilon\leqslant 1. \tag{19}$$

这里 $\theta(t)$ 是时刻 t 时角位移的大小，ε 是初始角位移，假定它是小量。零级近似为 $\theta^{(0)}=\cos t$. 利用(16)式表示此误差，我们得到

$$\varepsilon[\ddot{\theta}_\varepsilon^{(0)}+\theta_\varepsilon^{(0)}]=r=\varepsilon\left(\frac{1}{6}\right)[\theta^{(0)}]^3. \tag{20}$$

通过以上的演示，我们明白了为什么难于根据残数的知识来约束误差，这是因为(20)式恰好是 $\theta_\varepsilon^{(0)}$ 的微分方程的缘故。于是放在

我们面前的问题是：根据强迫项大小的知识去对线性微分方程的解作出估计．这里没有普遍的公式，但是下列简单计算就是我们所能作到的事情的典范．利用参数变易法，并注意到初始条件 $\ddot{\theta}_\varepsilon^{(0)}(0)=\dot{\theta}_\varepsilon^{(0)}=0$ 成立，我们写出

$$\varepsilon\theta_\varepsilon^{(0)}(t)=\int_0^t \sin(t-\xi)r(\xi)d\xi.$$

因为 $|r|\leqslant\frac{\varepsilon}{6}$，所以对于 $0\leqslant t\leqslant T$，就有

$$|\varepsilon\theta_\varepsilon^{(0)}(t)|\leqslant\frac{\varepsilon T}{6}.$$

正如大家熟知的那样，误差确实随 T 的增加而增加．

从另外一种观点来看，现在的例子说明，欲知一级近似是否正确的最好方法，或许是计算二级近似．总之，$\theta_\varepsilon^{(0)}$ 就是 $\theta(t,\varepsilon)$ 幂级数展开中 $O(\varepsilon)$ 的系数．$\theta_\varepsilon^{(0)}$ 遵循的方程(20)，它就是从可以看作为扰动理论的参数微分法[1]那里得来的．

建议

在关于基本简化步骤的分析中，我们开始探索残数和误差之间的关系．在某种意义上来讲，我们只抓住了问题的皮毛，因为数值分析的一个重要部分本身就涉及到如何用逐次减小残数的方法来得到各种问题逐步更好的近似[2]．但是我们主要关心的是那些如此难以克服以致逐次近似也是毫无可能的问题——人们只能得到一级近似．对于这样一些经常为应用数学家们碰到的问题，上

1) 在理解各种系统对导数变化的敏感性时，有关象 θ_ε 这种函数的计算及其作用的详细知识，请参阅 R. Tomovic 和 M. Vukobratovic 所著的《*General Sensitivity Theory*》(N. Y. Elsevier, 1972)．

2) 借助格林函数和李卜希兹条件，往往可以用小残数的存在去说明近似的优点．例如，参阅 N. Ferguson 和 B. Finlayson．关于一个多组元系统传热传质问题的解析-数值混合求解方法的讨论，该系统在催化剂片中进行着化学反应．[*Amer. Inst. Chem. Eng. J.* **18**, 1053—1059(1972)]．在某一情况下，证明精度达 13 位数字．

述讨论使我们能作出如下的建议:

(i) 在困难的问题中采用基本的简化步骤. 无需作很多额外的工作去估计被忽略项的大小，而你至少要知道所作的简化在什么地方几乎肯定是不正确的(此时残数很大).

(ii) 虽然很难限制与给定残数联系在一起的误差，但是把残数看成是一种额外的强制,运用物理直觉去估算其作用,这可能是有帮助的. 另一种可能性是用平均值和最大值代替残数，并估算这种恒定强制的作用. 为了发现隐藏着的劣质调节，在问题中作一些小的随机修正,并重新求解 (Lanczos，1957，第 170 页,见本章开头的脚注).

(iii) 注意把忽略项与保留项加以比较，为了估算相对误差，最好把忽略项与你得到的近似解进行比较.

(iv) 一个应用数学家研究简化的模型以便对复杂情况取得理解. 按照这种精神，他不仅把对较简单的经典问题的数值分析和扰动理论的深入研究看作对问题本身是有价值的，而且还认为它对于指出在更为复杂的问题中能指望出现些什么也是有价值的.

(v) 只要有可能,就去算出"额外"项,并用它去估算一级近似的误差. [关于这条建议的示例,请参阅围绕着方程(7.1.25)的讨论.]

练　　习

1. 利用(18)式给出 $|\varepsilon x_\varepsilon^{(0)}(t)|$ 的界.
2. 一块处于定常状态下的平板，$x=0$ 处温度为 T_0，$x=1$ 处为 T_1. 热导率为 $k=k_0\exp(\varepsilon x)$，式中 $|\varepsilon|\ll 1$. 用 k 的平均值代替 k，求近似的温度分析. 并核对自洽性.
3. 水从容器的一个小圆孔中流出来，速度 v 近似地为 $v=0.6\sqrt{2gh}$，式中 g 是重力加速度，h 是小孔上面水的高度. 令 $A(h)$ 为高度 h 处容器的横截面积.

   a) 推出

$$\frac{dh}{dt} = -0.6A(0)\frac{\sqrt{2gh}}{A(h)}.$$

b）假定容器真实形状的近似为 $A(h) = h^c$，c 是一个常数．求解这个初值问题．讨论这一近似的表观自洽性．有没有近似既能表观自洽又能劣质自洽的情况存在？

6.2 量纲分析

在理论科学家现有的技巧中，量纲分析占据着特殊的地位．其中所需的形式运算是很容易的，但是经过仔细的考查，就可以看出其中涉及的观念是相当深刻的（参阅 Bridgman，1931）．现在已经知道，在连续群理论中，量纲分析与偏微分方程的相似解具有共同的基础．（参阅 Birkhoff，1960．）

过多地讲述量纲分析的理论问题会使我们离题太远．有关这方面的内容，读者可参阅文献．我们宁可基本上采用 6.1 节所阐述的简单抛射问题来说明一般概念，用这种方法来引进这一课题的实际内容．（在 4.1 节末尾，讨论了与热流有关的量纲分析的某些方面．）

我们将要示明怎样把一个微分方程无量纲化．此外还要说明如何来利用无量纲化，即使不知道某一现象所遵循的方程，只要能列出有关参数就行．在论述量纲分析的优点时，简要地讨论了几何相似模型的应用．我们假定读者已初步熟知了物理量纲的概念，例如，"正如加速度的标准单位厘米/秒^{2}所指出的那样，其量纲为长度/时间^2．"

把一个微分方程化成无量纲形式

我们可以通过抛射问题去非常简单地说明量纲分析的主要概念．抛射问题请参阅 6.1 节的例 2．以初速 V 径向抛射一个质点，我们可以把它在时间 t^* 时位移 $x^*(t^*)$ 的方程重新写出

$$\frac{d^2x^*}{dt^{*2}} = -\frac{gR^2}{(x^*+R)^2}, \quad x^*(0) = 0,$$

$$\frac{dx^*(0)}{dt^*}=V,\qquad (1a,b,c)$$

式中 R 是地球的半径，g 是重力加速度，当质点在地球表面时，x^* 取为零.

为了把(1)式变成无量纲形式，我们施行**无量纲化步骤的**二步曲，这对于很大一类问题都是适用的.

第一步. 列出所有的参数和变量以及它们的量纲（用**基本单位**写出，例如质量写成 $\mathscr{M}$，长度 $\mathscr{L}$，时间 $\mathscr{T}$）. 在现在这个例子中，我们列表如下:

变　　量	量　　纲
因变量 x^*	$\mathscr{L}$
自变量 t^*	$\mathscr{T}$
参数	
重力加速度 g	$\mathscr{L}\mathscr{T}^{-2}$
初始速度 V	$\mathscr{L}\mathscr{T}^{-1}$
地球半径 R	$\mathscr{L}$

第二步. 令 v^* 为一个变量，构成一个与 v^* 具有同样量纲的参数组合 p^*，引进 v^*/p^* 作为无量纲量. 这里 R 与 x^* 的量纲相同，而 RV^{-1} 与 t^* 的量纲相同. 于是我们引进新变量 y 和 τ，其定义如下:

$$y=\frac{x^*}{R},\qquad \tau=\frac{t^*}{RV^{-1}}.\qquad (2a,b)$$

这两个变量都是**无量纲的**，因为无论采用何种量度标准，它们的数值都相同. 例如，如果 $R=4000$ 英里，$x^*=8000$ 英里，那末 $y=2$；如果采用公里作为标准长度，我们则有 6436 公里，$x^*=12876$ 公里，那末仍然有 $y=2$.

把(2)式中的新变量代入(1)式需要用到链锁法则. 于是(运算的细节已详细写出.)

$$\frac{d^2x^*}{dt^{*2}}=\frac{d^2(yR)}{dt^{*2}}=R\frac{d}{dt^*}\frac{dy}{dt^*}=R\frac{d}{dt^*}\left(\frac{dy}{d\tau}\frac{d\tau}{dt^*}\right)$$

$$= R\frac{d}{dt^*}\left(\frac{dy}{d\tau}\frac{V}{R}\right) = V\frac{d}{dt^*}\left(\frac{dy}{d\tau}\right)$$

$$= V\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dy}{d\tau}\right)\frac{d\tau}{dt^*} = \frac{V^2}{R}\frac{d^2y}{d\tau^2}, \tag{3}$$

进一步作一点计算(练习 1a)便可给出最终的结果:

$$\varepsilon\frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{1}{(y+1)^2}, \quad y(0) = 0,$$

$$\frac{dy}{d\tau}(0) = 1, \tag{4}$$

式中

$$\varepsilon = \frac{V^2}{gR}. \tag{5}$$

注意参数 ε 的量纲为

$$\frac{(\mathscr{L}\mathscr{T}^{-1})^2}{\mathscr{L}\mathscr{T}^{-2}\mathscr{L}} = \mathscr{L}^{2-2}\mathscr{T}^{-2+2} = \mathscr{L}^0\mathscr{T}^0,$$

这就是说 ε 是无量纲的.

注评: (i) 在 (2) 式中, R 称为**内禀参考长度**, τ 称为**内禀参考时间**. 一般来讲,人们总把内禀参考量定义为度量标准,它是由已知问题中的一些参数组成的; (ii) 可以证明,在一个恰当地加以无量纲化的问题中,只能出现参数的无量纲联合(象 ε),有时称为**无量纲组合**. (iii) 我们已用带星号的量表示有量纲变量,这样便能够更加方便地用不带星号的变量去代替最终的无量纲量. (iv) 在无量纲化时,继续需要进行象(3)式那样的计算. 这种计算等价于把常数作形式上的移动,因而可以把它们象下式那样地提到导数前面去:

$$\frac{d^2x^*}{d(t^*)^2} = \frac{d^2(yR)}{d(RV^{-1}\tau)^2} = \frac{R}{R^2V^{-2}}\frac{d^2y}{d\tau^2} = \frac{V^2}{R}\frac{d^2y}{d\tau^2}. \tag{6}$$

(v)除了质量$\mathscr{M}$、长度$\mathscr{L}$、时间$\mathscr{T}$以外,往往必须把温度Θ作为基本单位包括进来. 另外,在某些特殊问题中,假定还存在有另外的基本单位对于处理问题是有利的(参阅练习 7).

很明显, 如若注意到参数间的依赖关系,我们就能看出(1)式

具有如下形式的一个解

$$x^* = x^*(t^*; g, R, V), \tag{7}$$

而(4)式的解可以写作

$$y = y(\tau, \varepsilon). \tag{8}$$

解(7)依赖于三个参数 g, R 和 V，但在(8)式中，只出现一个无量纲参数 ε.

除了(2b)式以外，还有另一种选择方案，我们可以把参考时间建立在加速度 g 的基础上，从而写出

$$z = \frac{x^*}{R}, \quad \tau_1 = \frac{t^*}{\sqrt{Rg^{-1}}}. \tag{9}$$

这样(1)式变为

$$\frac{d^2z}{d\tau_1^2} = -\frac{1}{(z+1)^2}, \quad z(0) = 0, \quad \frac{dz}{d\tau_1}(0) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

此时，我们可以预料它的解具有下列形式

$$z = z(\tau_1, \varepsilon). \tag{11}$$

存在着无数的参考时间，这是因为对于任何函数 $h(\varepsilon)$，都可把 hRV^{-1} 取作参考时间. 这些参考时间中不论采用哪一个，情况也仍象(8)式和(11)式一样，离开地面的无量纲距离仅仅依赖于一个无量纲时间和单一的无量纲参数 ε.

先验地把长度与一个内禀参考长度去比较，而不是与诸如某个金属杆的两个记号之间的距离那类任意长度去作比较，这样做是有好处的. 如同上例所表明的那样，情况确实如此，其好处在于当采用无量纲参数时，出现在一个问题中的参数的数目减少了. (更精确地说，没有丧失参数，但它们仅以某种无量纲组合的形式出现.)上例还说明，除了最简单的问题以外，还可以用各种不同的方式进行无量纲化，各种方式使参数减少的数目相同.

我们要强调，由于在无量纲形式的抛射问题中，全部参数只出现在组合 ε 中，因而从抛射问题中找到的任何无量纲的结果仅依赖于参数 ε. 例如，假定我们对抛射体到达最高处的无量纲时间 τ_M 感到兴趣，那末利用无量纲表达式(4)，我们看到，只要解出下列

方程

$$\left.\frac{dy}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_M}=0,$$

便可确定这一时间．但是既然 $y=y(\tau,\varepsilon)$，上述方程表明，存在着某个函数 f，使得 $\tau_M=f(\varepsilon)$．用原始变量来表示时，我们就得到到达最高处时的有量纲时间 t_M^* 的表达式

$$\frac{t_M^*}{RV^{-1}}=f\left(\frac{V^2}{gR}\right). \tag{12}$$

函数关系的无量纲化

我们现在来说明，对于某个问题来说，只要知道微分方程中应该出现的所有变量和参数，即使并不知道这个方程，(12)式也仍然可以推导出来．我们还是采用抛射问题来示明一般的方法．(在下面所需的六个步骤的每步之后，我们将立即举出一个特例．)这一方法基于下列观念：既然问题的参数都具有形如 $\mathscr{M}^a\mathscr{L}^b\mathscr{T}^c$ 的量纲，那末人们可以采用这些参数的某种幂积去寻找无量纲的参数组合．

第一步．假定某个感兴趣的无量纲量是该问题中有量纲参数的一个函数 Φ[1)]

$$\frac{t^*}{R^{1/2}g^{-1/2}}=\Phi(V,g,R) \tag{13}$$

第二步．考虑由 Φ 的自变量的幂积所组成的项 π．

$$\pi=V^{\alpha_1}g^{\alpha_2}R^{\alpha_3},\qquad \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\text{ 是常数}. \tag{14}$$

第三步．把各变量的量纲代入

$$\begin{aligned}\pi\text{ 的量纲}&=(\mathscr{L}\mathscr{T}^{-1})^{\alpha_1}(\mathscr{L}\mathscr{T}^{-2})^{\alpha_2}\mathscr{L}^{\alpha_3}\\&=\mathscr{L}^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\mathscr{T}^{-\alpha_1-2\alpha_2}.\end{aligned}$$

第四步．为了得到无量纲参数 π，要求 $\mathscr{M}$，$\mathscr{L}$，$\mathscr{T}$ 等的指数等于零，这样就得到一个线性代数方程组

1) 如果在原则上能确定单值函数 Φ 的数学问题中会出现某个参数，那末就应该把它包括进来．

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0, \quad -\alpha_1-2\alpha_2=0.$$

第五步. 寻找用任意常数 $c_1, c_2, \cdots$ 等表示的代数方程组的通解.

$$\begin{aligned} &\alpha_2=c_1, \qquad c_1\text{ 任意}. \\ &\alpha_1=-2c_1, \quad \alpha_3=-(-2c_1+c_1)=c_1. \end{aligned} \tag{15}$$

第六步. 把 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ 等代回 π 以得到形如 $\pi_1^{c_1}, \pi_2^{c_2}\cdots$ 的表达式. Φ 的原始自变量的任何无量纲组合便可以表示为 π_i 的函数. 这样,就可以用 π_i 的函数来代替 Φ.

在现在的例子中,我们从(14)和(15)得到

$$\pi=V^{-2c_1}g^{c_1}R^{c_1}=\left(\frac{gR}{V^2}\right)^{c_1}.$$

由于对于任选的 c_1, π 都是无量纲的,所以,当我们特别取 $c_1=1$ 时,就得到无量纲参数 $gR/V^2\equiv\pi_1$. V, g 和 R 的其他任何无量纲组合必然是 π_1 的函数. 既然(13)式的左端是无量纲的, 右端必然也是无量纲的. [否则我们在用两种不同的测量标准计算 $\Phi(V, g, R)$ 时,就可能得到矛盾的结论.]因此,对某个函数 Φ, 必然有

$$\frac{t_M^*}{R^{1/2}g^{-1/2}}=\phi\left(\frac{gR}{V^2}\right), \tag{16}$$

可以把上面的结果写作

$$t_M^*=R^{1/2}g^{-1/2}\phi\left(\frac{gR}{V^2}\right). \tag{17}$$

而我们从该问题的微分方程表述形式所推得的形如(12)式的式子为

$$t_M^*=RV^{-1}f\left(\frac{V^2}{gR}\right). \tag{18}$$

(17)式等价于(18)式, 这一点也许并不明显, 但是可把(16)式写作

$$t_M^*=RV^{-1}R^{-1/2}Vg^{-1/2}\phi\left(\frac{gR}{V^2}\right). \tag{19}$$

如果我们能够选择一个函数 ϕ 使 (19) 式成立,那末我们也可以选择一个函数 $f(\varepsilon)=\varepsilon^{1/2}\varphi(1/\varepsilon)$ 使(18)式成立,反之亦然.

我们已证实了上述论断: 即使不知道基本方程和初始条件,

也能够证明时间 t_M^* 和 $R\,V^{-1}$ 的商只依赖于三个参数 V，g 和 R 的一个无量纲组合 V^2/gR. 从下列讨论便可弄清楚这种能力的价值. 我们假想有人正在从各行星上做的许多实验中收集关于 t_M^* 的数据. 一个无知的人可能会这样来整理数据: 对于某一 R 值和固定的 g 值画出 t_M^* 随 V 变化的曲线. 然后他再选择其他几个 R 值在同一页上画出几条相应的曲线. （练习 2）他会选择另一个 g 值在另一页上重复这种画法. 要把全部数据都画出来就需要一本书. 但是，如果他懂得量纲分析，那末他便能把所有的数据都画在表示 t_M^*/RV^{-1} 随 V^2/gR 变化的同一条曲线上.

采用稍为不同的观点，我们就会觉察到，纯粹出于量纲考虑，便可知道到达最高处所需的无量纲时间只能与 V^2/gR 有关，获得这一结论在认识上是一个相当大的前进. 再举另一个简单的例子，人们仅靠量纲分析就能推知单摆完成一个小幅振动的周期与摆锤的质量无关，而事实上它等于一个常数乘以 $\sqrt{L/g}$（参阅练习 3）. 还有一个不太平庸的示例，即 1941 年苏联科学家 Kolmogorov 曾经提出了普适平衡假设，这个问题中，量纲分析的应用（我们只准备提一下）发挥了它的作用. 对于理解流体湍流运动这一仍然是难以捉摸的探索来说，上述比较简单的假设乃是一个里程碑. 参阅 G. K. Batchelor *Homogeneous Turbulence* (New York: Cambridge U. P., 1960)，第 114 页.

几何相似模型的应用

我们已经示明，量纲分析对实验工作者来说是有用的，这是因为，为了确定系统的性能，他（或她）只须对于表征该系统的比较少的参数进行测量就行了. 对于科学家和工程师来说，量纲分析之所以有用还有另一个理由. 借助于量纲分析，人们就能证明，倘若两个系统的基本的无量纲参数具有相同的数值，那末几何相似模型[1]

1）我们要着重指出，这里的讨论中，“模型”这个词并不表示数学模型，而是取其为人们所熟悉的含意，例如指飞机的一个小的复制品.

的性能便与原始系统的完全一样．既然一个理论工作者必须对实验的特点和局限性具备鉴别能力，因而我们将花费一点篇幅来讨论几何相似模型．

一个几何相似模型的形状与原来感兴趣的装置的形状完全相同，但其大小却取得更为方便．这里所作的讨论，其目的是为了强调这样一点：只有当原型和模型不仅大小成正比，而且其他属性也成正比，从而两者的重要的无量纲参数都相等时，才有可能指望模型精确地模拟了原型的性能．

船舶设计乃是模型应用的一个好例子．倘若某一长度为 L 的船只以常速 U 沿直线运动，而我们对于单位时间内船只作的功 P（功率）感到兴趣．之所以要作功，主要是由于形成水面波动或由于克服水的粘性都要消耗能量．因此对于一个流体力学家来说，可望有如下的式子

$$P = f(U, L, g, \rho, \nu), \tag{20}$$

其中 g 是重力加速度，ρ 是水的密度，ν 是水的运动粘性系数．[卷 II 中关于水波和粘性流体运动的那部分题材将要讲到假设 (20) 式所赖以成立的依据，但目前我们不妨不加怀疑地接受 (20) 式．] 运用量纲分析（练习 4），我们能推得

$$\frac{P}{\rho L^2 U^3} = \phi(\mathrm{Fr}, \mathrm{Re}) \tag{21}$$

式中 $\mathrm{Fr} = U/(Lg)^{1/2}$ 称之为**弗劳德数** (Froude number)，$\mathrm{Re} = UL/\nu$ 称为**雷诺数** (Reynolds number)．这两个无量纲参数分别与波阻和粘性阻力有关．这一点并不奇怪，因为只有第一个参数才涉及波所克服的重力，而只有第二个参数才涉及流体的粘性．

假定我们对于所研究的船只构造了一个几何相似模型，它与原船的形状相同，大小只有原船的百分之一．（如果用带撇的量代表模型的参数，这就是说 $L' = 10^{-2}L$．）为了使模拟实验的弗劳德数与原船的相同，我们必须使模型以十分之一 U 的速度运动，此时

$$\mathrm{Fr}' = \frac{U'}{(L'g)^{1/2}} = \frac{10^{-1}U}{(10^{-2}Lg)^{1/2}} = \mathrm{Fr}.$$

为了得到相同的雷诺数，我们必须使用这样一种流体，它的运动粘性系数是水的十分之一．这种流体是不存在的．（例如空气的运动粘性系数约比水的大 15 倍．）因此，似乎不能造出一个模型使原船的无量纲参数都再现出来．

也许，与人们的期望相反，原型船只的雷诺数往往相当大这一事实并不能使情况得到挽回．[如果一只 100 米长的船，以 10 米/秒（约 20 英里小时）的速度运动，那末因为水的 $\nu = 10^{-2}$ 厘米^2/秒，所以雷诺数约为 10^9．] 有理由指望，如果已经知道 $\mathrm{Re} = 10^7$ 和 $\mathrm{Re} = 10^8$ 时 P 的变化情况，那末采用简单的外推就能得到 $\mathrm{Re} = 10^9$ 时 P 的性质．然而流体力学的一个重要事实是"当雷诺数变大或变小时，流动特性并不简单地拉平，而是继续变化，并且对于大多数几何形状来说，当 Re 大到惊人的数值时，将产生大而出乎意料的'突变'．"（Lighthill，1963．）（这种'突变'是由这样的一些现象所引起的，例如，从层流突然转捩到涡旋湍流或者流谱中其他性质的变化．）在估计船只阻力的过程中，人们发现弗劳德数的变化也会引起"突变"．形成这一现象的一个重要原因是阻力对于头波和尾波之间的相互作用的特性是很敏感的．

在有些领域中，并不能通过模拟实验容易地得到结果，船舶设计便是这样的领域中的一个例子．因此，尽管理论流体力学工作者们对这一门学科作出了相当大的贡献[1]，但船舶设计仍然是一门技巧多于科学的学科．

致使模型实验可能产生误差的一个源由是，采用量纲分析所作的推导，其正确性显然要求基本假设是正确的：即所有有意义的量在本质上只依赖于表中所列出的量；如果有一个重要参数被

---

1) 有一篇很好的评述文章，这就是 G. Gadd 的"*Understanding Ship Resistance Mathematically*" *J. Ynst. Math. Appl.* 4.43—57 (1968). 也可参阅 D. H. Peregrine 的"*A Ship's Waves and Its Wake*" J. Fluid Mech. 49, 353—60 (1971).

遗漏了，那就不能指望模拟实验得到准确的结果．例如从一只十分小的船模型发出的波，可能会受到表面张力T的强烈影响，此处相应的无量纲参数可取作**波特数**（Bond number）$B_0 \equiv \rho g L^2/T$．如果模型的波特数并不与原型物体相同，那末倘若在其中的任一实验中表面张力很重要的话，就会造成误差．

在复杂情况下，为了确定所有的重要参数，显然需要从物理上对问题有深刻的理解．对于在缺乏这种理解时所引起的困难，我们可以用化学工程中出现的按比例扩大问题来加以说明．虽则新的化学工厂在几何上与试验性工厂相类似，并且在其他许多方面也与之很类似，但它有时候却不能顺利地进行生产，这是因为试验性工厂未能正确地把某些无量纲参数再现出来，而这些参数想不到却对工厂的生产过程有重大影响．化学工厂典型地涉及了这种流动与化学反应之间的复杂的相互作用，因而，难于设计模型实验这一点是并不奇怪的[1]．

我们再举出另一个当前使人感到极有兴趣的领域，即生理流动问题，它在很多方面与化学工程师所面临的问题相类似，但却更为复杂，因而必须更加谨慎地对待模型实验．尽管如此，这种实验仍然是很有用处的（参阅 8.2 节）．

总结

我们已经示明，把一个问题的基本方程加以无量纲化这是一件习以为常的事情．而且，我们也讨论了当我们的认识不充分，因而还写不出基本方程的情况下，如何利用量纲分析方法．这时，就

1) 尽管做模型实验并不容易，但它们在化学工程中却是不可缺少的．这一点已为 L. H. Baekeland 的名言所概括："犯错误于小尺度，获利益于大尺寸．"用小尺度的实验来预测大规模工厂的性能，关于这个问题有一段有趣的分析，请参阅 R.E.Johnstone 和 M. W. Thring, *Pilot Plants and Scale-up Methods in Chemical Engineering* (New York: McGraw Hill, 1957) 一书，该书从一开头便引用了从 Leonardo da Vinci 笔记本中摘出的语录"Vitruvius 说小尺度模型对确定大尺度模型的作用是没有用的；而我在这里却要证明这个结论是错误的．"

必须具备足够的物理直觉，去把基本方程如若已知时所出现的参数全部列出来．据此便可采用一种直捷了当的程式自动地得到一组表示所研究问题特征的无量纲参数．

在我们的讨论中已用了物理直觉，并列举了特例．当然，关于我们的有些断言和结论还要作进一步的研究．例如，在某种意义上来说，我们应能证明，只要考虑用不同参数各自的幂积所构成的无量纲组合就已足够了．同样，当我们断言某一无量纲参数只可能依赖于其他参数的无量纲组合时，我们应该不必借助于直观．在练习 9—12 中我们概述了所需的一种证明方法．

第八章中有一个非平庸的例子，其中可以找到应用量纲分析的详细情况．至于量纲分析在复杂的偏微分方程、初始条件和边界条件下的应用，请参阅卷 II 第七章中关于水波的论述．5.2 节中对一组不太复杂的偏微分方程组进行了无量纲化．

重要的是记住：无量纲参数要比有量纲参数少，并且常常是少很多(在第八章的例子中是八比三)．不管这些无量纲参数是从实验上得到还是从数值计算中得到的，或者是靠解析方法得到的，都可以花费较小的努力找到问题的结果，并用更简洁和更有意义的形式把它们表示出来．除了最简单的问题以外，所有问题一般都应采用无量纲化．

练　　习

1. (a) 完成(4)式的推导．

(b) 把(16)式上面方括号中的句子所提到的那种矛盾明确展示出来．

2. 利用你的定性感觉作回答，在同一组坐标轴上，取 n 个 R 值画出 g 固定不变时 t_M^* 随 V 变化的曲线．

3. (a) 一个单摆正在作小振动．试证明，按照量纲分析，周期 T 不可能只依赖于摆长 L 和摆锤质量 m．

(b) 试用量纲分析证明，从 T 只依赖于 m、L 和重力加速度 g 的假设，可得如下关系：$T = k(L/g)^{1/2}$，k 是一个常数，

[像在(2.2.18)中那样，求解一个简单的微分方程就可能证明 $k=2\pi$。]

†(c) 假定把单摆拉得更开些，这样其振幅就不再是小量了．用量纲分析能得到什么结论？

4. 证明从(20)式可以推出(21)式．(ν 的量纲为 $\mathscr{L}^2\mathscr{T}^{-1}$．)

5. 在深水中，一只船的螺旋桨所提供的推力 T (T 的量纲为 $T=\mathscr{M}\mathscr{L}\mathscr{T}^{-2}$) 与下列量有关：
螺旋桨的半径 a，每分钟的转数 n，船前进的速度 V，引力常数 g，水的密度 ρ 和运动粘性系数 ν (ν 的量纲为 $\nu=\mathscr{L}^2\mathscr{T}^{-1}$)．
利用课文中的形式方法证明

$$\frac{T}{\rho a^2V^2}=\phi\left(\frac{an}{V},\ \frac{aV}{\nu},\ \frac{ag}{V^2}\right).$$

[参阅 E. G. Keller 和 R. E. Doherty 的 Mathematics of Modern Engineering (Vol I, New York: Dover, 1961)．]

6. 考虑布朗运动中球形质点的扩散常数 D．这里 D 与下列量有关：质点的半径 a，周围气体的温度 T 和粘性系数 μ 以及波尔兹曼常数 $k=1.38\times10^{-6}$ 尔格/度．试用量纲分析证明，D 是 $kT/a\mu$ 与一个常数的乘积．(D 和 μ 的量纲分别为 $\mathscr{L}^2\mathscr{T}^{-1}$ 和 $\mathscr{M}\mathscr{L}^{-1}\mathscr{T}^{-1}$．)

7. 在粘性流体中，一个受重力而下落的小球，可以观察到它下落的速度(在一段时间后)为一常数 v．令 a，ρ_1，ρ_2，μ 和 g 分别表示球的半径和密度，液体的密度和粘性系数以及重力加速度．

(a) 试以质量、长度和时间为基本单位用量纲分析证明 $v=(\mu/\rho_1a)f[\rho_1^2\mu^{-2}a^3g,\ \rho_2/\rho_1]$．这要利用下列事实：粘性应力(力/单位面积)等于 μ 和速度梯度(速度对于长度的导数)的乘积．

(b) 因为这里的运动不是加速的，我们不需要运用加速度正比于重力的关系，而可以把力当作独立的基本单位去处理，试证明 $v=a^2\rho_1g\mu^{-1}\phi(\rho_2/\rho_1)$．

[斯托克斯推导了公式 $\phi(x)=\left(\frac{2}{9}\right)(1-x)$，这是一个非常有用的结果．例如在密立根油滴实验中就要用到这个公式．第 II 卷练习 3.6.6 对斯托克斯的结果进行了推导．]

8. 考虑圆管中不可压缩流体的定常非湍流流动．管两端的压差 Δp 仅与管长 L，管半径 R，以及粘性系数为 μ、密度为 ρ 的液体的最大速度 U 有关．试证明，按照量纲分析，下述方程中的任何一个都能很好地描述上述事实：

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho U^2}=f\left(\frac{\rho UR}{\mu},\ \frac{\rho UL}{\mu}\right),\qquad \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho U^2}=f\left(\frac{\rho UR}{\mu},\ \frac{L}{R}\right).$$

[可以合理地假定，当 L/R 很大时，譬如 $L/R>20$，改变 L/R 对问题的解的影响很小．在这种情况下，关系式 $\Delta p\Big/\frac{1}{2}\rho U^2=f(\rho UR/\mu)$ 应该具有很高的精度．这一点表明物理推理有时会指出如何选择无量纲参数便可使其中的一个无量纲参数被忽略．有关这类推理的更多的例子，请参阅 Kline (1955) 写的那本很有价值的书，这个问题便是从该书中选取的．]

练习 9—12 指导读者学习量纲分析的一些主要结果的证明方法．这种方法是解析的，与 Bridgman (1933) 的相同，至于代数方法，请参阅 Birkhoff (1960) 的书．

9. 给定一个象米那样的长度基本单位，我们就知道如何去度量两个记号之间的长度．长度满足下列**单位换算法则**：如果选定一个新单位，它是旧单位的 $1/x$ 倍，那末用新单位量得的数就是旧单位量得的数的 x 倍．(例如，厘米是米的 $\frac{1}{100}$ 倍，那末把用米测量改成用厘米测量，其结果为 100 乘以用米测量的数．)满足单位换算法则的量，例如长度、质量和时间，都称为**基本量**．

(a) **相对大小的绝对意义** (ASRM)：在两次测量中，两个基本

量的比例与所选择的基本测量单位无关.（例如，氢原子的质量 M_H 等于 1.67×10^{-24} 克，电子的质量 M_e 等于 9.11×10^{-28} 克，$M_H/M_e=1800$，或者 $M_H=3.69\times10^{-27}$ 磅，$M_e=2.01\times10^{-30}$磅，因而 $M_H/M_e=1800$.）试把相对大小具有绝对意义的这一要求推导出来.

(b) 试举出 ASRM 的另一个例子.

10. 以给定的方式把基本量的测量联合起来，我们就可测得**从属量**.（例如，速度这一从属量的测量值相当于长度的测量值除以时间的测量值.）

(a) 令 $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 和 $(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ 表示基本量的两组测量结果(例如 p_1 和 q_1 是汽车 p 和 q 在时间 p_2 和 q_2 中所走的路程.）令 $f(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 和 $f(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ 表示某个从属量相应的测量结果.（例如对于平均车速 $f(p_1, p_2)=p_1/p_2$.）试说明，对于任何 $p_i, q_i, i=1, 2, \cdots, n$，我们为什么应该假设

$$f(x_1p_1, \cdots, x_np_n)=\frac{f(p_1, \cdots, p_n)}{f(q_1, \cdots, q_n)}f(x_1q_1, \cdots, x_nq_n). \qquad (22)$$

（注意基本量和从属量之间的区分多少是有点任意的.）

†(b) 把(22)式对 x_1(保持 $x_2, x_3, \cdots x_n$ 不变) 进行微商，然后令 $x_i=1, i=1, \cdots n$，试证明

$$f(p_1, p_2, \cdots p_n)=g(p_2, \cdots, p_n)p_1^{a_1}$$

式中 a_1 是常数，g 是任意函数. 试推出

$$f(p_1, p_2, \cdots, p_n)=cp_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_n^{a_n},$$

式中 c 是常数. 我们通常取 $c=1$. 因此从属量的测量结果可表示为基本量测量结果的幂积. 这时，我们就说从属量具有量纲 $p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_n^{a_n}$.（我们用同一符号来表示基本量及其测量结果.）[例如，速度具有量纲(长度)(时间)$^{-1}$.] 如果从属量的所有量纲指数 a_i 都为零，那末它就是**无量纲的**.

(c) 试证明：如果基本量的基本测量单位缩小了 $y_1, \cdots, y_n$

倍，那末一个从属量的新旧测量值 S' 和 S 之间有如下关系

$$S' = y_1^{a_1}\cdots y_n^{a_n}S.$$

11. 某容器在时间 $t=0$ 时打开，令 M 表示其中漏出的水的净质量，假设如果小心地取克为单位来测量 M，取分为单位测量时间 t，那末其结果适合下列规律

$$M = 5 - 5\exp(-t) \tag{23}$$

(a) 如果用千克作为质量的尺度，秒作为时间的尺度，那末(23)式如何改变?

象(23)式那样，如果在某给定单位系统下，某个方程真实地描述了一种情况，那末就说(在该单位系统下)这个方程是**正确的**.

(b) 证明无论用哪种质量和长度尺度，测量结果将为下列公式所描述:

$$C_1M = 5 - 5\exp(-C_2t), \tag{24}$$

式中 C_1 和 C_2 具有的量纲分别为(质量)$^{-1}$和(时间)$^{-1}$.

方程(24)称为**完全的**，这是因为，无论取何种基本单位，它都是成立的.(只要选择正确的量纲常数 c_1 和 c_2.)(23)式虽然不完全，但它却对事实作了正确的描述. 如同由(23)式过渡到(24)式那样，总可以在每个观察量前引进一个量纲常数，从而使任何正确的方程都成为完全的.

12. 本问题概述了**白金汉** (Buckingham) **π 定理**的证明. π 定理指出(粗略地说)，任何完全方程指的是其中所有的变量都以无量纲组合出现的方程.

(a) 令 $R_1,\cdots,R_m$ 为 m 个(基本的或从属的)量的测量值. 假定有且仅有一个函数关系把这些测量值关联在一起，即

$$\phi(R_1, R_2,\cdots, R_m) = 0, \tag{25}$$

并且假定(25)是完全的. 再假定有 n 个基本单位，并把每个单位缩小 x_i 倍，$i=1,2,\cdots,n$. 试证明必然存在着如下的关系式

$$\phi(x_1^{a_{11}}x_2^{a_{12}}\cdots x_n^{a_{1n}}R_1,\cdots,x_1^{a_{m1}}x_2^{a_{m2}}\cdots x_n^{a_{mn}}R_m)=0 \qquad (26)$$

(当证明逐渐展开时，先做一个特例，以便示明练习所要求的普遍结果，这样做或许是有帮助的.)

(b) 从(26)式推导

$$\sum_{k=1}^{m} a_{k1}R_k\phi_k(R_1,\cdots,R_m)=0,$$

式中ϕ的下标i表示对第i个变量的偏导数。

(c) 假设 $a_{k1}\neq 0$，引进新的自变量T_k

$$T_k=R_k^{1/a_{k1}} \qquad k=1,\cdots,m, \qquad (27)$$

因此

$$\Phi(T_1,\cdots,T_m)=0,$$

式中

$$\Phi(T_1,\cdots,T_m)=\phi(T_1^{a_{11}},\cdots,T_m^{a_{m1}}),$$

试证明

$$\sum_{k=1}^{m} T_k\Phi_k=0,$$

式中Φ的下标k表示对于第k个自变量的导数. 同时证明对于第一个基本量来说，所有的量T_k具有的量纲指数为1.

(d) 引进另一组新的自变量U_k:

$$U_k=\frac{T_k}{T_m},\ k=1,\cdots,m-1,\quad U_m=T_m,$$

因而

$$\chi(U_1,\cdots,U_m)=0, \qquad (28)$$

式中

$$\chi(U_1,\cdots,U_m)=\Phi(U_1U_m,U_2U_m,\cdots,U_m).$$

试证明 $\partial\chi/\partial U_m=0$. 同时证明，对于第一个基本量来说，$U_k$是无量纲的. 因此(25)式暗含着(28)式，而(28)式是一个包含着$m-1$个量并且第一个基本量的量纲指数为零的关系式.

(e) 试证明，即使某些或所有的量 a_{kl} 都为零，上述结论也仍然成立.

(f) 最后导出关系式

$$F(\pi_1, \pi_2, \cdots) = 0,$$

式中 π_k 是无量纲的，注意所涉及的变量的改变，同时证明 π_k 是 $R_1, R_2, \cdots, R_m$ 的幂积. 证明这样的无量纲乘积"通常"有 $m-n$ 个.

评注：假定由 $F=0$ 可解出 π_1，并且 π_1 的表达式实际上包含有 R_1. 如果我们要求解出 R_1，那末所得表达式中的每一项必然具有相同的量纲. 这个结果称为**量纲均匀性原则**.

13. 某些烹调书说，烤每磅肉应该用 x 分钟；另外一些书则说，烤小块肉每磅要用 x_1 分钟，烤大块的肉则每磅要用 x_2 分钟，试讨论一下这个问题.

[参阅 M. S. Klamkin 的文章 "On Cooking a Roast", *SIAM, Review* 3, 167—169 (1961).]

6.3 尺度化

在很多数学问题中，包含有小参数或大参数. 不过，我们仅需研究小参数，因为，如果 λ 是一个大参数，那末我们可以引进一个小参数 $\varepsilon = 1/\lambda$.

若一个参数是小的，要利用这一优点并不象看起来那末简单. 在 6.1 节中，我们已经看到了有关的一些例子；这些例子与劣质调节和不敏感性有关系.

为了弄明白人们必须与之作斗争的另一种困难，我们来考虑单个自变量和单个小参数 ε 的函数. 大抵说来，固定自变量而让 ε 趋向于零就可得到该函数的一级近似. 但是其结果却与怎样选择自变量有关. 作为示例，我们考虑

$$u(x, \varepsilon) \equiv x + e^{-x/\varepsilon}, \text{ 其中 } 0 < x \leqslant 1, \quad \varepsilon > 0 \qquad (1a)$$

这里

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(x,\varepsilon) = x. \tag{1b}$$

如果我们换成另一个新的自变量 $\xi = x/\varepsilon$，便有

$$v(\xi,\varepsilon) = u(\varepsilon\xi,\varepsilon) = \varepsilon\xi + e^{-\xi},\ \lim_{\varepsilon\to 0} v(\xi,\varepsilon) = e^{-\xi}. \tag{2}$$

另一方面，如果我们引进 $\eta = x/\varepsilon^2$，就得到

$$w(\eta,\varepsilon) = u(\varepsilon^2\eta,\varepsilon) = \varepsilon^2\eta + e^{-\varepsilon\eta},\ \lim_{\varepsilon\to 0} w(\eta,\varepsilon) = 1. \tag{3}$$

这三个极限

$$x,\quad \exp(-\xi) = \exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) \text{和 } 1 \tag{4a,b,c}$$

中究竟哪一个给出 u 的正确的一级近似(如果存在这种近似的话)呢？对这个问题的回答并不太困难，但还是让我们慢慢来作出回答。

6.2 节揭示了一类重要情况，其中存在着自变量的选择问题。这起源于内禀参考量选择的任意性；而这些内禀参考量是在定义无量纲参数时当作分母用的。这一情况可以用抛射问题来加以说明(方程 2.1)：

$$\frac{d^2x^*}{d(t^*)^2} = -\frac{gR^2}{(x^*+R)^2},\quad x^*(0)=0,$$

$$\frac{dx^*}{dt^*}(0) = V \tag{5}$$

采用参考长度 R 和参考时间 RV^{-1} 引进无量纲变量

$$y = \frac{x^*}{R},\quad \tau = \frac{t^*}{RV^{-1}}, \tag{6}$$

则得到(2.4)式：

$$\varepsilon\frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{1}{(y+1)^2},\quad y(0)=0,\quad \frac{dy}{d\tau}(0) = 1. \tag{7}$$

另一种选法

$$z = \frac{x^*}{R},\quad \tau_1 = \frac{t^*}{\sqrt{Rg^{-1}}}, \tag{8}$$

则得到(2.10)式

$$\frac{d^2z}{d\tau_1^2} = -\frac{1}{(z+1)^2}, \quad z(0)=0, \quad \frac{dz}{d\tau_1}(0) = \varepsilon^{1/2}, \qquad (9)$$

式中

$$\varepsilon = \frac{V^2}{gR}. \qquad (10)$$

如果已知 ε 与 1 相比非常小，那末一个天真的人或许只把前面带有 ε 的项删掉．但这种做法不可能是正确的，因为，从(7)式我们会得到

$$-(y+1)^{-2} = 0, \quad y(0)=0, \quad \frac{dy}{d\tau} = 0, \qquad (11)$$

而从(9)式我们会得到

$$\frac{d^2z}{d\tau_1^2} = -\frac{1}{(z+1)^2}, \quad z(0)=0, \quad \frac{dz}{d\tau_1}(0) = \varepsilon^{1/2} \qquad (12)$$

这两个"近似"问题是不同的，因而至少有一个是不合理的．事实上，两者都是不合理的．问题(11)没有解；而问题(12)则有一个负解（练习 1），因而只能应用于物体在地面之下的情况．由此显然可以看出：**不能仅仅因为一个项前面有一个小参数就把它忽略掉**．

我们已经提出了足够多的疑问，现在已经到了清除错误观念，阐明那些蓬勃发展着的技巧的时候了．

在上节中，我们示明了如何选择无量纲参数，并指出一般可用几种方式去做到这一点．在本节中，我们指出应该这样来选择无量纲参数，以致如果一个项前面有一个小的无量纲参数，那末对于一级近似来说，这个项应该是可以忽略的[1]．

选择这组特殊的无量纲参数的过程称之为"尺度化"．我们将说明，尺度化与通常的意思是极为不同的，但是清楚地认识到这一过程的目标，而且要认识到即使目标有可能达到，但却仍然有危

1) 知道一个有量纲参数是小量的用途并不大，因为可以通过选择合适的单位使这个参数取任意值．

险，这些无论如何是有帮助的。

尺度化的定义

既然可以用多种方式来选择无量纲参数，那末人们就不能指望小的无量纲参数的出现就必然表示有比较小的项存在．**尺度化**相当于这样一种无量纲化，它使得每一项的相对大小都由该项前的一个无量纲因子来标志．更正式地讲，*在尺度化过程中，人们试图选择内禀参考量，使得量纲方程中的每一项都变成一个有量纲的常数因子(它能很好地估算出该项的量级)和量级为 1 的无量纲因子的乘积*．（目前我们将在"近似大小"的意义上来使用"量级"这个术语．不久以后，我们再更精确地去规定这个术语的意义．）这一过程所选择的内禀参考量称之为**尺度**．一般来说，对于不同的参数范围，尺度也不同．同样，我们将看到，当参数处在一给定范围中时，对于不同范围的自变量也有必要选择不同的尺度．

抛射问题的尺度化

为了示明尺度化方法，让我们在抛射体离地面的距离总比地球半径 R 小的情况下来考察抛射问题 (5)． 只有在初速 V "足够小"时才会出现这种有限的运动．按照量纲分析，我们要求 V 必须比 $(Rg)^{1/2}$ 的倍数小．而 $(Rg)^{1/2}$ 是除了 V 以外量纲为长度/时间的唯一的参数组合．

当 $x^* \ll R$ 时，加速度与地球表面的重力加速度 g 的量级显然相同．现在如果一个抛射体以初速 V 发射，其后在它上面作用着一个大小为 g 的均匀减速度，那末在 V/g 的这一瞬间，抛射体将在最高处停留下来．把初速和终速加以平均，我们便可估算出 V/g 这段时间内该物体运动了 $\frac{1}{2}V(V/g)=\frac{1}{2}V^2g$ 这样一段距离．在表达式中保留因子 $\frac{1}{2}$ 意味着所得的结果比我们正当要求的更精确些——记住，我们用初速和终速的平均值代替了抛射体不断改变的速度，而且我们也忽略了重力随距离的改变．因而，我

们取 V^2/g 来估算 x^* 的量级.

评注：现在我们已经明白，最初关于选择参数使得 x^* 总比 R 小的假设，相当于要求 V^2/g 比 R 小. 因为我们已经深入地对这个问题作了思考，所以这种说法比起"V 必须比 $(Rg)^{1/2}$ 的倍数小"的要求更为精确，这一点是并不奇怪的，而后面这个要求便是根据量纲分析所能推导出来的一切.

我们已完成了尺度化方法中最困难的部分，即在所考虑的特殊情况下，对各种项的大小作估算. 现在我们来指出如何利用上述估算的形式上的好处. 上述估算表明，(i) 位移 x^* 的量级为 V^2/g；(ii) 加速度 d^2x^*/dt^{*2} 的量级为 g.

利用 (i)，我们可以断言无量纲位移 x 应该定义为

$$x = \frac{x^*}{(V^2g^{-1})}. \tag{13}$$

按照变量的这一变换，x^* 将为下式所代替

$$x^* = \frac{V^2}{g}x \tag{14}$$

(14) 式右端的第一个因子 V^2/g 正确而明白地指出了 x^* 的量级. 因为 x^* 的量级为 V^2/g，(13)式表明无量纲因子 x 必须具有 1 的量级，而这正是尺度化方法所要求的.

由于估算 (ii)，我们必须这样来选择时间尺度 T，以使得如果引进由

$$t = \frac{t^*}{T} \tag{15}$$

所定义的无量纲时间 t，那末项 d^2x^*/dt^{*2} 便变为无量纲项和常数 g 的乘积. 但由(13)式和(15)式得到

$$\frac{d^2x^*}{d(t^*)^2} = \frac{V^2}{gT^2}\frac{d^2x}{dt^2},$$

$V^2/(gT^2) = g$ 这一要求给出了作为时间尺度定义所需的方程 $T = V/g$.

采用适当地无量纲化了的无量纲变量

$$x = \frac{x^*}{V^2 g^{-1}} \quad 和 \quad t = \frac{t^*}{V g^{-1}}. \tag{16}$$

那末基本方程(15)便变为

$$g\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{R^2 g}{(xV^2g^{-1} + R)^2}, \quad x(0) = 0,$$
$$\frac{dx}{dt}(0) = 1. \tag{17a, b, c}$$

为了简化起见，我们用 g 除以 (17a) 的两端，并用 R^2 除右端的分子和分母。这就得到

$$\ddot{x} = -(1 + \varepsilon x)^{-2}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1. \tag{18}$$

(注意，由于这一相除，现在明显地呈现出来的正是相对量级。特别是因子 ε 给出了 x^* 除以 R 的量级。)

因为我们已用尺度化方法把抛射问题 (5) 按照要求的方式作了无量纲化，现在可以深信，当 ε 比 1 小时，项 εx 就比 1 小。如果把 $x(t)$ 的最低阶近似表示为 $x^{(0)}(t)$，那末我们从(18)式得到

$$\ddot{x}^{(0)} = -1, \quad x^{(0)}(0) = 0, \quad \dot{x}^{(0)}(0) = 1. \tag{19}$$

因而

$$x^{(0)} = t - \frac{1}{2}t^2 \quad 和 \quad 0 \leqslant x^{(0)} \leqslant \frac{1}{2}, \text{ 对于 } 0 \leqslant t \leqslant 2.$$

特别是，(19)式可以用有量纲形式表示为

$$\frac{d^2x^*}{d(t^*)^2} = -g, \quad x^*(0) = 0, \quad \frac{dx^*}{dt^*}(0) = V.$$

如所周知，(19) 式给出了抛射问题零级近似的解。但是没有经验的人几乎都不可能毫不踌躇地得到(18) 式，这为确定较高阶近似问题的形式作了准备 (参阅 7.2 节)。

当 $\varepsilon \ll 1$ 时，以前得到的近似问题(11)和(12)之所以不恰当，现在可以归之于下列原因：(6)式和(8)式中所选择的无量纲变量不符合尺度化方法的原则。这些不正确的“近似”问题并不具有切合实际的解，这一点既令人鼓舞又具有代表性，但不幸的是这并非不可避免的(回忆 6.1 节例 3 和例 4)。

我们必须强调尺度的选择与考虑的参数所取的范围有关. 关于这一点,可以举一个例子, 让我们作如下的考察: 当 $\varepsilon \ll 1$ 时, 我们已把抛射问题作了尺度化,但是如果 ε^{-1} 是一个小参数, 就需要作新的尺度化. 下面我们提一下在新情况下问题的一个侧面. 当 ε^{-1} 很小时,初速就很大了, 以致质点从地面抛出后很快就走过了好几个地球半径, 这样把 $d^2x^*/d(t^*)^2$ 的大小估算为 g 就变得错误了.

现在还可以说明另一个观点. 对一个问题的充分理解要求人们记住无量纲表述中每一个无量纲参数的物理解释. 在现在的情况下,这样的参数只有 $\varepsilon = V^2/gR$ 一个. 像在(18)式中提到的那样, ε 可以解释为两个长度之比. 地球半径 R 在分母上, V^2/g 在分子上, 它是以不大的初速 V 从地面抛出的抛射体所能到达的最大高度的一种估算值.

数量级

对数量级这一术语作出一个严格的定义, 这是很有帮助的. 如果一个数满足

$$3 \cdot 10^{n-1} < A \leqslant 3 \cdot 10^n$$

n 是整数, 那末我们就说数 A 的**数量级**为 10^n. 因为 $\log_{10}3 \approx \frac{1}{2}$, 一个数量级为 10^n 的数 A, 其实际上的等价表征为

$$n - \frac{1}{2} < \log_{10}|A| \leqslant n + \frac{1}{2}.$$ [1]

在某个区间上定义的**一个函数 f 的量级**指的是一个数 M 的量级, 这个数是 $|f|$ 在给定区间上的最大值(或许是上确界). 注意下列两者的区别,即在某个区间上定义的函数的阶, 记作符号○(附录3.1), 以及上面定义的一个函数在数值上的数量级之间的区别.

---

1) 原文为 $n - 2 \leqslant \log_{10}|A| \leqslant n + \frac{1}{2}$. ——译者注

已知函数的尺度化

现在，已知函数的尺度化就成了一件直截了当的事情了．考虑几个例子就会使我们得到一些直观的知识．我们首先考虑一种现象，它遵循常微分方程

$$F\left(u^*, \frac{du^*}{dx^*}\right)=0. \tag{20}$$

假定自变量 x^* 限制在区间 I^*（它可以是无限的）之内．虽然我们的讨论对于任何有量纲的应变量和自变量 u^* 和 x^* 都是适用的，但为了方便起见，我们把 u^* 看作是速度分量，而把 x^* 设想为空间变量．

令 L 为长度尺度，U 为速度尺度，引进无量纲变量

$$x=\frac{x^*}{L}, \quad u=\frac{u^*}{U}, \tag{21}$$

我们便有

$$u^*(x^*)=Uu\left(\frac{x^*}{L}\right), \quad \frac{du^*}{dx^*}=\frac{U}{L}\frac{du(x)}{dx}\bigg|_{x=x^*/L}. \tag{22}$$

如果 U 和 L 确实都是合适的尺度，那末出现在方程(22)右端的 U 和 L 的组合必然是对左端最大绝对值的合理的估计．现在通常的尺度可以有用地看作是对**精确尺度**的估计量，而在这种尺度下，U 和 U/L 实际上等于这些量的最大绝对值．对于精确的尺度来说，我们有

$$U=\max_{x^*在I内}|u^*(x^*)| \tag{23}$$

和

$$\frac{U}{L}=\max_{x^*在I内}\left|\frac{du^*}{dx^*}\right|. \tag{24}$$

利用(23)，从(24)可得到

$$L\equiv\frac{|u^*|_{\max}}{|du^*/dx^*|_{\max}}. \tag{25}$$

方程(23)和(25)便是问题(20)所决定的精确速度尺度和长度尺度

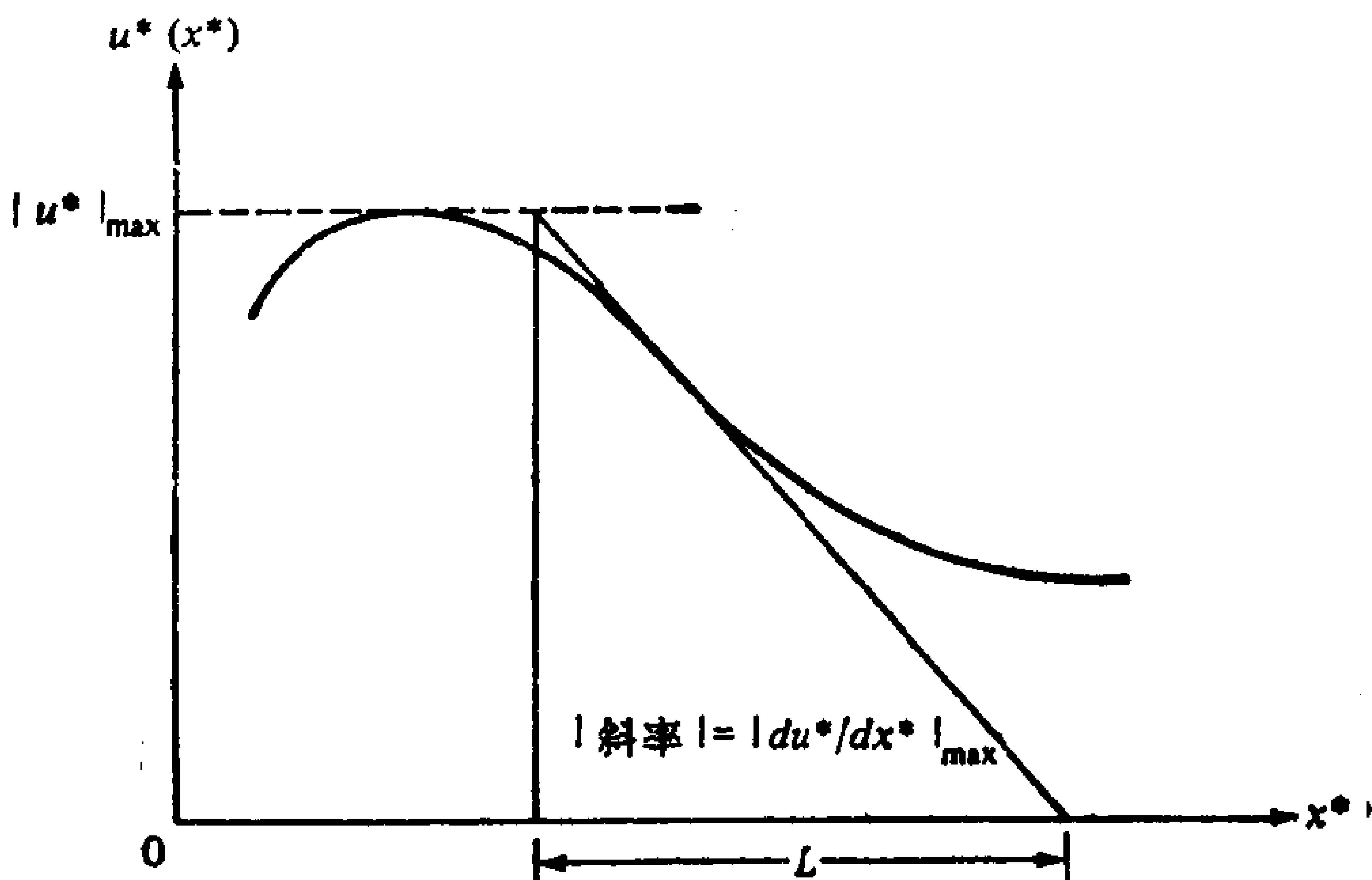


图 6.1　根据(25)式得到的长度尺度

的显表达式．从图 6.1 我们注意到 L 可以看作是一个直角三角形的底边，该三角形的高为 $|u^*|_{\max}$，它的斜边的斜率为 $|du^*/dx^*|_{\max}$．此外，图 6.1 为下述定性论述提供了支持，即长度尺度是函数大小在其中发生显著变化的最短距离的一个估算量．

例 1　当

$$u^*(x^*) = A\sin\lambda x^*,\quad -\infty < x^* < \infty$$

时，求速度和长度的尺度 U 和 L．式中 A 和 λ 都是正常数．

解　显然，$U = A$，因为

$$\left|\frac{du^*}{dx^*}\right|_{\max} = |A\lambda\cos\lambda x^*|_{\max} = A\lambda.$$

所以，由(25)式得到 $L = \lambda^{-1}$．

例 2　当

$$u^*(x^*) = A\left[x^* + \exp\left(-\frac{x^*}{\varepsilon}\right)\right],\quad 0 \leqslant x^* \leqslant 1,$$

时，求 U 和 L，式中 A 和 ε 都是正常数，$\varepsilon \ll 1$．

解

$$U = |u^*|_{\max} \approx A,$$

$$\left|\frac{du^*}{dx^*}\right| = \left|A + A\varepsilon^{-1}\exp\left(-\frac{x^*}{\varepsilon}\right)\right|_{\max} \approx A\varepsilon^{-1},$$

因而 $L = \varepsilon$. 参阅图 6.2.

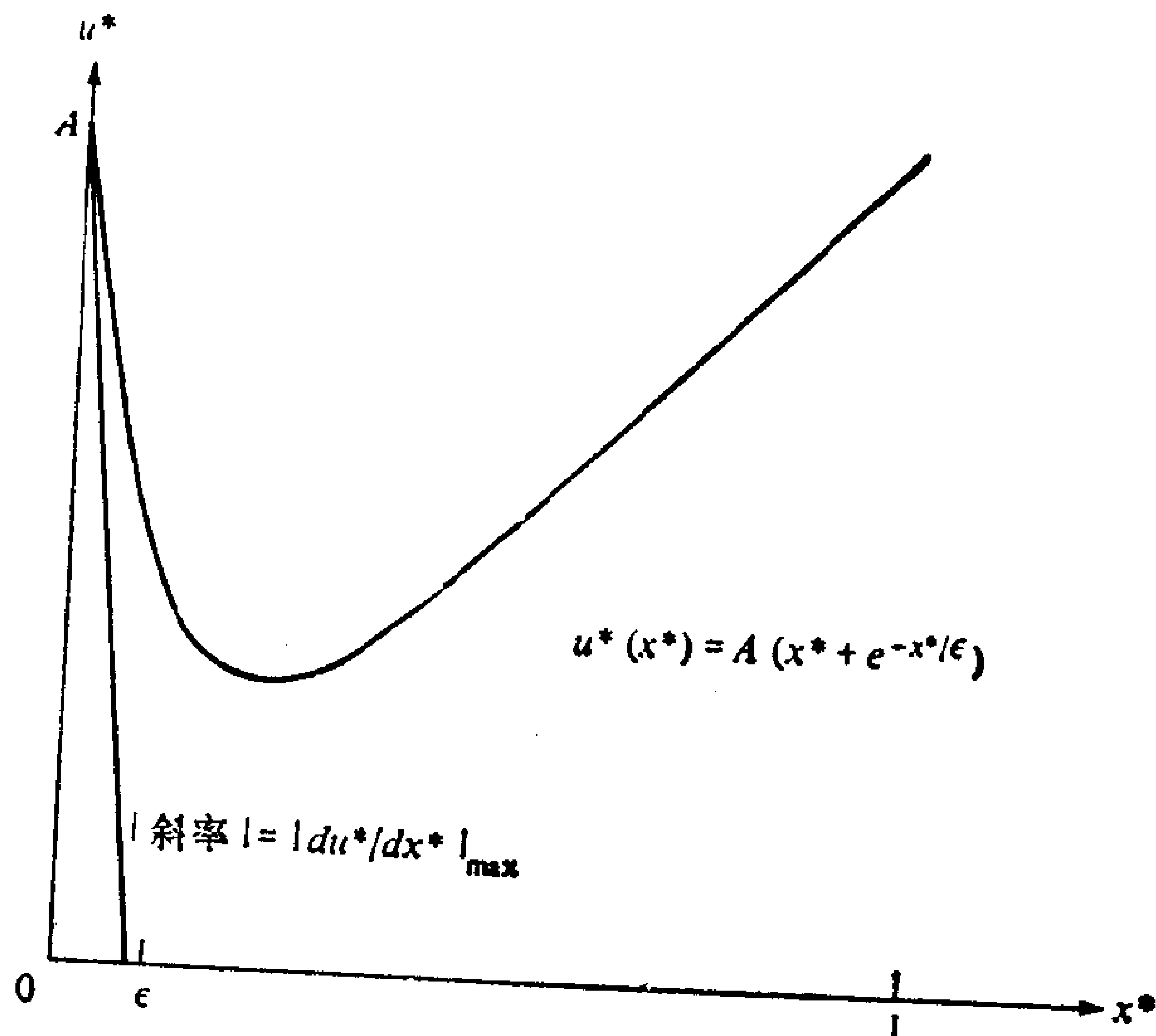


图 6.2 函数 u^* 的长度尺度近似地为 ε, 这里 $u^*(x^*) = A[x^* + \exp(-x^*/\varepsilon)]$; A 和 ε 都是正的常数, $0 \leqslant x^* \leqslant 1$, 而 $\varepsilon \ll 1$.

假定问题所遵循的方程为

$$F\left(u^*, \frac{du^*}{dx^*}, \cdots, \frac{d^N u^*}{dx^{*N}}\right) = 0, \tag{26}$$

这是(20)式的推广[1]. 那末方程 (23) 仍是对速度尺度 U 的一种合适的定义. 但当选择长度尺度 L 时,我们必须考虑下列各阶导数,

$$\frac{d^i u^*(x^*)}{dx^{*i}} = \frac{U}{L^i}\left[\frac{d^i u(x)}{dx^i}\right]_{x=x^*/L}, \quad i = 1, 2, \cdots, N.$$

我们必须这样来选择 L, 使得

$$\frac{d^i U^*}{dx^{*i}} \leqslant \frac{U}{L^i}, \quad i = 1, 2, \cdots, N. \tag{27}$$

为了使得我们的估算尽可能准确一点,我们必须选择 L 的最大值,使(27)式得到满足. 由此可知, L 是使下式成立的最大的常数:

---

1) 也可以把问题推广为其中多于一个自变量或多于一个应变量的情况. 请参阅练习 3 和 4.

$$L \leqslant \left[\frac{U}{|d^2U^*/dx^{*i}|} \right]^{1/i},$$

其中 $i = 1, 2, \cdots, N$; 或者

$$L = \frac{U}{|du^*/dx^*|_{\max}}, \left[\frac{U}{|d^2u^*/dx^{*2}|_{\max}} \right]^{1/2}, \cdots,$$

$$\left[\frac{U}{|d^Nu^*/dx^*|_{\max}} \right]^{1/N} \text{中最小的一个.}$$

例 3 如果 (26) 式是基本方程，求例 1 中正弦曲线的长度尺度 L.

解

$$\left[\frac{U}{|d^iu^*/dx^{*i}|_{\max}} \right]^{1/i} = \left[\frac{A}{A\lambda^i} \right]^{1/i} = \lambda^{-1}.$$

所以不论(26)式包含的导数有多少，总有 $L = \lambda^{-1}$ (参阅图 6.3).

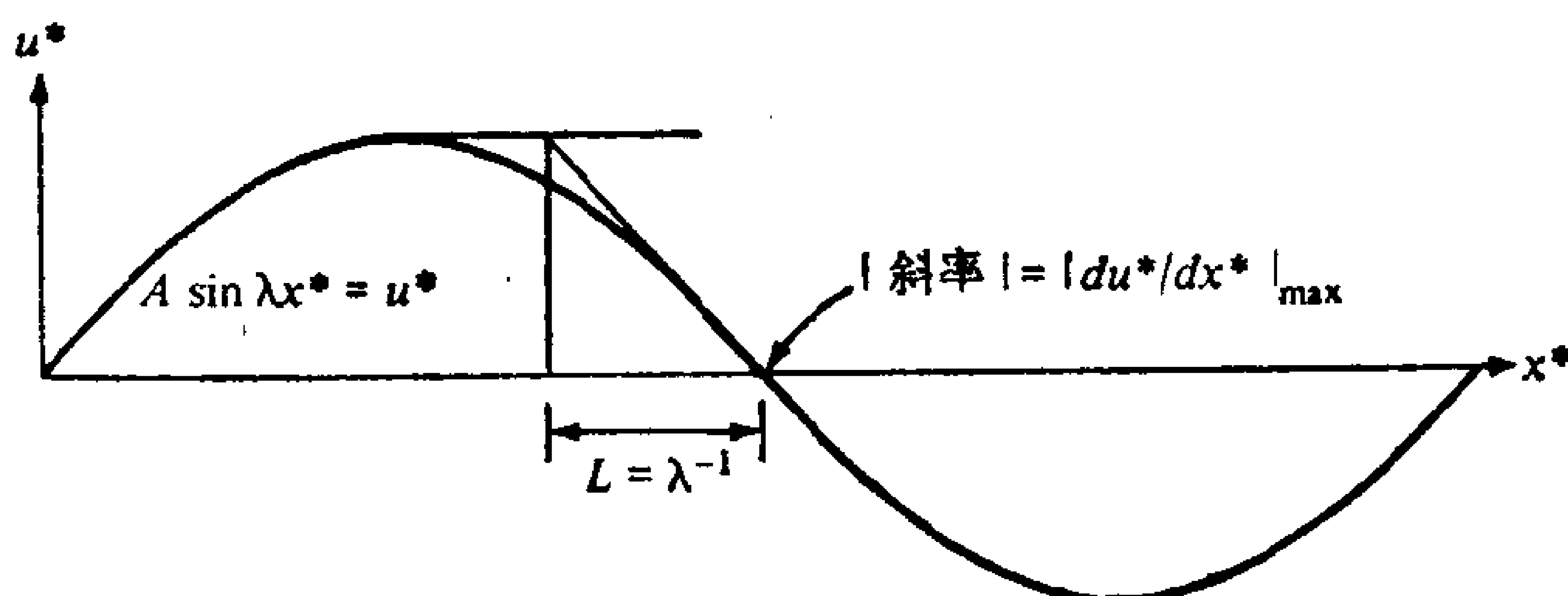


图 6.3 正弦曲线的长度尺度 λ^{-1} 大约为周期 $2\pi\lambda^{-1}$ 的六分之一.

注意，在基本方程(26): $F(u^*, du^*/dx) = 0$ 中，并不明显出现 x^*. 这是**空间上均匀**的一大类问题的特征. 对于这种问题，"此处与别处是完全一样的". 空间均匀性在形式上表现为: 基本方程中不明显出现自变量 x^*，当进行坐标平移 $x^* \to x^* +$ 常数时，它保持自己的形式不变. 正如人们所预期的那样，对于不以空间均匀性为特征的问题，其长度尺度必须考虑到非均匀性的变化. 例如，即使正确地估算出了 u^* 和 du^*/dx^* 的大小，若不作进一步的思索，我们仍不能肯定象 $u^*\exp(x^*)$ 和 $(1/x^*)(du^*/dx^*)$ 这样的项的大小.

例 3 中考虑的函数所具有的长度尺度与必须考虑到的导数的

个数N无关．下面是函数的长度尺度与N无关的一个例子．

例 4 如果(26)式是基本方程，并且

$$u^*(x^*) = M + A\sin\lambda x^*, \quad -\infty < x^* < \infty,$$

求U和L，式中M，A和λ都是正的常数．

解

$$U = M + A, \left[\frac{U}{d^i u^*/dx^{*i}|_{\max}}\right]^{1/i} = \frac{1}{\lambda}\left[1 + \frac{M}{A}\right]^i,$$

$$\text{因而 } L = \frac{1}{\lambda}\left[1 + \frac{M}{A}\right]^{1/N}.$$

倘若M/A不比1大，那末L对N的依赖是很弱的．M大时，长度尺度也大．

正统性 (ORTHODOXY)

经过尺度化过程之后，我们能把一个问题化成这样的形式，它明显地揭示出存在着(如果有的话)一些数量级比较小的项．即使这样做了以后，还有两件值得注意的事情．第一件事情是忽略比较小的项可能会产生大的影响．这在6.1节中已作了讨论．因而下面我们将假定比较小的项是可以忽略的．

第二件值得注意的事情起源于用某一项的数量级去估算该项的最大值．如果一个方程中各项的数值偏离它们的最大值太远，那末就大部分定义域而言，各项的数量级估计可能使我们对它们的相对大小产生错误的印象．如果在所研究的区间中，除了或许存在的可忽略的部分以外，方程中某项的绝对值与它的极大值并无很大的差别，那末我们就说这一项在给定区间内满足**正统性要求**．假定在某个方程中，项T_1的数量级比起另一项T_2的数量级大得多．如果第一项不满足正统性要求，那末虽然该项的最大绝对值比第二项的最大绝对值要大得多，但是在所考虑的大部分区间上，就绝对值而言，第一项可以比第二项小(参阅图6.4)．

非正统性和由此引起的困难并不比人们所设想的普遍．例如，当必须用同一长度尺度来表示几个应变量的改变时，非正统性

看来几乎不可避免；但情况并非如此。其理由似乎在于必须把应变量组合得使之满足某些微分方程．很难想象这些变量的行为会有很大的不同．大概这就是为什么在实践中常常发生下述情况的理由，这就是着重研究几个变量中的一个而选择出来的长度尺度对这几个变量常常也都是很适用的．

在研究小振幅水波时出现"无害的"非正统函数（参阅第 II 卷 8.1 节），按照线性理论，速度分量和(动)压力以及它们的导数都是非正统函数，这是因为它们都随深度的增加而迅速衰减的缘故．但是它们却都以完全相同的指数速率衰减，因而只要研究一下水面附近的情况便可正确地估算出各项的相对数量级来．凡是所研究的问题遵循的线性方程组具有常系数，那末它就具有这种性质．

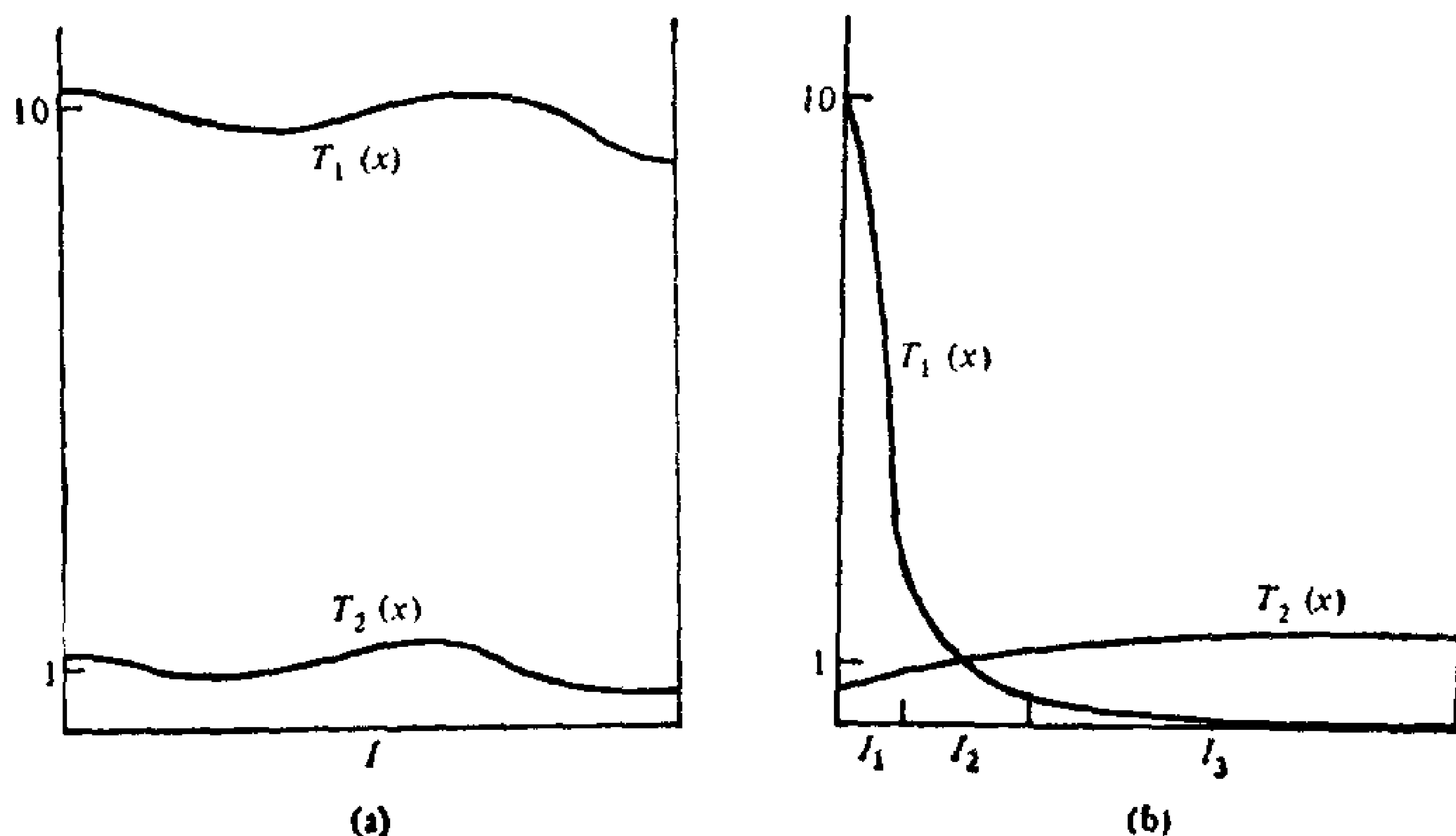


图 6.4　在区间 I 上定义的两项 T_1 和 T_2．它们的数量级分别为 10 和 1．(a) T_1 满足正统性要求，在整个 I 上，T_2 都比 T_1 小；(b) T_1 不满足正统性要求，只有在子区间 I_1 内 T_2 才看起来可以忽略，两个函数在中间的子区间内，其大小大抵相同．

容许有一定程度非正规性的另一种常见情形，其中的振荡项具有相对最大振幅．因而人们会说，在一级近似范围内，如果一个方程中已知其他项具有像大振幅正弦波那样的性质的话，量级为 1 的项就可加以忽略．尽管正弦项在靠近其零点处比较小，情况却还是这样．因为对一个狭小的区域来说，某函数必须从该区间

一端的一些特定值光滑地变化到另一端的邻近的一些特定值，这样，这个函数就几乎没有可能出现有意义的特性，因此，这些具有非正统性的小区间似乎是可以忽略的．（与练习 6 作比较．）

当应变量与下列函数

$$u^*(x^*) = A\left[x^* + \exp\left(-\frac{x^*}{\varepsilon}\right)\right], \quad 0 < x^* \leqslant 1,$$

$$0 < \varepsilon \ll 1, \tag{28}$$

具有类似的性质时，正统性就受到了严重的破坏．6.2 图中画出了它的示意图．假定我们要去估计 du^*/dx^*，因为 ε 很小，(28)式中指数部分的迅速变化表明，在包含 $x=0$ 附近的一些点的区间内对 $|du^*/dx^*|$ 的估算比起不包括这些点的区间来说，出现了严重的高估．例如，当 $3\varepsilon \leqslant x^* \leqslant 1$ 时，

$$\left|\frac{du^*}{dx^*}\right|_{\max} \approx A\varepsilon^{-1}e^{-3}.$$

因此，$L = e^3\varepsilon$，这是一个 10 倍于 ε 的长度尺度．这个长度尺度适用于 $0 \leqslant x^* \leqslant 1$．为了满足正统性要求，我们必须把 $[0, 1]$ 分裂成两部分，每部分选择不同的长度尺度．在离 $x^* = 0$ 几倍于 ε 以外的外区间中，我们有

$$|u|_{\max} \approx A \quad 和 \quad \left|\frac{du^*}{dx^*}\right|_{\max} \approx A, \quad 因而\ U = A, L = \varepsilon.$$

引进这两个尺度，我们得到

$$u = \frac{u^*}{A}, \quad x = x^*,$$

$$因而\ u(x, \varepsilon) = A^{-1}u^*(x, \varepsilon) = x + e^{-x/\varepsilon}.$$

在离 $x^* = 0$ 几倍于 ε 之内的内区间中，我们得到

$$|u^*|_{\max} \approx A \quad 和 \quad \left|\frac{du^*}{dx^*}\right|_{\max} \approx A\varepsilon^{-1},$$

$$因而\ U = A\ 和\ L = \varepsilon.$$

在内区中利用尺度化后的变量 ξ 和 v，我们有

$$v = \frac{u^*}{A}, \quad \xi = \frac{x^*}{\varepsilon},$$

因而 $v(\xi, \varepsilon)=A^{-1}u^{*}(\varepsilon\xi, \varepsilon)=\varepsilon\xi+e^{-\xi}$.

为了在两个区域中都得到一级近似,我们让 $\varepsilon\to 0$,使自变量在各区域中保持固定,那末在外区间内得到

$$u(x, \varepsilon)\approx x, \tag{29}$$

在内区间内得到

$$v(\xi, \varepsilon)\approx e^{-\xi}, \text{ 因而 } u(x, \varepsilon)\approx e^{-x/\varepsilon}. \tag{30}$$

我们以上的简单例子说明,在一个给定区间内缺乏正统性可以通过引进具有正统性的子域来加以补救:不同的子域中需要不同的尺度.因此,**在存在非正统性的情况下,我们不该用单个尺度去寻找一级近似,而必须在不同的子域内寻找不同的近似.在整区域上都成立的近似实际上是可以找到的,但它必须同时按照两个或多个尺度变化.**

根据上述最后一个论点,像(29)式和(30)式所示明的那样,我们实质上已回答了本节开头提出的问题,即(4)式中的三个表达式到底哪一个是正确的一级近似.唯一还要说的是(4c)式中的近似 $u\approx 1$ 只在 $x=0$ 附近成立.这的确是所期望的,因为在这里长度是以 ε^2 来度量的.而 ε^2 这个量即使与内区间的宽度相比也是一个小量.当 $\eta=\varepsilon^{-2}x$ 固定时,极限 $\varepsilon\to 0$ 所给出的近似只在离 $x=0$ 几倍 ε^2 之内成立;$u\approx 1$ 显然是这样一种近似的适当的形式.在这里,考虑宽度为 $O(\varepsilon^2)$ 的"内-内"区间是得不到有意义的结果的.

在这一例子中,我们提倡在不同的区间引进不同的尺度,以克服非正统性,而在我们以前关于大振幅正弦波的讨论中,我们曾建议可以完全不管非正统性.在两种情况下,非正规性区间都是狭窄的,但只有在现在的情况下,函数的变化才是迅速的,因而积累了相当大的改变.

当 ε^{-1} 很大时的抛射问题,即是有必要引进不止一个尺度的情况的例子.当抛射体靠近地面时,(16)式的尺度仍然是合适的.但当抛射体远离地球时,需要另一种尺度化,如上所述,有一个内区间(厚度 $\approx V^2/g$)和一个大得多的外区间(抛射体离地面不止几

个半径)存在.

可能出现两种尺度共存的情况，一个例子是 $e^{-\varepsilon x}\sin x$，它在 $O(1)$ 的尺度上振荡,而振幅却在比较长的 $O(\varepsilon^{-1})$ 尺度上变化着. 在某些情况下,(例如)在摆的频率的缓慢改变过程中,认识到同时存在着不止一种尺度是有益的.（与 2.2 节比较.）在其他情况下,完全不管这种迅速的变化,或对这种变化进行平均,这些或许是最好的办法,即使这样做,也意味着对解的导数取近似值时会造成大的误差. 把小尺度的不规则性加以平均,以揭示主要倾向,这是许多取得成功的唯象理论的策略[1].

尺度化和扰动理论

一旦一个问题得到了正确的尺度化，原则上人们便可借助于扰动理论系统地利用方程中存在的小参数，导出任意精确度的近似解. 按照现在的观点,“正则”扰动理论所研究的是正统性情形，在这种情况下，一组尺度就足够了. 而“奇异”扰动理论则是发展来处理非正规情况的,在这种情况下,为了得到在整个区间上一致有效的近似，必须引进不止一组尺度. 关于正则扰动和奇异扰动的基础理论将分别在第七章和第九章中加以讨论.

尺度化未知函数

若要进行量级估计和尺度化，就要知道你所设法求解的那个问题的解的主要性质. 人们怎样才能得到量级估计所必需的知识呢？我们列出六种可能性:

(i) **利用与所研究现象有关的实验资料和观察资料.** 这些资料往往会指明一种现象主要是由于两种效应的平衡引起的，因而把这些效应相对应的项进行权衡就可得到一种尺度化.（第 II 卷 3.3 节中边界层方程的推导就是这种比较的一个很好的例子.）

(ii) **从有关问题的经验中获得启示.**

---

1) 有一个例子,可参阅 D. Drew 用平均方法得到力学中两相问题场方程的做法. [*Stud. Appl. Math.* **50**, 133—166 (1971).]

(iii) 把所给的问题大加简化，再作求解．(这在我们关于抛射体的讨论中得到了说明．在那里，我们用到了在忽略重力随距离变化后所得的解的知识．知道了零级近似后，为了有效地确定高级近似,我们用尺度化去修改问题.)

(iv) (反方法.) 只是因为把一些项忽略后便可使问题易于处理，从而做出某些量级假设．(例如，假设非线性项是可以忽略的.)再对所忽略的项进行估算，也许用近似解来进行估算．如果可能的话，选择使这些项看起来确实可以忽略的参数范围．我们希望这些参数的范围是代表了感兴趣现象的特征的．并且希望所示明的前后一致标志着把一些小项忽略是合理的．(第 II 卷 7.3 节关于非线性水波理论的讨论就示明了这一点.)

(v) 利用试凑法．假定某种尺度化，求解所得的简化了的无量纲问题．然后校核一下,看无量纲项是否具有 1 的量级．

(vi) 对于问题所涉及的各种参数的特殊而典型的值，利用计算机算得结果．

最后一点构成了计算分析联合研究的基础．对于涉及常微分方程的问题，模拟计算机乃是极珍贵的一种工具[1],只要拧动拨号盘,就完成了参数变换．这种计算机的使用常常使我们对问题获得"感性认识"．从而就可以把一个简单而展示出来的分析近似确定下来．

自然现象的模型往往包括一个涉及许多参数和两个或三个空间坐标的偏微分方程组．使用数值方法跟踪解的瞬时变化，即使做一次也可能会极费机时；因而利用直接数值解法不可能彻底了解参数变化的影响．但是如果有了少数几个数值解，就常常可以作出数量级的估计，这就给分析研究中所需的简化提供了线索．如果这种研究成功的话，它将揭示出解对各种参数的依赖关系，并

1) 在模拟计算机中需要一种尺度化的形式．单位必须选择得使各种数值不超过计算机的容量．这时，人们对于他正要设法求解的那个问题的解答必须有所了解．例如，参阅 M. L. James、G. M. Smith 和 J. C. Wolford 著 *Analog Computer Simulation of Engineering Systems* (New York: International Textbook, 1966).

且也揭示出解的一般性质，从而为物理认识提供了基础.

练　　习

1. 试证明对于 $\tau_1 > 0$，(12)式的解是负的.（证明这一点时，不必求解这个问题.）

†**2.** 当基本方程具有(20)式的形式时，求函数 $u^* = A\exp(-ax^*)$，$b \leqslant x^* < \infty$的"速度尺度" U 和"长度尺度" L. 试就 L 与 b 无关这一点作出评论.

3. 把课文中长度尺度的表征推广到基本方程为 $F(u^*, \partial u^*/\partial x^*, \partial u^*/\partial y^*) = 0$ 的情况中去.

4. 把长度尺度的表征推广到需要确定两个应变量 u^* 和 v^* 的问题中去. 假定基本方程为

$$F\left(u^*, v^*, \frac{\partial u^*}{\partial x^*}, \frac{\partial u^*}{\partial y^*}, \frac{\partial v^*}{\partial x^*}, \frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right) = 0,$$

$$G\left(u^*, v^*, \frac{\partial u^*}{\partial x^*}, \frac{\partial u^*}{\partial y^*}, \frac{\partial v^*}{\partial x^*}, \frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right) = 0.$$

5. 编写一个特例说明空间不均匀性对长度尺度的影响.

6. 求解下式中的 $y(x, \varepsilon)$：

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \pi^2 y = \sin x + \varepsilon, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

当 $\varepsilon \ll 1$ 时，把 $y(x, 0)$ 与 $y(x, \varepsilon)$ 作比较. 画出示意图. 借此证明(28)式前面一段课文中(关于无害非正统函数)的陈述.

7. 小振幅水波的"无害非正统函数"为什么是遵循常系数线性方程组问题的典型？

8. 在本练习中，我们研究这样的抛射问题：考虑到空气的阻力，但仍不考虑重力的变化. 此时方程和初始条件为

$$m\frac{d^2x^*}{dt^{*2}} + k\frac{dx^*}{dt^*} = -mg, \quad x^*(0) = 0,$$

$$\frac{dx^*}{dt^*}(0) = V.$$

(a) 当 V 充分小时，尺度化了的变量仍由(16)式所给定，为什

么?

(b) 引进 (16) 式的变量，证明问题变成了其中只有参数 $\beta = kV/mg$ 的问题. 试对 β 作出物理解释.

9. (a) 单摆从静止开始摆动，它遵循方程 (7.1.1). ($\Omega = 0$). 假定初始振幅 a 不太大，试证明(7.1.3)恰当地定义了尺度化了的无量纲变量.

†(b) 如果 $a = 0$，且 Ω 很小,对尺度化了的变量应该作何种选择?

†(c) 当 a 和 Ω 都是不为零的小量时,试讨论尺度化.

10. 试证明 (1b)、(2) 和 (3) 的极限分别对 $x \in (0,1]$, $\xi \in (0,\infty)$, $\eta \in (0,\infty)$ 都不是一致的.

第七章　正则扰动理论

给定某个数学问题的解，当问题的条件稍有改变时，这个解将如何改变呢？对这个问题的系统回答就构成了**扰动理论**的主题.

在 2.2 节中，我们对扰动理论作了一点讨论. 为了与第一部分概括性的论述相协调，那里的讨论并不详细. 主要目的在于示明庞加莱方法如何能把麻烦的长期项去掉；这些长期项的出现，是由这样一种天真的想法，即把其他行星对选定的某个行星绕太阳运动的影响包括到问题中来引起的. 通过讨论小非线性对单摆运动的影响，我们间接地达到了上述目的.

现在我们所处的情况对学习扰动理论比较有利. 原因是在第六章中，我们讨论把数学模型公式化并使它出现一个有意义的小参数（如果这种表述为问题的条件所允许的话）. 在这一小章里，我们的目的是对正则扰动理论作一些详细的考究. 大体上讲，当把一个涉及小参数的问题直接加以简化，从而得到合理的初始近似时，这个理论是适用的.

7.1 节给出了第二章处理单摆问题时所省略的细节. 7.2 节对抛射问题的正则扰动计算的各个方面作了说明.（从数学上表述这个问题是上一章中较为详细的讨论的主题.）总共提出了三种计算方法：级数法，参数微商法和逐次近似法.

正则扰动理论的进一步应用，要在第八章给出. 那时的问题更困难些，要涉及两个常微分方程. 此外，第 II 卷第十章用这个理论（稍加修正后）对遵循一组非线性微分方程的水波问题作了冗长的分析. 总起来看，所有这些例子为一种重要技巧应用奠定了基础.

7.1　应用于单摆问题的级数方法

在本节，我们讨论扰动计算中的幂级数方法. 这些计算是用单

摆问题来示明的.除了到本章讨论将近结束的地方以外,我们避免了对第六章作根本性的参考. 因此在这里叙述的材料可以很好地与 2.2 节一起阅读;在 2.2 节中我们给出了单摆扰动计算的引论.

预备知识

在 2.2 节中,我们介绍了单摆, 单摆系一根一端具有点质量 m, 长度固定为 L 的无重量刚杆,点质量可绕悬挂点的水平轴自由旋转. 在该节中,或是在引论性的物理学教科书中指出,摆的基本数学问题是由下列角位移 θ^* 作为时间 t^* 的函数的运动方程和初始条件所构成的,

$$\frac{d^2\theta^*}{dt^{*2}}+\omega_0\sin\theta^*=0\quad\left(\omega_0^2=\frac{g}{L}\right);\quad t>0.$$

$$t=0\text{ 时},\quad \theta^*=a,\quad \frac{d\theta^*}{dt^*}=\Omega. \tag{1}$$

(当摆铅垂向下悬挂时,这里的 $\theta^*=0$.)按照"通常"的小位移假设,我们用 θ^* 代替 $\sin\theta^*$, 则得到 (2.2 节)

$$\theta^*(t^*)=a\cos\omega_0t^*+\Omega\omega_0^{-1}\sin\omega_0t^*. \tag{2}$$

我们希望系统地改进这个近似. 为了简单起见, 我们将把讨论限制在 $\Omega=0$ 的情形(摆由静止开始释放).

第一步是引进无量纲参数 Θ 和 t:

$$t=\omega_0t^*,\qquad \Theta=\frac{\theta^*}{a}. \tag{3}$$

现在,问题取下列形式

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2}+\frac{\sin(a\Theta)}{a}=0,\ \ \Theta(0)=1,\ \ \frac{d\Theta}{dt}(0)=0. \tag{4}$$

新的应变量 Θ 以初始角位移 a 为单位度量角位移. 新自变量 t 以 ω_0^{-1} 为单位度量时间, 这里 $2\pi\omega_0^{-1}$ 是小振动的周期. 这些无量纲变量为我们提供了一个其中有单参数 a 出现的问题, 而我们则希望在 a 比 1 小的假设下发展一种近似解[1].

1) 那些学过 6.3 节的读者, 应该认识到新的变量是尺度化了的. 参考角 a 是 $\theta^*(t^*)$ 的最大值. 按照 6.3 节例 3, 参考时间是 ω_0^{-1}.

我们作分析的基本工具是麦克劳林展开式

$$F(a)=\sum_{i=0}^{\infty}C_ia^i;\quad C_i\equiv\frac{d^iF(0)/da^i}{i!}.\qquad(5a,b)$$

假定级数是收敛的，当 a 为小量时，上述级数的逐次部分和为 F 提供了越来越精确的近似. 但是，即便是为了写下这个级数，所讨论的函数在原点也必须是无限次可微的. 另一方面，只要知道几阶导数是存在的，我们就可以用有限和加余项的形式来使用麦克劳林公式

$$F(a)=\sum_{i=0}^{n}C_ia^i+\left[\frac{d^{n+1}F}{da^{n+1}}(\xi)\right]\frac{a^{n+1}}{(n+1)!};$$

$$\xi\text{ 在 }0\text{ 和 }a\text{ 之间},\qquad(6)$$

这里不出现收敛问题，并且，我们由 $(n+1)$ 阶导数的范围就能对误差作出估算.

在论述以下的题材时，为了明确起见，我们将假设各种函数都具有麦克劳林形式的无限级数. 不过，如果这些函数只有有限阶导数时，我们就默认级数是适当地方截断的.

为了保证没有把事情弄混淆，我们注意到，如果函数 F 还依赖于 a 以外的变量，那末在麦克劳林展开式中，就必须使用偏导数，因此，这些系数便不再是常数了. 于是，如果 $F=F(t,a)$，那末式(5)变为

$$F(t,a)=\sum_{i=0}^{\infty}C_i(t)a^i;\quad C_i(t)=\frac{1}{i!}\frac{\partial F}{\partial a^i}(t,0).\qquad(7a,b)$$

在各种级数中往往只能方便地得到头几项，为了确保这是可以系统地做到的，我们必须始终留意已被忽略了的那些项. 为此我们使用 O 这个符号，这里我们用 $O(a^j)$ 表示包括 a 的第 j 次或更高次幂项的集合. 例如

$$\sin a=a-\frac{a^3}{3!}+O(a^5),\quad\cos a=1+O(a^2).$$

假定我们的计算在形式上是正确的，那末上式就与附录 3.1 中所定义的符号 O 的准确用法相符.

现在我们来概述一下把扰动理论用于微分方程时的级数方法. 这个方法可分为五步. 在我们把级数法应用于单摆问题式(4)时,每一步就立即得到了说明.

级数方法

扰动方法 I 假定因变量可展为小参数的幂级数.

第一步. 把幂级数代入微分方程. 这里我们假定

$$\Theta(t, a) = \sum_{i=0} \Theta_i(t) a^i. \tag{8}$$

这个替代给出了下式

$$\sum_{i=0}^{\infty} \ddot{\Theta}_i a^i + a^{-1} \sin\left(a \sum_{i=0}^{\infty} \Theta_i a^i\right) = 0 \quad \left(\cdot \equiv \frac{d}{dt}\right), \tag{9}$$

式中,逐项微商的正确性是视为理所当然的.

第二步. 把所有的量都展开,使每项都可写作为一个幂级数. 对式(9)中的第一项,现在没有工作可做，因为它已写成了一个幂级数. 第二项的处理要求我们用正弦函数的麦克劳林级数来写出下式,

$$a^{-1}\sin\left(a \sum_{i=0}^{\infty} \Theta_i a^i\right) = a^{-1}\left(a \sum_{i=0}^{\infty} \Theta_i a^i\right) - \frac{a^{-1}}{3!}\left(a \sum_{i=0}^{\infty} \Theta_i a^i\right)^3 + \frac{a^{-1}}{5!}\left(a \sum_{i=0}^{\infty} \Theta_i a^i\right)^5 - \cdots. \tag{10}$$

我们的目的在于只保留到 $O(a^2)$ 项. 但是,在中间的计算中,我们保留了一些较小的项,以确保没有重要的东西被忽略. 我们得到

$$a^{-1}\sin\left(a \sum_{i=0}^{\infty} \Theta_i a^i\right) = \Theta_0 + a\Theta_1 + a^2\Theta_2 + O(a^3) - \frac{a^2}{6}[\Theta_0^3 + O(a)] + O(a^4) = \Theta_0 + a\Theta_1$$

$$+ a^2\left(\Theta_2 - \frac{\Theta_0^3}{6}\right) + O(a^3). \tag{11}$$

第三步．把方程中的所有同幂次项收集起来，并让级数中各幂次的系数等于零．利用式(11)，我们把式(9)写作

$$(\ddot{\Theta}_0 + \Theta_0) + a(\ddot{\Theta}_1 + \Theta_1) + a^2\left(\ddot{\Theta}_2 + \Theta_2 - \frac{1}{6}\Theta_0^3\right)$$

$$+ O(a^3) = 0. \tag{12}$$

方程(12)的形式与 $F \equiv 0$ 时的式(7a)相同．根据式(7b)，这意味着对所有的 i 都有 $C_i \equiv 0$．假定式(12)必然收敛，这就使我们要求该式中的每一个系数都为零:

$$\begin{aligned} \ddot{\Theta}_0 + \Theta_0 &= 0, \\ \ddot{\Theta}_1 + \Theta_1 &= 0, \\ \ddot{\Theta}_2 + \Theta_2 &= \frac{1}{6}\Theta_0^3. \end{aligned} \tag{13}$$

我们原先的非线性微分方程已为一系列线性微分方程所代替．这是扰动方法的一个特点．

第四步．把幂级数代入原先的初始(或边界)条件，展开并让系数等于零．这样就得到一组隶属于第三步所得到的一系列微分方程的初始(或边界)条件．在目前的情况下，$\Theta(0, a) = 1$[1)]意味着

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} \Theta_i(0) a^i$$

或 $$0 = [\Theta_0(0) - 1] + a\Theta_1(0) + a^2\Theta_2(0) + O(a^3). \tag{14}$$

因此，我们要求

$$\Theta_0(0) = 1, \quad \Theta_1(0) = 0, \quad \Theta_2(0) = 0 \text{ 等}. \tag{15}$$

类似地，我们要求

$$\dot{\Theta}_0(0) = 0, \quad \dot{\Theta}_1(0) = 0, \quad \dot{\Theta}_2(0) = 0 \text{ 等}. \tag{16}$$

第五步．相继求解由第一步至第四步得到的这一系列的微分

1) 原文误印为 $\Theta(0) = 1$．——译者注

方程和边界条件．在现在的情况下，我们首先必须求解

$$\ddot{\Theta}_0 + \Theta_0 = 0, \quad \Theta_0(0) = 1, \quad \dot{\Theta}_0(0) = 0. \tag{17}$$

该微分方程的通解为

$$\Theta_0 = A\cos t + B\sin t; \quad A, B \text{ 为常数}. \tag{18}$$

满足初始条件的特解为

$$\Theta_0 = \cos t. \tag{19}$$

这就是无量纲形式下常见的近似

根据式(13)，(15)和(16)，$\Theta_1(t)$ 满足

$$\ddot{\Theta}_1 + \Theta_1 = 0, \quad \Theta_1(0) = 0, \quad \Theta_1(0) = 0.$$

其解为

$$\Theta_1(t) \equiv 0. \tag{20}$$

这一步没有作修正．

类似地，$\Theta_2(t)$ 满足

$$\ddot{\Theta}_2 + \Theta_2 = \frac{1}{6}\Theta_0^3 = \frac{1}{6}\cos^3 t, \quad \Theta_2(0) = 0, \quad \dot{\Theta}_2(0) = 0. \tag{21}$$

因为齐次方程的解已知，我们可以用参数变易法得到非齐次方程的特解[1]．系数待定法往往比较容易，如果它可以应用的话．如果我们进行下述通常很有帮助的步骤的话，那末这个方法在这里就是可用的，这些步骤是：用三角等式把包括幂级数 $\cos t$ 和 $\sin t$ 的表达式展开成为一个包括这些三角函数的线性组合的表达式．在目前的情况下，合适的等式为

$$\cos^3 t \equiv \frac{1}{4}(\cos 3t + 3\cos t).$$

利用上式把微分方程(21)改变成

$$\ddot{\Theta}_2 + \Theta_2 = \frac{1}{24}\cos 3t + \frac{1}{8}\cos t, \tag{22}$$

现在我们就可以应用待定系数法．在这样做时，我们必须注意到强迫项 $\frac{1}{8}\cos t$ 是齐次方程的一个解．因此，相应的常见形式的

1）这是常微分方程正则扰动计算的一个普遍特征．

特解必须用自变量 t 来相乘．我们得到(练习 1) 方程(22)的通解为

$$\Theta_2(t) = A\cos t + B\sin t - \frac{1}{192}\cos 3t + \frac{1}{16}t\sin t. \qquad (23)$$

加上初始条件，我们得到 $A = \frac{1}{192}$，$B = 0$[1]．

从式(19)、(20)和(23)，并把 $O(a^2)$ 的项或阶数更低的项考虑在内的话，我们看到完整的近似解为

$$\Theta(t, a) \approx \cos t + a^2\left(\frac{1}{192}\cos t - \frac{1}{192}\cos 3t + \frac{1}{16}t\sin t\right). \qquad (24)$$

值得注意的是频率较高的项为 $\cos 3t$．

至此所得结果的讨论

知道了对通常的近似 $\cos t$ 的修正后，我们现在就可以确定这种修正什么时候是小的了．只要 a 总是小量，那末我们看到在修正中正比于有界量 $\cos t$ 和 $\cos 3t$ 的项就都是小的．而与 $t\sin t$ 成正比的项则不然，它只是在当且仅当 $\frac{1}{16}a^2t \ll 1$ 时才比 1 小．而且下面一点是越来越清楚了，这就是按照我们是对 (i) 固定的时间间隔 $[0,T]$，还是对 (ii) 无界区间 $[0,\infty]$ 来考察上述近似，我们就有两种不同的情况．让我们先来考虑情况 (i)．

倘若 $\frac{1}{16}a^2T \ll 1$，则对于时间间隔 $[0, T]$，修正量是小的，而且，近似 $\Theta(t, a) = \cos t$ 看起来是自洽的[2]．事实上，我们会指望，当 $a \downarrow 0$ 时，该近似是**渐近地成立的**，而对于 $t \in [0, T]$，则近似还是一致的．这就是说，我们预期，倘若参数取得足够地小，那

1) 请注意，最后的答案式(23) 中出现了齐次解 $\cos t$ 的倍数．初学者有时仅写下类似于式(22)的方程的特解，遗忘了他们没有证明扔掉齐次解是合理的．为了满足初始条件，齐次解在任何情况下都是需要的．

2) 在 6.1 节中，我们采用了这个术语．

来在整个自变量的范围内，可以使精确解和近似解之间仅差一个任意小的量．下面我们用符号来表示，在目前的情况下，要使近似 $\cos t$ 一致渐近地成立就要求对于任何给定的 $\varepsilon>0$，存在着一个正数 a_0（它可能与 ε 和 T 有关，但必须与 t 无关），使得每当 $0\leqslant t\leqslant T$，$0\leqslant|a|\leqslant a_0$ 时，总有

$$|\Theta(a,t)-\cos t|<\varepsilon.$$

现在考虑无界区间 $[0,\infty)$．对于给定的初始角位移 a，项 $\frac{1}{16}a^2t\sin t$ 振动的振幅不断增加．从物理上来看，这种振动状态是可以排除的．因此从表面上看，我们的扰动方法并没有给出 $t\in[0,\infty]$ 时渐近成立的近似．在 9.2 节中我们将讨论一些怎样把上述展开式加以改进的方法，至于现在，让我们就满足于在 $[0,T]$ 中似乎一切都很好的事实．

让我们从略为不同的观点来审查一下上面的近似．一开始讨论时，我们是用考察扰动展开式中的第二项来估算通常的近似 $\cos t$ 的正确性的．重要的是认识到，与 6.1 节中的基本简化方法相比时，这个方法的优点何在．对于单摆问题，基本简化方法需要作 $a^{-1}\sin a\Theta\approx\Theta$ 的近似，从而找出近似解 $\Theta_0=\cos t$，并用确定 $a^{-1}\sin a\Theta_0\approx\Theta_0$ 是否成立的办法来检验自洽性．现在

$$\lim_{a\to 0}\frac{a^{-1}\sin a\Theta_0}{\Theta_0}=1.$$

对 t 是一致地成立，因为对于所有的 t，总有 $|\Theta_0|\leqslant 1$，因而当 a 很小时，近似在表观上是自洽的．但真解也满足 $|\Theta(t)|\leqslant 1$．（这在物理上是显然的——练习 4 中要求对此作出证明．）当用 Θ 代替 Θ_0 时，式(25)仍然成立，因而近似是真正自洽的．按照 6.1 节的术语，在下述意义上近似 $\cos t$ 仍然是“劣质的”，即在过了足够长的时间后，近似对振动周期所作的错误估算，将使实际角位移 Θ 的预测值有严重误差．这种近似的失效亦不是由基本简化方法来标志的，而是由扰动展开式中出现的第二项揭示出的．这可作为纠正劣质自洽近似的一个例子，在 6.1 节中已经给出过，而且我们在这

里讨论摆问题时要再次给出它.

很难想出一个例子，其中近似的失效不是以第二项的出现为标志的. 尽管如此,这种纠正的方法却并非普适的,因为在复杂的问题中,为了多计算一项,所需的额外工作量可以是令人可怕的. 在基本简化步骤中检验自洽性所需要的简单替代可能就是很容易做到的事. 尽管这是偶然的事,但就 6.1 节所提到的理由而言,自洽性的检验在此种例子中却是很值得做的.

高阶项

继续进行计算，我们就能得到扰动级数中的高阶项. 这不会出现原则性的问题,但是,最终计算是困难得令人可怕的.

利用下列事实是有帮助的: $\Theta_1(t)$ 恒等于零并非偶然的. 事实上对于所有的奇数 i, $\Theta_i(t)=0$. 为了看清这一点，请注意,如果以 $-a$ 代替 a, 则基本微分方程 (4) 是不变的. 假定式(4)具有唯一的解,这就是说 $\Theta(t,a)=\Theta(t,-a)$, 换句话说,Θ 是它的第二个自变量的偶函数. (这一事实背后的物理原因是什么?)根据这一点，不难证明 (练习 2), 当 $a=0$ 时, 所有 $\Theta(t,a)$ 对于 a 的奇次导数都为零. 因此式(8)的系数满足

$$\Theta_i(t)=\frac{1}{i!}\left[\frac{\partial^i\Theta(t,a)}{\partial a^i}\right]_{a=0}=0,\quad i\text{ 为奇数.}$$

我们得到级数 $\Theta(t,a)$ 不存在 a 的奇次幂的结论. 为了得到更高阶的修正,最好利用这一点，并从一开始就假定, $\Theta(t,a)$ 具有 a^2 幂的展开式.

注评　*上一段的考虑表明,在扰动计算开始之前,你就必须弄明白是否可以利用对称性的论据去证明恰当的展开变量是自然地出现的小参数的平方.* 如果看不到这种对称性，你就不得不因为疏忽的错误而盲目行动;你只得更加艰苦地工作,以得到给定的精度.

我们指望计算更多的项，以改进近似的正确性. 这对于闭区间 $[0,T]$ 是对的. 事实上,可以证明,当 $|a|\leqslant a_0$ 时,对于足够小

的 a_0，级数(8)是收敛的．对于 $[0, T]$ 中的 t，收敛是一致的．这就是说，给定任何 $\varepsilon > 0$，存在着一个非负的整数(它与 t 无关)，只要 $N > N_0$，$|a| \leqslant a_0$，$t \in [0, T]$，就有

$$\left|\Theta(t, a) - \sum_{i=0}^{N} \Theta_i(t) a^i\right| < \varepsilon. \tag{26}$$

这种收敛(见 3.2 节)暗示着下列事实，当 $a \to 0$ 时，级数(8)是渐近的，对于 $t \in [0, T]$ 中的 t 则是一致的．这就是说，对于任何 $\varepsilon > 0$，和任何给定的 N，存在着一个正数 a_1(它与 t 无关)，只要 $|a| \leqslant a_1$，$t \in [0, T]$，就有

$$a^{-N}\left|\Theta(t, a) - \sum_{i=0}^{N} \Theta_i(t) a^i\right| < \varepsilon. \tag{27}$$

用渐近分析的符号(附录 3.1)来表示，则有

$$\Theta(t, a) = \sum_{i=0}^{N} \Theta_i(t) a^i + o(a^N).$$

对 $t \in [0, T]$是一致的[1]. (28)

因为很难计算级数中的许多项，所以渐近结果往往比收敛证明更为有用．但是必须记住其间的差别．在收敛近似中，人们认为参数是固定的，考虑通过取更多的项数来提高精度．在渐近近似中，人们考虑固定的项数，并想通过让参数趋近于"有利的"值来改进精度．

就无界区间而言，取更多的项并不使情况得到改进．(a^n) 项包括了正比于 t^n 项的贡献，所以当 $t = O(a^{-1})$ 时，所有"修正项"都是 $O(1)$．在 2.2 节中我们简要地考虑了得到一种改进近似的庞加莱方法，在第十一章中将讨论求解这个问题的另一种途径．

练　　习

1. 利用待定系数法推导式(23).

2. (a) 证明偶函数的导数是奇函数，而奇函数的导数则是偶函

---

1) 在形式的计算中，我们假定式(28)的余项为 $o(a^{N+1})$，这是一个比 $o(a^N)$ 更强的要求.

数.

(b) 证明偶函数的二阶导数是偶函数.

(c) 证明所有偶函数的奇阶导数在原点为零.

3. (本题计算冗长.)假定式(4)有级数解

$$\Theta = \bar{\Theta}_0 + a_1\bar{\Theta} + a_1^2\bar{\Theta} + \cdots, \quad a_1 \equiv a^2,$$

试计算 Θ_2.

†**4.** 证明(4)式意味着 $|\Theta(t)| \leqslant 1$.

5. 当(1)式的初始条件取作 $a = 0$, Ω 是"小的"时，试计算对一阶近似的修正.

7.2 用扰动理论求解抛射问题

在本节，我们用三种不同的扰动方法来讨论最终以方程(6.3.18)表述的抛射问题. 首先,利用上节所介绍的级数方法. 通过已经解过的例子，我们示明多少有点冗长的计算是如何往下进行的. 当然,学生不应该读这些例子,而应该把它们当作对自己工作的一种校核来使用.

本节其余部分用同一例子示明参数微商法和逐次逼近法.

级数方法

在无量纲时间为 t 时，一个抛射物离地球的无量纲距离 x 由下列方程及其初始条件所决定

$$\ddot{x} = -(1 + \varepsilon x)^{-2}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1. \quad (1a,b,c)$$

这在 6.3 节已经作了证明(试与 6.3.18 作比较). 我们记得 $\varepsilon = V^2/gR$，式中 V 是铅垂向上的初速度，g 是重力加速度，R 是地球的半径. 在抛射体离开地球不太远的情况下，我们感到兴趣的是万有引力随距离变化所产生的影响. 因而，像在 6.3 节所讨论的那样,我们应该考究一下 ε 很小时,(1)式的解,按照上节所概述的扰动方法,我们取幂级数展开式

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \cdots, \quad (2)$$

并把它代入基本方程. 然后，我们用式(2)把项 $(1 + \varepsilon x)^{-2}$ 写成

ε 的幂级数. 原则上这可利用泰勒级数的公式写出，但是，经验告诉我们，在构造幂级数时，只要有可能，就应该用二项展开式. 如果有必要，最好进行基本的运算，以使二项式的第一项是1，在这种情况下，展开式取下列简单形式

$$(1+J)^n = 1 + nJ + \frac{n(n-1)}{2!}J^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}J^3 + \cdots, \quad |J| < 1. \tag{3}$$

在目前的情况下，我们得到

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon x)^{-2} &= 1 - 2\varepsilon x + \frac{1}{2}(-2)(-3)\varepsilon^2 x^2 + O(\varepsilon^3) \\ &= 1 - 2\varepsilon[x_0 + \varepsilon x_1 + O(\varepsilon^2)] + 3\varepsilon^2[x_0 + O(\varepsilon)]^2 + O(\varepsilon^3) \\ &= 1 + \varepsilon(-2x_0) + \varepsilon^2(-2x_1 + 3x_0^2) + O(\varepsilon^3).\end{aligned}$$

让各 ε 幂次的系数等于零. 我们得到下列各方程

$$\ddot{x}_0 = -1, \quad x_0(0) = 0, \quad \dot{x}_0(0) = 1. \tag{4a}$$

$$\ddot{x}_1 = 2x_0, \quad x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0. \tag{4b}$$

$$\ddot{x}_2 = 2x_1 - 3x_0^2, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0. \tag{4c}$$

例 1 求解方程组 (4)

解 积分方程 (4a) 得

$$\dot{x}_0(t) = -t + 1, \quad x_0(t) = t - \frac{1}{2}t^2. \tag{5}$$

由此，式 (4b) 变为

$$\ddot{x}_1(t) = 2t - t^2, \quad x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0,$$

因而

$$\dot{x}_1(t) = t^2 - \frac{1}{3}t^3, \quad x_1(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{12}t^4. \tag{6}$$

由 (4c) 得

$$\begin{aligned}\ddot{x}_2(t) &= \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{6}t^4 - 3\left(t^2 - t^3 - \frac{1}{4}t^4\right) \\ &= -3t^2 + \frac{11}{3}t^3 - \frac{11}{12}t^4,\end{aligned}$$

因而

$$\dot{x}_2(t) = -t^3 + \frac{11}{12}t^4 - \frac{11}{60}t^5,$$

$$x_2(t) = -\frac{1}{4}t^4 + \frac{11}{60}t^5 - \frac{11}{360}t^6. \tag{7}$$

所以，解为

$$x = t - \frac{1}{2}t^2 + \varepsilon\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{12}t^4\right)$$

$$+ \varepsilon^2\left(-\frac{1}{4}t^4 + \frac{11}{60}t^5 - \frac{11}{360}t^6\right) + \cdots. \tag{8}$$

重要的是抛射体到达其最大高度的时刻 t_m. 此时，速度为零，即

$$\dot{x}(t_m) = 0. \tag{9}$$

通过求解 $\dot{x}_0(t)$，我们可得到 t_m 的一阶近似. 根据(5)式，这就给出 $t_m \approx 1$，为了做得更好些，我们在所达到的精度下，利用这个解把(9)和(8)式合并在一起，这样我们就导出了 t_m 的下列方程

$$1 - t_m + \varepsilon\left[t_m^2 - \frac{1}{3}t_m^3\right]$$

$$+ \varepsilon^2\left[-t_m^3 + \frac{11}{12}t_m^4 - \frac{11}{60}t_m^5\right] + O(\varepsilon^3) = 0. \tag{10}$$

略去 $O(\varepsilon^3)$ 项后，这就是一个五次方程. 但是，我们只对近似为 1 的根感到兴趣. 而且我们指望，象我们已找到的所有其他的量那样，这个根有一个按 ε 展开的级数. 既然关于 t_m 的方程 (10)仅正确到 $O(\varepsilon^2)$，我们就取一个正确到同一阶的展开式

$$t_m = 1 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \tag{11}$$

现在，求得这个展开式的系数便是一种简单的计算了.

例 2 计算(11)中的 a_1 和 a_2

解 把(11)代入(10)，我们得到

$$0 = -a_1\varepsilon - a_2\varepsilon^2 + \varepsilon\Big[1 + 2a_1\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$- \frac{1}{3}(1 + 3a_1\varepsilon + O(\varepsilon^2))\Big] + \varepsilon^2\left[-1 + \frac{11}{12} - \frac{11}{60} + O(\varepsilon)\right]$$

$$= \varepsilon\left(-a_1 + 1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$+ \varepsilon^2\left(-a_2 + 2a_1 - a_1 - \frac{4}{15}\right) + O(\varepsilon^2).$$

让 ε 的各次幂数都等于零，我们就得到

$$a_1 = \frac{2}{3}, \quad a_2 = a_1 - \frac{4}{15} = \frac{2}{5},$$

因而

$$t_m = 1 + \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{2}{5}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \tag{12}$$

例 3 确定最大高度 $x_m \equiv x(t_m)$.

解

$$x_m \equiv x(t_m) = t_m - \frac{1}{2}t_m^2 + \varepsilon\left[\frac{1}{3}t_m^3 - \frac{1}{12}t_m^4\right]$$

$$+ \varepsilon^2\left[-\frac{1}{4}t_m^4 + \frac{11}{60}t_m^5 - \frac{11}{360}t_m^6\right] + O(\varepsilon^3)$$

$$= 1 + \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{2}{5}\varepsilon^2 - \frac{1}{2}\left[1 + \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{2}{5}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)\right]^2$$

$$+ \varepsilon\left[\frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3}\varepsilon + O(\varepsilon^2)\right)^3\right.$$

$$\left.- \frac{1}{12}\left(1 + \frac{2}{3}\varepsilon + O(\varepsilon^2)\right)^4\right]$$

$$+ \varepsilon^2\left[-\frac{1}{4} + \frac{11}{60} - \frac{11}{360} + O(\varepsilon)\right] + O(\varepsilon^3)$$

$$= 1 + \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{2}{5}\varepsilon^2 - \frac{1}{2}\left[1 + \frac{4}{9}\varepsilon^2 + \frac{4}{3}\varepsilon\right.$$

$$\left.+ \frac{4}{5}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)\right] + \varepsilon\left[\left(\frac{1}{3}(1 + 2\varepsilon + O(\varepsilon^2)\right)\right.$$

$$\left.- \frac{1}{12}\left(1 + \frac{8}{3}\varepsilon + O(\varepsilon^2)\right)\right] - \frac{7}{72}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

因而

$$x_m(\varepsilon)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\varepsilon+\frac{1}{8}\varepsilon^2+O(\varepsilon^3). \tag{13}$$

回过来看，用扰动理论完成分析轨道问题这个练习所得的解答，在性质上是很容易理解的. t_m 和 x_m 的修正项都是正的. 这是我们所指望的. 当考虑到地心引力随距离而减弱时，与认为地心引力不随距离而变的情况相比，计算得到的抛射体到达它离地球最大高度时的时间要长些. 而所达到的最大高度则要高些.

在现在这个问题中，解只是在有限时间间隔 $0\leqslant t\leqslant 2t_m$ 内才有意义. 与单摆问题不同，不存在由于某种微小的效应在充分长的区间内不可避免地增大所造成的困难. 我们指望，我们的近似在 $0\leqslant t\leqslant 2t_m$ 内一致地成立. 事实上利用精确解，例如，我们可以看出倘若 $0\leqslant\varepsilon\leqslant 2$，则级数(13)收敛于 $x_m(\varepsilon)$ 的正确值.（参阅练习 2.）

我们记得 6.3 节证明过，仅当（用尺度化）正确地选择了无量纲变量，忽略了与小参数相乘项的这种“天真的近似”，才给出恰当的数学问题. 按照现在的观点，这种“天真的近似”是解的级数展开式的第一项. 我们得到如下的结论: *正确的尺度化是成功地使用正则扰动方法的必要条件.*

至此，我们把讨论限于一种方法，即级数法，现在我来简要地论述两种密切相关的方法: 参数微商法和逐次逼近法.

参数微商法

参数微商法的思想在于展开式

$$x(t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i(t)\varepsilon^i \tag{14}$$

的系数 $x_i(t)$ 的方程可以通过 $x(t,\varepsilon)$ 对 ε 的逐次微商，并在微商后令 $\varepsilon=0$ 来得到. 这个方法奏效的理由简单地说是因为系数 x_i 满足

$$x_i(t)=\frac{1}{i!}\left[\frac{\partial^i x(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon^i}\right]_{\varepsilon=0}. \tag{15}$$

当然，在级数方法中，$x_i(t)$ 的方程是用替代与集项得到的．这两种方法在本质上是等阶的，但有时微商方法所需的计算稍容易些．

我们现在来叙述这个方法，并用抛射问题来加以说明．

扰动方法 II．

第一步．对于小参数微商方程和边界条件．考虑抛射问题式(6.3.18)：

$$\ddot{x}(t,\varepsilon) = -[1+\varepsilon x(t,\varepsilon)]^{-2}, \quad x(0,\varepsilon)=0,$$
$$\dot{x}(0,\varepsilon)=1. \tag{16}$$

对微分方程中的 ε 微商，我们得到

$$\frac{\partial \ddot{x}}{\partial \varepsilon} = 2(1+\varepsilon x)^{-3}\left(\varepsilon \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + x\right). \tag{17}$$

请注意，我们必须记住 x 依赖于 ε．为了方便起见，引进符号

$$x^{(i)}(t,\varepsilon) \equiv \frac{\partial^i x(t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon^i}; \quad i=0,1,\cdots. \tag{18a}$$

特别是

$$x^{(0)}(t,\varepsilon) \equiv x(t,\varepsilon). \tag{18b}$$

由此，(17)式可写作

$$\ddot{x}^{(1)} = 2[1+\varepsilon x^{(0)}]^{-3}[\varepsilon x^{(1)} + x^{(0)}], \tag{19}$$

对 ε 作第二次微商得到（练习 3）

$$\ddot{x}^{(2)} = 2[1+\varepsilon x^{(0)}]^{-3}[\varepsilon x^{(2)} + 2x^{(1)}]$$
$$-6[1+\varepsilon x^{(0)}]^{-4}[\varepsilon x^{(1)} + x^{(0)}]^2 \tag{20}$$

第二步．在各个方程中让参数等于零．我们引进另一个符号

$$y_i(t) \equiv x^{(i)}(t,0). \tag{21}$$

[与(15)式的比较表明，y_i 与正则扰动的级数法中所用的 x_i 仅差一个常数因子 $i!$]

利用式(21)，我们从(16)，(19)和(20)式得到

$$\ddot{y}^{(0)} = -1, \quad \ddot{y}^{(1)} = 2y^{(0)},$$
$$\ddot{y}^{(2)} = 4y^{(1)} - 6[y^{(0)}]^2. \tag{22a, b, c}$$

如果我们对边界条件重复第一步和第二步，就得到

$$y^{(0)} = 0, \quad \dot{y}^{(0)}(0) = 1. \tag{23a}$$

$$y^{(1)} = 0, \quad \dot{y}^{(1)}(0) = 0. \tag{23b}$$

$$y^{(2)} = 0, \quad \dot{y}^{(2)}(0) = 0. \tag{23c}$$

正如读者易于证明的那样，y_i 的方程与我们上面得到的（练习 4）相应的 x_i 的方程的差别仅在于出现了一个合适的常数. 同一结果是用不同的方法得到的.

逐次逼近法(叠代方法)

用下列方程可以启发我们得到扰动理论的另一条途径. 假定某问题具有下列形式

$$F(z) = G(z). \tag{24}$$

(为了明确起见，可以把 F 和 G 都看作是多项式.)进而假定方程 $F=0$ 给出了对所需解 z 的粗略近似 z_0. 为了得到二级近似，而不是把 $G(z)$ 完全忽略掉，我们可以用 $G(z_0)$ 来近似它. 那末我们就可解出一个新的近似值 z_1，它满足

$$F(z_1) = G(z_0).$$

这一步骤可以用

$$F(z_n) = G(z_{n-1}), \quad n = 2, 3, \cdots \tag{25}$$

来重复.

例 如果

$$z - 2 = 0.01z^3,$$

那末解的初始近似为 $z_0=2$. 较好的近似为 $z = 2 + 0.01(0.8) = 2.08$.

作为对单摆问题初始近似的一种改进方法，我们在 2.2 节中曾简单地提到过叠代方法.现在我们要利用抛射问题作为示例，对这个方法作一个更为一般的描述.

扰动方法 III. (适用于具有一个未知函数 x 的常微分方程)

第一步. *把微分方程写成 $F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \cdots, t) = G(x, \dot{x}, \ddot{x}, \cdots, t)$ 的形式. 式中 $F=0$ 给出了所需解的初始近似.* 抛射问题(1)的初始近似是由求解 $\ddot{x} = 1$ 得到的. 因此我们把式 (1a)

写成下列形式

$$\ddot{x}+1=-(1+\varepsilon x)^{-2}+1$$

或

$$\ddot{x}+1=\frac{\varepsilon(2x+\varepsilon x^2)}{(1+\varepsilon x)^2}. \tag{26}$$

评注．在以后，我们将用符号 z_i 表示第 i 次近似．这是为了把现在的近似与我们在方法 I 和 II 的讨论中所引进的近似 x_i 和 $y^{(i)}$ 加以区别．

第二步．逐次求解方程

$$F(z_0,\dot{z}_0,\ddot{z}_0,\cdots,t)=0;$$

$$F(z_n,\dot{z}_n,\ddot{z}_n,\cdots,t)=G(z_{n-1},\dot{z}_{n-1},\ddot{z}_{n-1},\cdots,t); \tag{27}$$

$$n=1,2,\cdots.$$

通常，人们让每个近似 z_i 都满足全部初始条件或边界条件，但是，有时可放松这个要求而得到好处．对于抛射问题，我们可用下述叠代方案

$$\ddot{z}_0+1=0,\quad z_0(0)=0,\quad \dot{z}_0(0)=1. \tag{28}$$

$$\ddot{z}_n+1=\frac{\varepsilon(2z_{n-1}+\varepsilon z_{n-1}^2)}{(1+\varepsilon z_{n-1})^2},\quad z_n(0)=0,$$

$$\dot{z}_n(0)=1. \tag{29}$$

在明显地包含一个小参数的问题中，可用一个例子来说明一种有用的考虑．考虑二次方程

$$-\varepsilon x^2+x-1=0,\quad 0<\varepsilon\ll 1^{1)}. \tag{30}$$

对于接近于 1 的根，求其近似值的叠代方法是

$$x_0-1=0 \tag{31a}$$

$$x_n-1=\varepsilon x_{n-1}^2 \text{ 或 } x_n=1+\varepsilon x_{n-1}^2,\quad n=1,2,\cdots. \tag{31b}$$

因而

$$x_1=1+\varepsilon,\quad x_2=1+\varepsilon(1+\varepsilon)^2=1+\varepsilon+2\varepsilon^2+\varepsilon^3,$$

$$x_3=1+\varepsilon(1+\varepsilon+2\varepsilon^2+\varepsilon^3)^2$$

---

1) 符号≪表示“小于小于”

$$= 1 + \varepsilon + 2\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 + \cdots. \quad (32)$$

这里值得注意的是，x_3 中 ε^3 的系数与 x_2 中相应的系数是不相同的，后者 x_2 的系数是错误的．这是因为 x_1 只正确到 ε 阶的项．因而 x_2 只正确到 ε^2 阶的项．如果我们用

$$x_0 = 1, \quad x_n = 1 + \varepsilon x_{n-1}^2 + O(\varepsilon^{n+1}) \quad (33)$$

代替式(31)，并且不计算 $O(\varepsilon^{n+1})$ 项，那末我们就可以说明上述事实，并且省去许多关于高阶项的无用的计算．

在分析(28)式和(29)式时，我们可以采用完全相同的考虑．从(28)式，我们得到

$$z_0 = t - \frac{1}{2}t^2,$$

代入(29)式便有

$$\ddot{z}_1 + 1 = \frac{2\varepsilon\left(t - \frac{1}{2}t^2\right) + \varepsilon^2\left(t - \frac{1}{2}t^2\right)^2}{\left[1 + \varepsilon\left(t - \frac{1}{2}t^2\right)\right]^2}. \quad (34)$$

我们可把这个方程写作下式而不致最终丧失其精度：

$$\ddot{z}_1 + 1 = 2\varepsilon\left(t - \frac{1}{2}t^2\right) + O(\varepsilon^2). \quad (35)$$

加上初始条件(29)，这就得到

$$z_1 = t - \frac{1}{2}t^2 + \varepsilon\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{12}t^4\right) + O(\varepsilon^2). \quad (36)$$

可以毫无困难地证明[练习 7(a)]，下一级近似 z_2 满足

$$\ddot{z}_2 + 1 = 2\varepsilon\left(t - \frac{1}{2}t^2\right) + \varepsilon^3\left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{6}t^4 - 3\left(t - \frac{1}{2}t^2\right)^2\right] + O(\varepsilon^3). \quad (37)$$

求解这个方程，并与(8)式作比较，我们发现，如所预料的那样，二次近似正确到 ε^2 阶项[练习 7(b)]．

逐次逼近法的一个优点在于它不需要辨认小参数．由于是叠

代方法，计算中某个次要的错误只会推迟而不会破坏对正确解答的靠近. 此外,有时解答的形式不容易猜到,但它却可以从逐次逼近法的几次叠代中形成. 最后,利用归纳法,有时比较容易证明逐次逼近法的收敛性.

逐次逼近法的主要缺点在于：在新的叠代中很多辛苦得来的项一般只造成给出更高精度的假象. 但是，如同我们已看到的那样,改进叠代步骤,有时可以克服这个缺点.

关于正则扰动理论的总评述

在本质上,我们一直在考虑确定这样一个函数 f，它既依赖于一个小参数 ε，又依赖于一个自变量 t，而且还满足一个具有恰当的初始或边界条件的微分方程. 假定 $\varepsilon=0$ 时,我们得到一个可以求解的问题，它的解是函数 f_0. 虽然多少仍然有点粗糙，但我们却可以比以前更精确地把正则扰动理论作如下的分类：当近似 f_0 在自变量 t 的全部定义域内似乎一致成立时，正则扰动理论是由系统地改进近似 f_0 的方法所组成. 如果在令 $\varepsilon=0$ 时所得到的问题 (i) 没有解; (ii) 虽然有一个解，但它在感兴趣的整个区域上并不给出一致成立的近似解; (iii) 有很多解,那末,这个方程就属于奇异扰动理论(第九章的主题)的范围.

我们这里仅考虑 f 满足单个常微分方程的情形,但是,当 f 满足一个代数方程,一个差分方程,一个偏微分方程,一个积分方程，这些方程的方程组等情况时，扰动方法本质上是相同的. 三种方法(级数法,微商法,逐次近似法)中的任何一个都可以用. 每个方法都得到一组欲待求解的问题. 各个问题的性质和求解它们所需的技巧随各人处理的方程类型而异，但是扰动方法提供了一个共同的框架.

我们所用的计算是形式上的，因为各种极限运算未加证明而作了交换. 例如,在把一个无穷级数代入一个微分方程时,我们交换了求和和导数的算符,在参数微商法中,我们交换了对参数的导数和对自变量导数的次序. 在所有的情况下，我们都未作逻辑证

明而假定对某个参数具有恰当的相依关系的解是存在的.

倾向于理论的数学家，可能已有了这样的动机：去研究这些定理，证明我们形式上的运算是正确的，以及发现比现在已有的定理意义更深远的定理. 知道了以下的事实以后，其他一些人将满足于在形式上往下做，这一事实即比起如果要取得进展仍然不可避免要做这种计算的那类问题来，能证明形式上的计算是正确的那一类问题是相当有限的.

扰动方法的一个困难在于计算的复杂性将随着保留项数的增加而迅速增加. 然而，通常计算一项或两项就足够了.（第八章中我们要看到这样的一个例子.）在其他情况下，可用计算机做所需的计算. 例如参阅 B. R. Munson 和 D. D. Joseph 的 "Viscous Incompressible Flow Between Concentric Rotating Spheres, Part 1, Basic Flow" *J. Fluid Mech*, **49**, 289—303 (1971) 一文. 该文保留了一合适的小参数的七次幂，这个问题大约需要计算 1000 个系数.

练　　习

***1.** 求出抛射问题(1)中的 x 的精确解.

2. 利用练习 1 证明

$$x_m = \frac{1}{2}\Big/\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon\right).$$

再用这个式子去校核(13)式.

3. 验证下列方程式.

(a) 方程(20).

(b) 方程(35)和(36).

4. 证明(4)式中的方程与(22)和(23)式中的方程是相容的.

5. 构造一个扰动方法 III 的例子，这种方法的好处在于不要使所有的叠代都满足原来的初始条件.

6. (a) 验证(32)式.

(b) 证明由方案(33)式也能得到(32)式.

7. (a) 验证(37)式.

(b) 求解(37)式,并由此说明与(8)式是一致的.

8. 按照下列方法讨论第 1 节的单摆问题.

(a) 用参数微商法.

(b) 用逐次逼近法.

9. 考虑二次方程 $m^2+\varepsilon m-4=0$, $0<\varepsilon\ll 1$.

(a) 用二次公式求解,并把所得结果展为 ε 的级数. 然后,假设问题 $m^2-4=0$ 是可解的,但是原始问题是不可解的,从而导出近似解.

(b) 用级数法求解.

(c) 用参数微商法求解.

(d) 用逐次近似法求解.

10. 在抛射问题中,当考虑空气阻力,但忽略重力的变化时,方程为

$$m\frac{d^2x^*}{dt^{*2}}+k\frac{dx^*}{dt^*}=-mg,\quad x^*(0)=0,\quad \frac{dx^*}{dt^*}(0)=V.$$

对于小阻尼,变量变换

$$x=\frac{x^*}{V^2g^{-1}},\qquad t=\frac{t^*}{Vg^{-1}},$$

仍然合适(与练习 6.3.8 加以比较.)假定幂级数展开式为

$$x(t,\beta)=x_0(t)+\beta x_1(t)+\cdots,\quad \beta=\frac{kV}{mg}.$$

继续按照课文中处理的相应的问题,证明

$$t_m=1-\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{3}\beta^2+\cdots,$$

$$x_m=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\beta+\frac{1}{4}\beta^2+\cdots.$$

11. 考虑本征值问题

$$y''+\lambda(1+\varepsilon x)y=0,\quad 0<x<\pi;$$

$$y(0)=y(\pi)=0,\quad 0<\varepsilon\ll 1.$$

†(a) 按照扰动理论,利用练习 4.3.12(a) 的结果,确定相应于

$\varepsilon=0$；$n=1,2,\cdots$的本征值 $\lambda_0^n=n^2$ 的一级修正 $\varepsilon\lambda_1^{(n)}$.

(b) 利用练习 4.3.12(b) 求出相应于本征函数 $y^{(n)}$ 一次修正的级数展开式．为了求得唯一的解答，要求进行归一化：

$$\int_0^\pi [y^{(n)}]^2 dx=1.$$

12. 求

$$36x^3+(162+4\varepsilon)x^2-24\varepsilon x+9\varepsilon=0$$

对小参数 $|\varepsilon|$ 成立的近似解.

13. 在某计算中，我们对

$$\varepsilon+\frac{27}{4}=x^{-1}(x+1)^3$$

在靠近 $x=\frac{1}{2}$ 处的两个根和 $\varepsilon=0$ 时的一个根感到兴趣，试求出关于这些根的级数展开式中的头一项或头两项.

第八章　一个生理流动问题的求解及其所示明的技巧

本章分析“固定梯度流动”问题．这是一种渗透性质的流动，它靠溶质浓度差驱动．我们对这个问题处理得较为简单，所以我们这里的讨论可以自成系统，独立存在．

在分析中，我们将要充分使用已在上文中比较简单地研究过的许多观念——量纲分析、尺度化和正则扰动理论．我们将看到量纲分析是如何把有关的参数从八个减少到三个的．尺度化部分是相当有趣的．此外，扰动理论也并非全然易懂的，这是因为问题中有两个大小必须加以确定的重要参数．总而言之，虽然仅涉及两个一阶常微分方程，但是为了作出透彻的分析，我们将要考虑的固定梯度流动的模型已复杂得足以需要用上我们的全部武器．

8.1　一个靠渗透驱赶的固定梯度流动模型的物理表述和量纲分析

在本节中概述各种生理学和生物学看法，这些看法同我们所要研究的问题有关．然后用量纲分析得到有关现象的一些初步结论．

一些生理学事实

有关的生理学事实如下．

(a) 各种组织把溶质分泌到邻近于它们或把它们“浸泡”在其中的流体中去．例如，肾组织把几种不同的盐分泌到在肾的小导管中流动的流体中去．

(b) 在感兴趣的情况下，溶质在浸泡流体中的浓度近似地等于或者也许多少大于溶质在分泌组织中的平均浓度．

(c) 分泌溶质的一种可能的机理是扩散，但在这里扩散并不是主要的机理，其理由是浓质正在进入的区域比起浓质正离开的区域来，前者的溶质浓度等于或高于后者的溶质浓度.

(d) 另一种可能的机理是靠组织和浸泡流体间形成的薄膜边界的**主动输运**. 这里化学"泵"可以以大体上与溶质在浸泡着薄膜的流体中的浓度无关的方式，把能量消耗在按给定的方向把溶质运送过薄膜上. 特别是主动地进行输送的薄膜可把溶质从低浓度区注入高浓度区.

然而可以证明，我们所关心的现象不可能直接牵涉到主动输运问题，即溶质不能直接注入浸泡流体. 人们已经测得了在薄膜的单位面积上溶质进入浸泡流体的速率. 知道了这一点，就可以计算溶质浓度与垂直于薄膜的距离之间的依赖关系. (这里采用简单的扩散理论是合适的.) 但是，测量结果与这种计算预测的结果是不同的[1].

生理学家 J. Diamond 和他的同事已提出了一个假设来调和这种种事实[2]. 到本书写作之时为止，可以说这个假设已很受关注，但尚未完全接受. 我们现在就来比较详细地研究这个假设.

生理学家们的出发点为下列观察结果，即狭长的渠道始终具有输送流体的组织所拥有的结构特征. 它的例子有胆囊外壁面上相邻细胞之间的渠道，肾的小导管中的折叠之间的渠道，胆的胆汁渠道网(小的通道)，衬垫在胃壁上的细胞之间的渠道. 人们推测，溶质被主动地输运到深入分泌组织的渠道的"远"端(图 8.1)，当流体通向渠道开端时，从而在远端处建立起来的比较高的浓度就会

---

1) 参阅 J. Tormey 和 J. Diamond, "The Ultrastructural Route of Fluid Transport in Rabbit Gall Bladder," *J. Gen. Physiol.* **50**, 2032 (1967). 也可参阅练习 2.6 和该处所引的参考文献.

2) 除了刚才所引的参考文献外，也可参阅 J. Diamond 和 W. Bossert "Standing-gradient Osmotic Flow, a Mechanism for Coupling of Water and Solute Transport in Epithelia" *J. Gen. Physiol.* **50**, 2061—2083 (1976), 以及这两位作者的文章 "Functional Consequences of Ultrastructural Geometry in 'Backwards' Fluid-transporting Epithelia", *J. Cell. Biol.* **37**, 694—702 (1968).

逐渐地被冲稀，原因是由于这种浓度分布，靠渗透作用能把水吸引过来．于是，溶质浓度的一种定常梯度或固定梯度就很快地建立起来了．在渠道的封闭“内”端，浓度是高的，而在另一端即“分泌”端，浓度下降为比较低的值．

我们要强调，我们所研究的机理要求各种分泌组织和吸收组织．为了明确起见，我们将把讨论限于分泌组织的情况．虽然会出现另外一些复杂的东西，但只要把整个机理颠倒过来，就可以处理吸收组织的情况．（参阅上面摘引的 Diamond 和 Bossert 1968 年的文章）．

深入地去讨论支持这种固定梯度假设的直接或间接的生理证

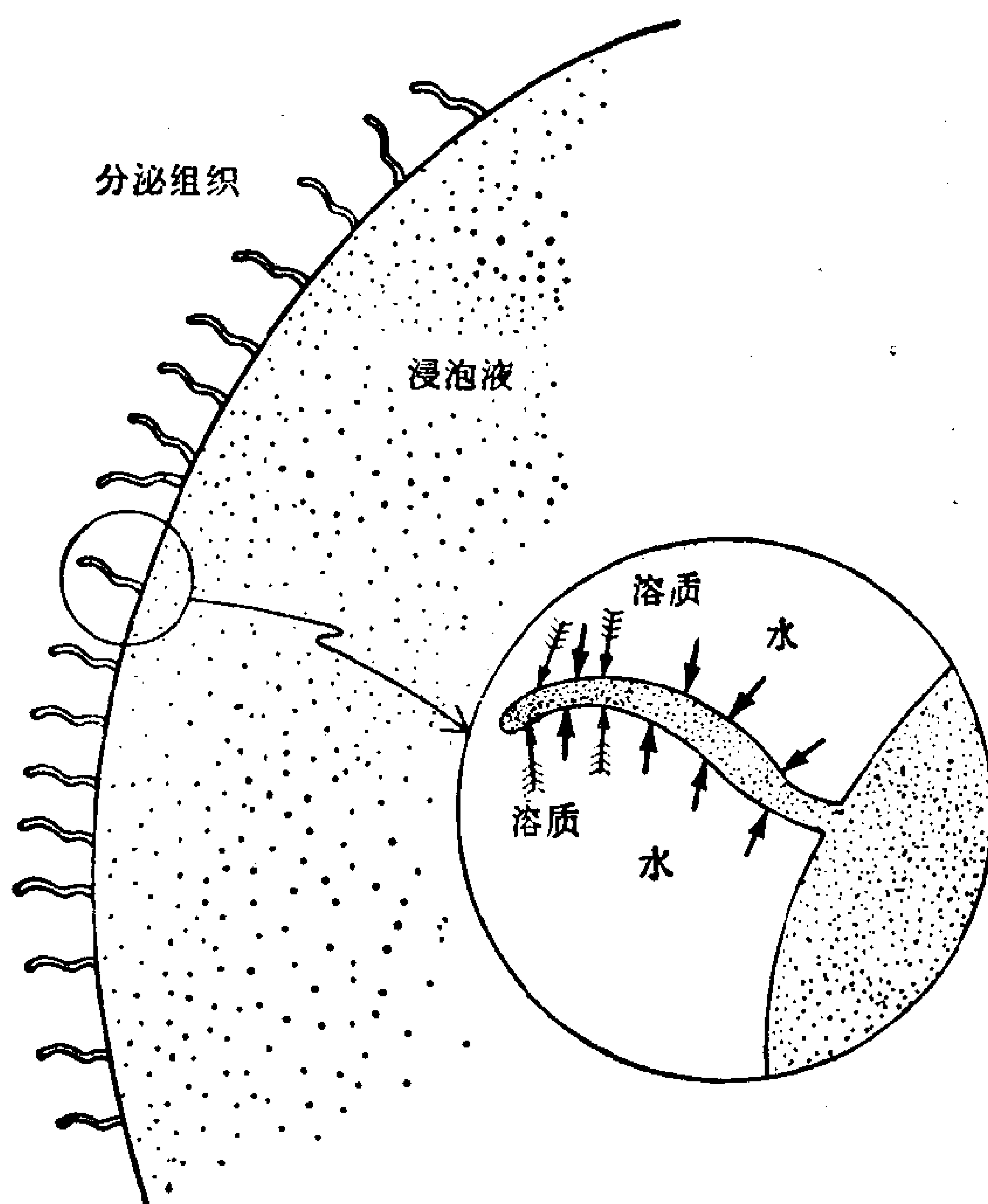


图 8.1　分泌组织中经常见到的细长渠道．插图是渠道的一张高倍数放大示意图，示出了推测到的输运机理，溶质被主动地泵入近闭端的渠道之中；水靠渗透作用被吸进来，从而大大地稀释了渠道开端处出现的溶液．

据是不适当的．关于这个问题，我们必须让有兴趣的读者去参考所引的参考文献和这里所列出的文章．而我们则限于研究用数学模型对这个假设进行解释，这个数学模型是由 Diamond 和 Bossert 在 1967 年提出并用数值方法进行分析的；在 1970 年西格尔又采用分析方法对它作了研究．上面已援引过的 Diamond 和 Bossert 的文章，我们在下面还将经常参考它，并常常缩写为大写字母 DB．西格尔的文章[1]则用 S 来代表，我们的大部分讨论是严格地根据这一篇文章来进行的．

渗透作用和渗透压克分子

为了确保读者对理解以后讨论所必需的生物学前提感到放心，我们来简单地叙述一些有关渗透作用的重要事实．

所研究组织的边界可看作是半透膜．水可以通过这层薄膜流动，但盐却不能通过．因此溶质（例如盐）不能通过薄膜而溶剂（例如水）却可以通过薄膜．如果单位体积内溶质的质点数在这一层膜的两边是不同的，那末水就流过薄膜使溶质的浓度相等．因而水从比较高的水浓度区域流到比较低的水浓度区域，这一点是并不令人奇怪的．

经过单位面积半透膜的渗透流动速率原来主要与薄膜两边单位体积内溶质质点数的比例有关．因此在讨论涉及渗透作用的现象时，很自然地把给定流体体积中存在的质点数作为浓度的量度．这种量度的一种单位是*渗透压克分子*（Osmol）[2]，现在我们来对它下定义．

---

1) "Standing-gradient Flow driven by Active Solute Transport," *J. Theoret. Biol.* **29**, 233—50. (1970). 这里的题材都是根据该期刊上的内容重新写下来的．特别是图 8.2、8.4 和 8.5 就是根据刚才所引的文章中的图重新画出来的．

2) 引进这个术语并非严格必需的，但它强调了这样一个经验：应用数学家开始在某个新领域中工作时就必须学会该领域中的术语，以使他能易于与专家们交流．如果有人一旦决定作出这种努力，那末就十分容易掌握新的技术词汇，从而使广大的新领域作为他多少熟悉的科学的一些方面而展现在他面前．也如同下面的讨论在某种程度上示明的那样，进一步的努力将表明，借助新的但却比较简单的科学原则，新领域的其他方面也是可理解的．

我们记得一克分子重的物质或**一摩尔**的物质就是以克为单位其质量在数值上等于分子量的一定量的物质．一摩尔包含阿佛伽德罗数 6.06×10^{23} 个分子．

当把某些分子放进溶液时，它们就分裂或离解；另一些分子则不然．如果把一摩尔象葡萄糖那样的不离解物质放入水中，我们就说水里含有一*渗透压克分子*的溶质．*一毫渗透压克分子*就是千分之一渗透压克分子．

一个盐分子在水里离解成为一个钠离子和一个氯离子．如果把一摩尔盐放入效能上无限的水中，我们就说水中含有两渗透压克分子的溶质．（"效能上无限"意思是说"大得足以基本上完全离解"．）

由于"干扰"效应，把有限体积中的溶质质点数加倍，并不使渗透效应加倍．同样，举一个例子来说，把一克分子的盐加入具有人体液浓度的溶液之中，人们发现，在这种流体中盐的有效浓度增加 1.85 摩尔[1]．请注意，修正量仅仅是百分之几．我们不需要涉及到这样一个小的因素；因此将假定通过单位面积半透膜的溶剂流动的速率与膜两边溶质浓度（单位体积的质量）差成正比．

影响固定梯度流动的因素

作为建立数学模型的准备工作，我们来列举出假定的制约这种现象的物理因素．我们必须强调，我们建立模型的工作已经开始．因为一些因素将被完全忽略，所以它们的影响则认为是次要的，这些因素的例子有渠道截面形状的改变，径向效应，渠壁对溶质的渗透性．类似地，被考虑的因素也将按照多少是近似的方式来加以讨论．例如，将采取线性关系把水流过渠壁的渗透流动与渠壁两边的溶质浓度差联系起来，因而壁面对水的渗透性可以用单一的常参数来表征．正如我们已经提到的那样，这样一种线性关系可能是精确的，但是应该记住已引进了可能的误差来源．

---

1) 参阅 R. F. Pitts '*Physiology of the Kidney and Body Fluids* (Chicago: Yearbook Medical, 1963)' 第二章．

那末下面就是我们将要做的假设

(i) 渠道将理想化为具有横截面积 a、周长 c 和长度 L 的直柱体.

(ii) 假定渠壁两边存在着溶质浓度差，其次假定经过单位面积渠壁的水流速率与这个浓度差成正比. 比例常数就是**渗透率**，并用字母 P 来表示.

(iii) 假定渠道外面“浸泡流体”中溶质的浓度为常数 C_0. 不仅假定这一点沿渠道侧壁成立，而且还假定可忽略在渠道开口处的反向趋势，因而也要求这里的浓度具有值 C_0.

(iv) 在渠道中，溶质将为不同的流速所携带，而且这一速度仅与沿渠道的距离有关. 除了溶质的这种**对流**以外，溶质的**扩散**也将发生. 扩散常数用 D 表示.

(v) 假定溶质的主动输运仅在从闭端延伸出来的距离 δ 的那一部分管壁上发生，渠道单位面积上溶质的输运率将假定具有常值 N_0. 这些假定和符号都概括在图 8.2 之中.

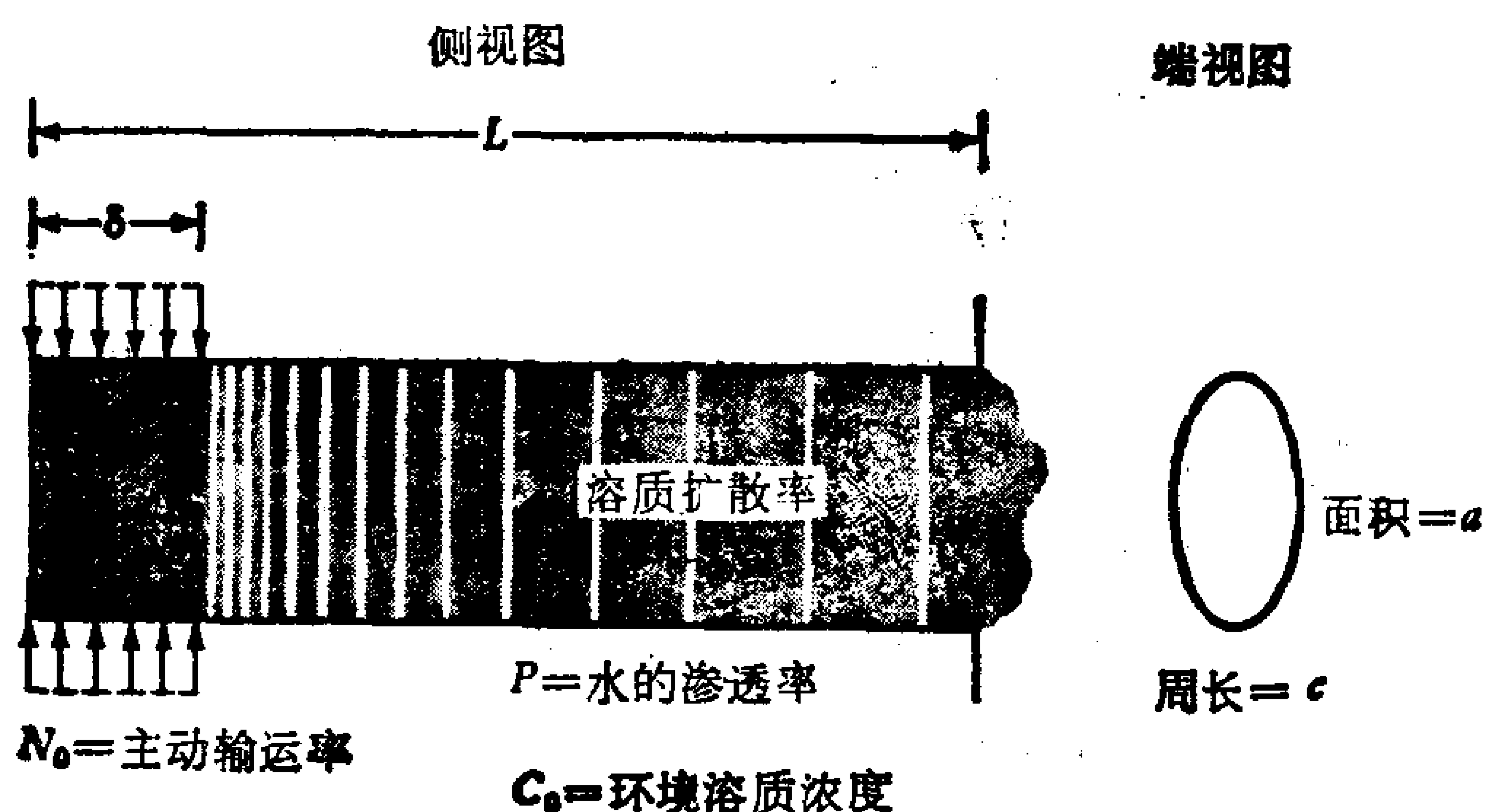


图 8.2 简化的固定梯度流动系统.

生理学上最感兴趣的量是溶质从渠道开端处逸出的速率. 使用**逸出渗透压容摩尔** O_r^* 来考虑问题是很有用的，这个名词定义为这样一种溶质的浓度，当把它与单位时间内离开管道的溶剂的体积相乘时就得到单位时间溶质离开管道的速率.

如果引进某种符号，O_r^* 的定义就会更加清楚. 让我们选一

条平行于管道母线的轴 x^*，使管的闭端相应于 $x^* = 0$，开端相应于 $x^* = L$. 让 $v^*(x^*)$ 表示流体在位置 x^* 处沿 x^* 增加方向的速度. 因为 a 是横截面积，于是单位时间内从管的开端处逸出的流体体积为 $av^*(L)$，我们用 $F^*(x^*)$ 表示溶质在 x^* 处的通量密度[1]. 按照定义，通量密度 $F^*(x_0^*)$ 是溶质沿 x^* 增加的方向经过 $x^* = x_0^*$ 平面单位面积的速率. 因此，溶质在管开端逸出的速率为 $aF^*(L)$. 按照定义，逸出渗透压容摩尔 O_s^* 满足 $av^*(L)O_s^* = aF^*(L)$，因此，

$$O_s^* = \frac{F^*(L)}{v^*(L)}. \tag{1}$$

在这里我们现在来讨论能从量纲分析学到些什么的问题. 如果愿意的话，读者可以立即转到 8.2 节，因为本节其余部分得到的结果在下文中并不用到.

函数关系的量纲分析

如果上面的假设 (i)—(v) 正确的话，那末固定梯度流动完全由八个参数 δ、L、c、D、C_0、P、N_0 和 a 所决定. 假定我们没有忽略任何本质的东西的话，一旦这些参数给定，理想化了的问题就完全确定了. 这是一个危险的假定，因为物理问题的正确无误的表征需要发展得很好的直观能力. 不过倘若认为这个假定不成问题，让我们来看看量纲分析方法可能告诉我们些什么东西.

如果上面提到的八个参数完全表征了固定梯度的流动系统，那末，特别地，它们必须唯一地确定量 O_s^*. 用符号来表示，我们可写作

$$\frac{O_s^*}{C_0} = f(\delta, L, c, D, C_0, P, N_0, a). \tag{2}$$

注意，我们已把(2)写得使它的左端是无量纲的，即是两个浓度之商.

1) 我们正在违反用 J 表示通量密度的习惯.

为了继续进行量纲分析，我们必须知道每个参数各自的量纲. 表 8.1 给出了所需的材料.

表 8.1 参数及其量纲

($\mathscr{L}$ = 长度，$\mathscr{M}$ = 质量，$\mathscr{T}$ = 时间)

参　　数	量　　纲
δ, L, c	$\mathscr{L}$
D	$\mathscr{L}^2\mathscr{T}^{-1}$
C_0, O_s^*	$\mathscr{M}\mathscr{L}^{-3}$
P	$\mathscr{M}^{-1}\mathscr{L}^4\mathscr{T}^{-1}$
N_0	$\mathscr{M}\mathscr{L}^{-2}\mathscr{T}^{-1}$
a	$\mathscr{L}^2$

渗透率 P 这一条是最困难的条目，可从下面的考虑中得到的. 为了测量 P，必须在这一层膜的两边建立一个已知的溶质浓度差，并测量在给定时间内通过给定面积的溶剂体积. 这个体积通过渗透率常数正比于浓度差，因而

$$\text{渗透率}=\frac{\text{溶剂体积}/(\text{面积}\times\text{时间})}{\text{单位体积溶质质量差}},$$

这个式子就给出了表 8.1 中的量纲.

因为 O_s^*/C_0 是无量纲的. (2)式右端的函数值必须与单位无关，因而 f 必须与它的自变量的无量纲组合有关. 因为 $\mathscr{M}$、$\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{T}$ 以幂次出现，因而只有自变量的幂次积才能使它们相消. 于是 f 包含的自变量必须以下列形式组合

$$\delta^{a_1}L^{a_2}c^{a_3}D^{a_4}C_0^{a_5}P^{a_6}N_0^{a_7}a^{a_8}, \tag{3a}$$

式中 a_i 是常数. 这个组合具有量纲

$$\mathscr{L}^{a_1}\mathscr{L}^{a_2}\mathscr{L}^{a_3}(\mathscr{L}^2\mathscr{T}^{-1})^{a_4}(\mathscr{M}\mathscr{L}^{-3})^{a_5}(\mathscr{M}^{-1}\mathscr{L}^4\mathscr{T}^{-1})^{a_6}$$
$$\times(\mathscr{M}\mathscr{L}^{-2}\mathscr{T}^{-1})^{a_7}\mathscr{L}^{2a_8} \tag{3b}$$

或

$$\mathscr{L}^{a_1+a_2+a_3+2a_4-3a_5+4a_6-2a_7+2a_8}\mathscr{M}^{a_5-a_6+a_7}\mathscr{T}^{-a_4-a_6-a_7}. \tag{3c}$$

并且，当且仅当

$$a_1+a_2+a_3+2a_4-3a_5+4a_6-2a_7+2a_8=0$$

$$a_5 - a_6 + a_7 = 0 \qquad (4a)$$
$$-a_4 - a_6 - a_7 = 0$$

时，这个组合才是无量纲的.

上面这个方程组的解可写作（练习 1）

$$a_6 = \alpha,\ a_7 = \beta,\ a_4 = -(\alpha + \beta),\ a_5 = \alpha - \beta,$$
$$a_2 = \gamma,\ a_3 = \theta,\ a_8 = \varepsilon,\ a_1 = \alpha + \beta - \gamma - \theta - 2\varepsilon, \qquad (4b)$$

式中 α、β、γ、θ 和 ε 都是任意的. 有了这样的结果，(3)式变成

$$\delta^{\alpha+\beta-\gamma-\theta-2\varepsilon} L^{-\gamma} c^{\theta} D^{-\alpha-\beta} C_0^{\alpha-\beta} P^{\alpha} N_0^{\beta} a^{\varepsilon}$$

或

$$\left(\frac{\delta P C_0}{D}\right)^{\alpha}\left(\frac{\delta N_0}{D C_0}\right)^{\beta}\left(\frac{L}{\delta}\right)^{\gamma}\left(\frac{c}{\delta}\right)^{\theta}\left(\frac{a}{\delta^2}\right)^{\varepsilon} \qquad (4c)$$

因此，正如 6.2 节中所讨论的那样，我们看到八个参数仅有的无量纲组合为

$$\pi_1 = \frac{\delta P C_0}{D},\quad \pi_2 = \frac{\delta N_0}{D C_0},\quad \pi_3 = \frac{L}{\delta},$$
$$\pi_4 = \frac{c}{\delta},\quad \pi_5 = \frac{a}{\delta^2}. \qquad (5)$$

或它们的组合. 因此

$$\frac{O_s^*}{C_0} = f(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5).$$

根据逸出渗透压容摩尔只与表 8.1 中的八个参数有关的假设，我们已推得逸出渗透压容摩尔与环境渗透压容摩尔的比只与(5)式中的五个无量纲参数有关，按照进一步的设想，我们还能做得好些. 可以确信，渗透率 P 必然总是以组合 cP 的形式出现的，因为对于一维流动(甚至轴对称流动)来说，只有单位长度的渗透率才是重要的. 类似地，N 和 D 也必须只出现在组合 cN 和 aD 之中. 此外，除了在上述组合外，面积 a 和周长 c 不再在问题中出现.（这最后一种说法现阶段尚不容易证明是合理的，但还是让我们暂时接受它.）

作如下的定义

$$P_1 = cP, \quad N_1 = cN_0, \quad D_1 = aD,$$

则对某个函数 g，我们就有

$$\frac{O_s^*}{C_0} = g(\delta, L, D_1, C_0, P_1, N_1). \tag{6}$$

跟以前一样，我们因此可以说无量纲逸出渗透压容摩尔必须与下列形式的无量纲参数有关

$$\delta^{b_1} L^{b_2} D_1^{b_3} C_0^{b_4} P_1^{b_5} N_1^{b_6}. \tag{7}$$

这一项的量纲为

$$\mathscr{L}^{b_1+b_2+4b_3-3b_4+5b_5-6b_6} \mathscr{M}^{b_4-b_5+b_6} \mathscr{T}^{-b_3-b_5-b_6},$$

对于任意 α、β 和 γ，当,且仅当

$$b_1 = 2\alpha + 2\beta - \gamma, \quad b_2 = \gamma, \quad b_3 = -\alpha - \beta,$$
$$b_4 = \alpha - \beta, \quad b_5 = \alpha, \quad b_6 = \beta. \tag{8}$$

(练习 2) 可证明前式是无量纲的，由此(7)式变为

$$\left(\frac{\delta^2 C_0 P_1}{D_1}\right)^\alpha \left(\frac{\delta^2 N_1}{D_1 C_0}\right)^\beta \left(\frac{L}{\delta}\right)^\gamma.$$

若回到我们原来的符号，则对于某个函数 f_1，我们可推得

$$\frac{O_s^*}{C_0} = f_1(\pi_6, \pi_7, \pi_8), \tag{9}$$

式中

$$\pi_6 = \frac{c\delta^2 C_0 P}{aD}, \quad \pi_7 = \frac{c\delta^2 N_0}{aDC_0}, \quad \pi_8 = \frac{L}{\delta}. \tag{10}$$

代之(2)式右端列出的八个有量纲参数，我们仅需要考虑(9)式中的三个组合！

也可以用与(9)式不同的组合．例如 π_6、π_7 和 π_8 的函数也是 π_7/π_6，$1/\pi_7$ 和 π_8 的函数(形式不同)．定义下列缩写符号

$$\nu \equiv \frac{\pi_7}{\pi_6} = \frac{N_0}{PC_0^2}, \quad \eta \equiv \frac{1}{\pi_7} = \frac{aC_0 D}{cN_0\delta^2}, \quad \lambda \equiv \pi_8 = \frac{L}{\delta}, \tag{11}$$

于是对于某个函数 f_2，我们就可以写出

$$\frac{O_s^*}{C_0} = f_2(\nu, \eta, \lambda). \tag{12}$$

对于同一基本结果，即 O_s^*/C_0 只依赖于三个无量纲组合这个结果，我们在下面将从问题的基本微分方程来推导．在那里，我们将看到从这个结果可以得到的某些理论上的结论．现在我们则来考察某些可能对实验工作者有用的结论．

建立按比例放大的固定梯度流动模型的可能性

我们的量纲分析示出了建立按比例放大的模型的可能性．与飞机和船舶的模型相反，这里的模型要比真实系统大得多，因为在其中真正出现固定梯度流动的管道小得只有在克服了巨大的困难并赋予很大的创造性后才能完成测量工作．

假定人们认为值得构造一个长度为真实管道 100 倍的模型分泌管道．利用带撇的量表示模型系统的参数，这就是说 $L'=100L$．如果我们也把溶质注入的区域做成 100 倍长 ($\delta'=100\delta$)，那末 $\pi_8'=L'/\delta'=L/\delta=\pi_8$，因而制约原系统的三个参数中的一个保持与模型系统相同．如果我们使面积与周长之比是原系统的 100 倍 ($a'/c'=100a/c$)，并使其余的无量纲参数保持相同的值 ($C_0'=C_0$, $P'=P$, $N_0'=N_0$, $D'=D$)，那末 (9) 中的其余两个基本无量纲参数保持原来的值 ($\pi_6=\pi_6'$, $\pi_7=\pi_7'$)[1]．如果 (6) 式成立，那末(9)式就成立，并且逸出渗透压容摩尔对于环境渗透压容摩尔之比在两个系统中就相等 ($O_s^{*\prime}/C_0'=O_s^*/C_0$)．在模型系统中的测量将给出关于原系统性质的数据．但是这只有在我们没有忽略任何重要参数时才行．当研究活着的有机体时，很难保证在模型中包括全部重要因素．

为了取得更进一步的进展，需要对一个确定的数学问题作出阐述．现在我们就转向这个问题．

---

1) 这一论点似有错误，因为按上文 $\delta'=100\delta$，$a'/c'=100a/c$，因而利用 (10) 式有 $\pi_6'=100\pi_6$，$\pi_7'=100\pi_7$．为了使 $\pi_6=\pi_6'$，$\pi_7=\pi_7'$，必须取 $a'/c'=10000a/c$，但这又违反了本节标题示出的按比例放大流动模型的要求．

——译注

练　　习

1. 利用线性方程组的理论证明，式(4a)的解包含五个任意常数.(学生们往往感到包含的未知数比方程个数少的线性方程组是"例外的",但是,量纲分析领域中这种方程组是经常出现的.

2. 证明：当且仅当(8)式成立时,(7)式才是无量纲的.

8.2　一个数学模型及其量纲分析

本节中我们来阐述固定梯度流动的数学模型，然后对它作量纲分析. 把其他地方得到的一般结果加以具体化，就可得到所需的方程. 但是,我们实质上还是从基本原理出发,这只是为了使现在的讨论接近于自洽. 有两个基本方程，一个是流体质量守恒方程，一个是溶质质量守恒方程.

流体质量的守恒

我们可以假定水具有均匀的密度，因而要求流体体积守恒就足够了. 考虑一段从 x^* 延伸到 $x^* + \Delta x^*$ 的试验柱体. 这里 Δx^* 代表一个正数，不必很小. 用 $v^*(x^*)$ 表示流体在 x^* 处的速度. 取 x^* 增加的方向为正，于是因为 a 是试验柱体的横截面积，所以流体通过试验柱体两端进入该柱体的速率为

$$a[v^*(x^*) - v^*(x^* + \Delta x^*)], \tag{1}$$

按照水流通过侧壁的速度与浓度差成正比的假设，水通过侧壁进入试验柱体的速率为

$$Pc\int_{x^*}^{x^*+\Delta x^*} [C^*(s) - C_0]ds \tag{2}$$

[作为对符号的一种校核，如果 $C^* > C_0$，因而溶质浓度在管内比较高,那末项(2)便是正的，这与如下事实严格相符的：水将进入管道稀释,那里有比较高的溶质浓度.]

因为试验柱体内的水不会增加,故(1)和(2)两项加起来必须为零. 因此对第二项利用积分中值定理可得

$$a[v^*(x^*) - v^*(x^* + \Delta x^*)] + Pc[c^*(x^* + \theta\Delta x^*) - C_0]\Delta x^* = $$

式中 $0 < \theta < 1$. 两边除以 Δx^*, 并在 $\Delta x^* \to 0$ 时取极限，我们得到第一个方程

$$\frac{dv^*}{dx^*} = Pca^{-1}(C^* - C_0). \tag{3}$$

溶质质量的守恒

令 $N^*(x^*)$ 表示溶质经过位于 x^* 处侧边界单位面积主动向内输运的速率[1]. 跟前面一样，令 $F^*(x^*)$ 为单位时间通过位于 x^* 处、方向与柱体母线垂直的单位面积上的溶质的数量. 我们记得如果溶质沿 x^* 增加的方向流动，那末 F^* 就是正的. 令溶质流过试验柱体的净流量为零，我们就得到

$$c\int_{x^*}^{x^*+\Delta x^*} N^*(s)ds + a[F^*(x^*) - F^*(x^* + \Delta x^*)] = 0. \tag{4}$$

同前面的方程一样，利用积分中值定理，并除以 Δx^*，然后让 $\Delta x^* \to 0$，我们得到

$$cN^*(x^*) - a\frac{dF^*}{dx^*} = 0. \tag{5}$$

单位面积的溶质流量 F^* 是两部分的和：(a) 由于对流引起的通量 F^*_{conv}，(b) 由于扩散引起的通量 F^*_{diff}. 首先让我们来确定对流的贡献. 这是靠流体运动整体地输运溶质引起的. 我们观察到，如果在 x^* 处流体具有速度 $v^*(x^*)$，那末单位时间经过 x^* 处单位面积的流体体积(沿 x^* 增加的方向)为 $v^*(x^*)$. (这里假定面积的方向是与柱体的母线垂直的.)因为 C^* 是单位流体体积中溶质的质量，所以单位时间经过上面说的这块面积的溶质的质量为 $C^*(x^*)v^*(x^*)$. 因而

$$F^*_{\text{conv}} = C^*v^*. \tag{6}$$

---

1) 暂时我们考虑一般情况，以后我们转到具体假设上去，即 N 在 $0 \leqslant x^* \leqslant \delta$ 处是常数，其他地方则为零.

扩散通量为

$$F^*_{\text{diff}} = -D\left(\frac{dC^*}{dx^*}\right), \tag{7}$$

式中常数D是**溶质的扩散率**. 方程(7)有时称为 **Fick 定律**;它指出,溶质的通量与溶质浓度的空间导数成正比, 这犹如牛顿-傅立叶冷却定律指出的热通量(或温度通量)与温度的空间导数成正比一样,有了(7)式中的负号,常数D就是正的,这是因为溶质从浓度较高的区域流走的缘故.

用证明方程(1.3.7)同一论据,可证明假设(7)式的合理性. 或者说,与热通量的类比是可以接受的. 在这种类比里,(7) 式本质上是与方程(4.14)相同的. 总之,把(6)式和(7)式结合起来,我们就有

$$F^* = v^*C^* - D\left(\frac{dC^*}{dx^*}\right). \tag{8}$$

边界条件

(3)、(5)和(8)式给出了问题所需的微分方程, 剩下来的事就是叙述边界条件了. 这些条件如下.

渠道的闭端是没有流体流过的. 因而

$$\text{在 } x^* = 0 \text{ 处}, \quad v^* = 0. \tag{9}$$

没有溶质流过渠道的闭端, 因而在 $x^* = 0$ 处, $F^* = 0$. 利用(8)和(9)式,我们可以把这个条件写作

$$\text{在 } x^* = 0 \text{ 处}, \quad \frac{dC^*}{dx^*} = 0. \tag{10}$$

如前所述, 我们假设渠道开端处溶质的浓度等于假定的浸泡流体的浓度 C_0. 于是,

$$\text{在 } x^* = 0 \text{ 处}, \quad C^* = C_0. \tag{11}$$

为了尽可能简单地确定限制在管道闭端范围内的溶质的"泵送"作用, 我们把闭端附近的 N^* 取作常值 N_0, 在其他地方则取作零:

对于 $0 \leqslant x^* \leqslant \delta$, $N^* = N_0$, 对于 $\delta \leqslant x^* \leqslant L$, $N^* = 0$ (12)

因为已假定 N^* 在 $x^* = \delta$ 处是不连续的，现在我们的问题实际上已分裂为两个问题．一个问题是对于 $0 < x^* < \delta$ 的，另一个则是对于 $\delta < x^* < L$ 的．我们必须假定进一层的条件来恰当地把这两个问题"连接"起来．我们将从天真的物理考虑来推导这些条件．练习中则要求读者作另外的推导．在 $x^* = \delta$ 处没有溶质创造出来；因此从左边进入的溶质必须等于从右边离开的溶质．用符号来表示就有

$$F^*(\delta^{-1}) = F^*(\delta^+), \quad \text{式中} \quad F^*(\delta^\pm) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} F(\delta \pm \varepsilon)^{1)}. \quad (13)$$

类似地，在 $x^* = \delta$ 处也没有流体被创造出来，因此从左边进入的流体体积必须等于从右边离开的流体体积，于是

$$v^*(\delta^-) = v^*(\delta^+). \quad (14)$$

我们采用溶质浓度本身在 $x^* = \delta$ 处是 x^* 的连续函数这一点作为一个附加的物理假设，因为否定这个假设是与我们关于分子性质的直觉相矛盾的．如果 C^* 和 F^* 在 δ 处连续，那末 dC^*/dx^* 必然在 $x^* = \delta$ 处连续，即

$$\frac{dC^*}{dx^*}(\delta^-) = \frac{dC^*}{dx}(\delta^+). \quad (15)$$

有了(12)式中所采用的溶质主动输运的形式，溶质质量守恒方程(5)很容易立即积分出来．我们得到

$$aF^* = cN_0x^* + Q_1, \quad 0 \leqslant x^* < \delta;$$
$$aF^* = Q_2, \quad \delta < x^* \leqslant L. \quad (16)$$

$F^*(0) = 0$ 意味着 $Q_1 = 0$. F^* 在 $x^* = \delta$ 处的连续性意味着 $Q_2 = cN_0\delta$. 因此，

$$0 \leqslant x^* < \delta \text{ 时}, \quad aF^* = cN_0x^*;$$
$$\delta < x^* \leqslant L \text{ 时}, \quad aF^* = cN_0\delta. \quad (17)$$

因为已假定侧壁不能渗透溶质，所以几乎能把式(17)直接写

1) $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} f(\varepsilon) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} f(\varepsilon)$.

出来. (17)式仅仅是说单位长度上存在着均匀主动输运的渠道区域中，溶质通量随 x 线性地增加，而在不再发生输运的渠道区域上,通量保持常数.

我们主要感到兴趣的是逸出渗透压容摩尔 O_s^*，它在式 (11) 中已作了定义. 综述我们前面的讨论，我们看到 O_s^* 是由下面的数学问题确定的:

$$\frac{dv^*}{dx^*}=P_{ca^{-1}}(C^*-C_0),\quad 0<x^*<\delta \text{ 和 } \delta<x^*<L.$$

$$v^*C^*-D\frac{dC^*}{dx^*}=\begin{cases}a^{-1}cN_0x^*, & 0<x^*<\delta,\\ a^{-1}cN_0\delta, & \delta^*<x^*<L.\end{cases}\tag{18}$$

$$v^*(0)=0,\ C^*(L)=C_0,\ v^* \text{ 和 } C^* \text{ 在 } x^*=\delta \text{ 处连续.}$$

确定

$$O_s^*=\frac{F^*(L)}{v^*(L)}=\frac{cN_0\delta}{av^*(L)}.$$

[在得到最后一行的式子时,我们已用了(17)式.]

在上式中,我们已消去了 dC^*/dx^* 在 $x^*=0$ 处必须为零和在 $x^*=\delta$ 处必须连续的条件. 这些已在所要求的条件中隐含了. 这一点与我们下面的预测是相符的,即把方程积分一次,所需的边界条件就必然减小.

作为对上述方程的一种校核，我们可以检验一下**量纲的均匀性**: 在一个给定的方程中,每一项都必须有相同的量纲;否则把一个基本测量单位加以改变,就可以使方程成为虚假的. (对于这个问题的正式讨论，请参阅练习 6.2.12.) 举例来说，在第一个方程中,左端的量纲是速度/长度,即 $\mathscr{T}^{-1}$. 根据表 8.1,右端的量纲为

$$(\mathscr{M}^{-1}\mathscr{L}^4\mathscr{T}^{-1})(\mathscr{L})(\mathscr{L}^2)^{-1}(\mathscr{M}\mathscr{L}^{-3})=\mathscr{T}^{-1}.$$

因此这个方程在量纲上确实是均匀的.

带方框框的方程(18)构成了固定梯度问题的数学表述. 我们面临着两个未知数 $v^*(x^*)$ 和 $C^*(x^*)$ 的一阶偏微分方程组. 如所预期的那样,有两个边界条件. 在 $x^*=\delta$ 处,问题的具体情况

有了改变，为了在此处把变量"缝合"在一起，就有两个连续性条件.

无量纲变量的引进

下一步转向无量纲变量. 在这样做时我们将指定 x^* 参考长度 δ，指定浓度 C^* 参考 C_0. 速度尺度没有明显的选择. 我们可以采用试凑法来找一个，但是下面的方法比较合理一点.

按照(6)式，对流通量密度等于速度与浓度的乘积. 因此速度必须具有通量密度除以浓度的量纲.根据(17)式，参数组合 $cN_0\delta/a$ 具有通量密度的量纲，因为这就是管道开端处的总溶质通量密度. 典型的浓度是 C_0. 因此我们取 $cN_0\delta/(aC_0)$ 作为我们的参考速度. 为了校核起见，我们查阅表 8.1，该表示明

$$\frac{cN_0\delta}{aC_0} \text{ 的量纲} = \frac{(\mathscr{L})(\mathscr{M}\mathscr{L}^{-2}\mathscr{T}^{-1})\mathscr{L}}{\mathscr{L}^2(\mathscr{M}\mathscr{L}^{-3})} = \frac{\mathscr{L}}{\mathscr{T}}.$$

这当然是正确的速度量纲.

因此，我们引进用下式定义的无量纲变量 x, v 和 C:

$$x = \frac{x^*}{\delta}, \quad C = \frac{C^*}{C_0}, \quad v = \frac{v^*}{cN_0\delta/(aC_0)}. \tag{19}$$

我们得到[练习 5(a)]

$$C - 1 = vv' \quad \text{对于 } 0 < x < \lambda, \tag{20a}$$

$$vC - \eta C' = \begin{cases} x & \text{对于 } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{对于 } 1 < x < \lambda, \end{cases} \tag{20b}$$

$$v(0) = 0, \quad C(\lambda) = 1, \tag{20c,d}$$

$$C \text{ 和 } v \text{ 在 } x = 1 \text{ 处连续.} \tag{20e}$$

无量纲逸出渗透压容摩尔 O_s 为

$$O_s \equiv \frac{O_s^*}{C_0} = \frac{1}{v(\lambda)}, \tag{21}$$

这里与式(1.11)一样，

$$\nu = \frac{N_0}{PC_0^2}, \quad \eta = \frac{aC_0D}{cN_0\delta^2}, \quad \lambda = \frac{L}{\delta}. \tag{22}$$

在原始量纲问题(18)式中，出现了八个参数 δ, L, c, D, C_0, P, N_0, a, 因而对任何性质的"解答"，例如 O_s^* 值，只能与这八个参数有关. 在无量纲问题(20)中，只出现三个参数 ν, η 和 λ. 无量纲问题解答的任何性质，例如

$$O_s = \frac{O_s^*}{C_0} = 1/\nu(\lambda),$$

只能与这三个参数有关.

假定我们不是用 δ 而是用 L 作为参考长度，那末结果会是什么呢? 用 $y = x^*/L$ 代替 $x = x^*/\delta$, 我们会得到[练习 5(b)]

$$\bar{C} - 1 = \nu_1 \bar{v}' \quad 对于\ 0 < \bar{y} < \lambda^{-1} \quad \left('\equiv \frac{d}{dy}\right); \tag{23a}$$

$$\bar{v}\bar{C} - \eta_1 \bar{C}' = \begin{cases} \lambda y & 对于\ 0 < y < \lambda^{-1} \\ 1 & 对于\ \lambda^{-1} < y < 1 \end{cases} \tag{23b}$$

$$\bar{v}(0) = 0, \quad \bar{C}(1) = 1. \tag{23c,d}$$

$\bar{C}$ 和 $\bar{v}$ 在 $y = \lambda^{-1}$ 处连续，

$$\bar{O}_s = \frac{1}{v(1)}. \tag{23e}$$

这里一表示应变量是 y 的函数，并且

$$\eta_1 = \frac{aC_0D}{cN_0\delta L}, \quad \nu_1 = \frac{N_0\delta}{PC_0^2L}.$$

我们再一次看到，问题仅涉及三个参数，这次是 η_1, ν_1 和 λ, 如所预料的那样，新的参数是旧参数的函数，因为 $\eta_1 = \lambda^{-1}\eta$, $\nu_1 = \lambda^{-1}\nu$. 这说明进行不同的无量纲化(无量纲参数不同，并且这些参数处在不同的位置上)时，虽然方程和边界条件的形式改变了，但这种非本质的变化并不改变问题解答所依赖的无量纲参数的数目.

量纲分析的物理方法和数学方法的比较

只有三个无量纲参数制约的固定梯度问题，和在 8.1 节中从问题的相当一般的物理表述中得到的结果是相同，而在本节中则

是从精确的数学表述得到的.(6.2 节对比较烦琐的抛射问题得到了同一种类的结果.)让我们来把这两种方法作一比较.

看来表述制约一种现象的方程是很有价值的，即使这个方程似乎完全难以处理也是如此. 因此,如果要把(1.2)式中所给出的 O_i^* 的参数依赖关系"直觉"出来，似乎必须有很深刻的直观能力;而推导基本方程时对已知物理定律所需的选择和简化上的困难则比较小些. 一旦导出了方程，有关的量纲参数就会自动出现. 另一方面，需要相当可观的物理直观才能肯定我们以前[得到式(1.6)]的说法,即参数 a、c、N_0、P 和 D 仅以组合 cP、cN_0 和 aD 的形式进入我们的固定梯度流动问题. 根据基本方程(18)，我们立即看到, N_0、P 和 D 总是与 a 和 c 以刚才提到的组合形式耦合在一起的. a 和 ca 不以其他的组合形式出现这一事实并不明显,但如果用体积通量 $w^*(w^* = av^*)$ 代替速度 v^* 时,这一点就变得明显了(练习 4). 因此,把无量纲参数引进一组方程,就能以一种计算上很容易同时又不需要稍深一点的 π 定理的论证来把无量纲参数孤立起来.

知道了问题的解必须依赖的无量纲参数以后，我们往往可以不用更多的努力就能得到所研究现象的有意义的特性. 例如，我们从(2.2)式所列出的参数看到，横截面积的形状只通过参数 a/c 的形式影响固定梯度流动. 很自然可用 $a/c = r/2$ 来定义**有效半径** r. 如果截面是圆的,有效半径就等于真实半径，因为 r 和 D 只以参数 η 的形式出现,我们可以肯定，把有效半径加倍(比如挤压给定周线的渠道)与把扩散率 D 对半的作用完全一样. 再举另一个例子,若把 N_0、P 和 r 都加倍,则流动不受影响.

练　　习

1. (a) 从 $x^* - \varepsilon$ 到 $x^* + \varepsilon$ 积分式(5)，并利用(12)式，然后让 ε 趋向于零,推导(13)式.

(b) 利用同一过程从式(13)推导式(14). [例如 Friedman (1956，第 176 页)所指出的那样，在有不连续性存在时要使这种

寻找跳跃条件的形式上的过程正确，就必须以适用于非均匀介质的形式把微分方程写出来．这时所有的参数都是自变量的函数．例如热传导方程必须写成(4.1.13)的形式而非(4.1.12)的形式．推导跳跃条件的另一种方法在练习 2 中给出．]

2. (a) 从(4)推论：若 N^* 有界，则 F^* 连续．

(b) 类似地从 (1) 和 (2) 式相加为零推论：若 C^* 有界，则 v^* 是连续的．(利用基本积分守恒方程，这是推导跳跃条件的最好的方法，更复杂的例子请参阅 12.3 节和练习 14.4.6—9.)

3. 校核(18)式中各方程的量纲均匀性．

4. 试证明若把 $w^* = av^*$ 引进(18)式，则 a 和 c 只以组合 cP、cN_0 和 aD 的形式出现．从而证明得到(1.6)式的假设．你能看出为什么是 w^* 而不是 v^* 是合适的应变量吗？

5. (a) 推导(18)式的无量纲形式(20)式．

(b) 利用 $y = x^*/L$ 代替 $x = x^*/\delta$，推导(23)式．

6. 这个练习的目的在于指导读者完成某些计算．这些计算使我们认识到有关在薄膜中溶质输运的一种简单的观点是必须加以抛弃的．如同在 8.1 节开始时所指出的那样，固定梯度的假设是纠正这种情况的一种尝试．

为了确定起见，让我们把注意力集中于青蛙的皮肤．大家知道，一块分开的皮肤，当浸泡在浓度为 C_b 的盐溶液中时，能把盐和水从外面输运到里面．假定有一个均匀的盐通量 F_s 通过这块皮肤，使得皮肤外面盐的浓度为 C_0，里面则为 C_i．并假定皮肤的外面和里面存在着厚度分别为 δ_0 和 δ_i 的流体层．令 $C(x)$ 表示这些层的盐浓度，其中 x 是垂直于与皮肤(平行)贴合在一起的平面的坐标．

†(a) 可以认定，C 满足下列微分方程

$$D\frac{dC}{dx} - F_w C = -F_s, \tag{24}$$

这里常数 F_w 是由于盐梯度的渗透效应所引起的水通量，F_s

是盐通量．常数D是什么？在(24)式中作了什么假设？为什么把F_s和F_w假定为常数是合理的？

(b) 在内层中求解这个微分方程;加上边界条件;并得到结果

$$C_i=(C_b-F)\exp\left(\frac{-F_w\delta_i}{D}\right)+F,\quad F\equiv\frac{F_s}{F_w}.$$

(c) 相应地对外层得到下列结果

$$C_0=(C_b-F)\exp\left(\frac{F_w\delta_0}{D}\right)+F.$$

(d) 证明下列假设是合理的:

$$F_w=L(C_i-C_0).$$

利用这个假设得到

$$F_w=\frac{F_sL(\delta_0+\delta_i)}{D+C_bL(\delta_0+\delta_i)}.\qquad(25)$$

对于青蛙皮肤，已测得了(25)式右端的各参数，所得到的F_w的预测值比测量值低一到两个量级．参阅 J. Dainty 和 C. R. House "Unstirred Layers in Frog Skin", *J. Physiol.* **182**, 66—78 (1966).

8.3 求得最终尺度化了的无量纲形式的数学模型

我们下一步的分析是选择尺度化了的无量纲变量，以使所出现的各种无量纲参数正确地给出各项的相对量级．这就是我们将要做的．然后我们再证明问题中存在着一个小参数ν．看起来可以直接应用正则扰动方法，但在试图做到这一点时却发生了困难．为了避免这种困难，必须建立第二个无量纲参数η和ν之间的关系．当(本节的后半部分)做到了这一点后，问题终于化成了最终的形式．

尺度化

像在 6.3 节讨论尺度化时所提到的那样，我们面临着估计各项大小的任务．而这只有在问题解出以后才知道．但是，我们并

非在真空中工作——我们已有了各种参数下的几种典型值的计算机结果(图 8.3)。

确定浓度 $C^*(x^*)$ 的尺度是容易的。图 8.3 中所示出的结果使我们增强了下列很显然的猜测：$C^*(x^*)$ 差不多总是浸泡流体的浓度 C_0。因此我们把 C_0 取作浓度的尺度，并用

$$C = \frac{C^*}{C_0}, \tag{1}$$

引进无量纲浓度 C。

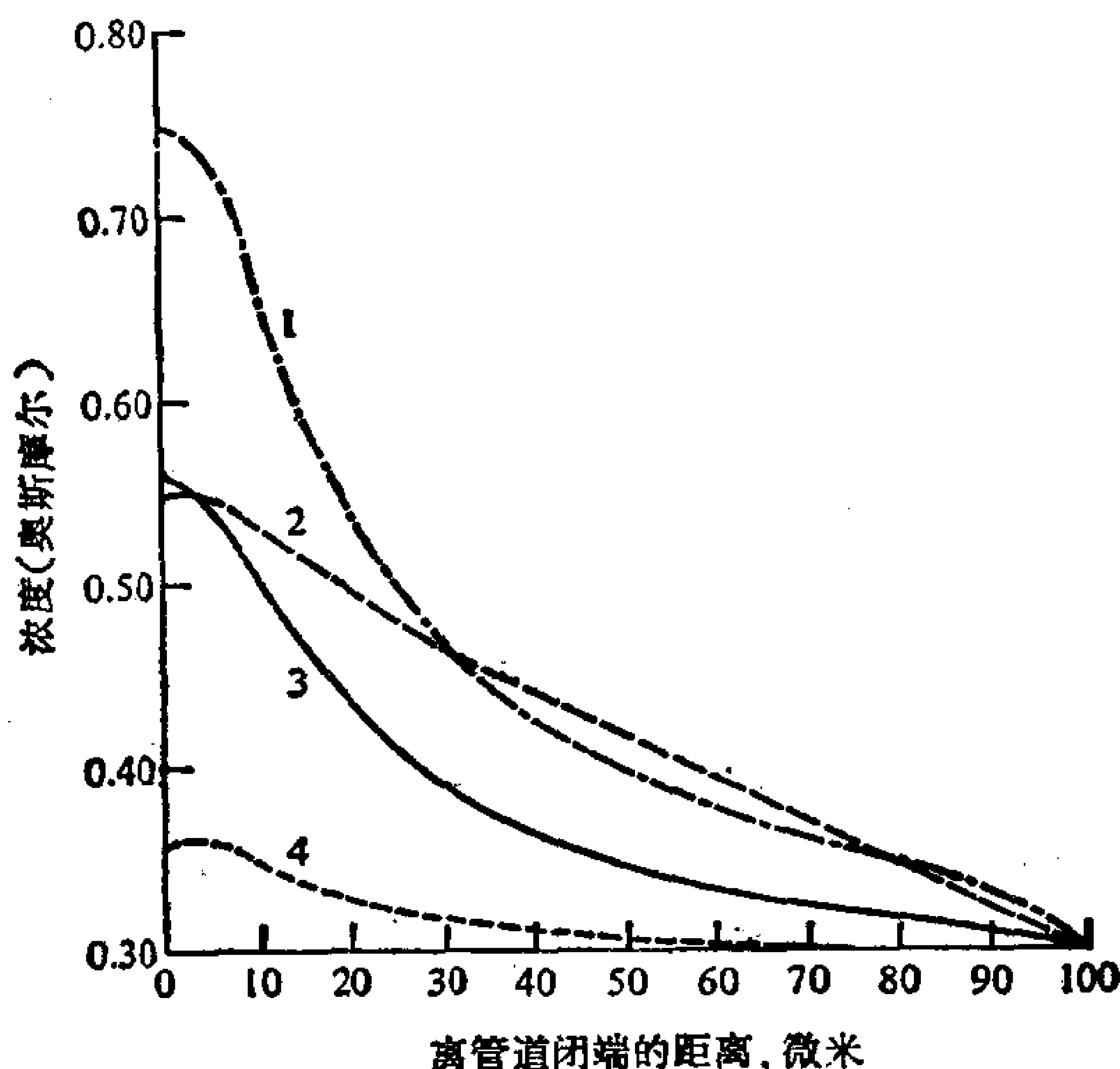


图 8.3 固定梯度流动系统中浓度变化的例子。由 DB 的图 3 得到。在数值计算(这里讨论了结果)中，各参数具有下列值：$L=100$ 微米 $=10^{-2}$ 厘米，$\delta=10$ 微米，$r=0.05$ 微米，$C_0=0.3$ 毫渗透压克分子/厘米^3，$D=10^{-5}$ 厘米^2/秒，$N_0=10^{-5}$(曲线 1)、5×10^{-6}(曲线 3)或 10^{-6}(曲线 2 和 4)毫渗透压克分子/厘米^2·秒，$P=10^{-5}$(曲线 1，3 和 4)或 10^{-6}(曲线 2)厘米^4/秒·毫渗透压克分子。曲线 1—4 的 O_1^* 计算值为 0.342、0.803、0.318 和 304。

v^* 大小的直接估算似乎是困难的。但是经过一些考虑以后，根据浓度差驱动流动，这本身就暗示了一种直接的方法了。我们首先注意到最大速度(尺度化方法要求我们对此进行估算)总是指望在管道的开端出现。这是因为渗透所吸引的逐渐积累的水量随 x^* 的增加而增加。我们因此而把注意力集中在 $x^*=L$ 上。

按照(2.8)式，$x^* = L$ 处的流量密度满足

$$F^*(L) = v^*(L)C^*(L) - D\frac{dC^*}{dx^*}(L). \tag{2}$$

右端的两项分别反映了从管中泄出的溶质的对流和扩散效应．我们期望 dC^*/dx^* 在 $x^* = L$ 处为负的，因而我们可以写出

$$F^*(L) \geqslant v^*(x^*)C^*(L) \text{ 或 } v^*(L) \leqslant \frac{F^*(L)}{C^*(L)}. \tag{3}$$

利用 $C^*(L) = C_0$ 的边界条件和(2.17)式中 $F^*(L)$ 的表达式，我们可以把最后的不等式写作

$$v^*(L) \leqslant \frac{cN_0\delta}{aC_0}. \tag{4}$$

在泄出溶质方面，我们预料扩散效应在最强烈的情况下也仍然不会大大超过对流效应[1]，所以不等式(3)的两边在大小上应该不会有巨大的不同．从而(4)式的右端可以作为对 v^* 的最大值的估算，并且这恰好也是一个速度尺度所能做到的．

在确定自变量 x^* 的尺度时，我们应该把注意力集中在应变量 C^* 和 v^* 改变最迅速的区域上．x^* 的这个尺度应该是常数，它估算出上述改变最主要的部分在其中出现的距离．从图 8.3 可以看出，应变量在比渠道短得多的一段距离上明显地改变着，并且 δ 是恰当的长度尺度．

总之，我们估算出的浓度、速度和长度的尺度分别为 C_0、$cN_0\delta/aC_0$ 和 δ．因此应该引进的尺度化了的变量为

$$C = \frac{C^*}{C_0}, \quad v = \frac{v^*}{cN_0\delta/aC_0}, \quad x = \frac{x^*}{\delta}. \tag{5}$$

但是，当我们仅仅关心把问题化成无量纲形式时，这种变量的选择只是[在(2.9)式中]所研究的那几种方案中的一种．所得到的方程已在(2.20)式中给出．

---

1) 利用(2.18)式，我们看到，$F^*(L)/[C_0v^*(L)] = O_T^*/C_0$．在 DB 的计算中，总的通量与对流通量的这个比值的范围从三种情况下大约为 1 变化到一种情况下大约为 8/3．这就证实了我们的论点：扩散通量决不会大大超过对流通量．

无量纲参数大小的估算

(2.20) 式构成了一个非线性方程组；没有明显的方法可对它们作精确的求解．在这种情况下，去寻求一种简化的方法是很自然的．因为已用了尺度化的参数，所以 (2.20) 式中出现的无量纲参数 ν 和 η 应该很好地给出各项相对大小的估计．如果这些参数中有一个比较小的话，对于一级近似来说，相应的项就可加以忽略．这时，扰动理论就可能提供一种处理问题的方法．

为了估算参数的大小，我们必须到生理学家那里寻找定量的资料．利用 DB 所搜集和分析的数据，我们得到了表 8.2 中罗列的各种无量纲和有量纲参数的最大值、典型值和最小值．这个表示明，ν 一般是小的，而且可以是非常小的．(无量纲参数的最大值和最小值是夸张的，因为在一个系统中，所有的各个有量纲参数未必具有极值.)

表 8.2 各种参数的估算值

参数	单位	最小值	典型值	最大值
r	厘米	10^{-6}	5×10^{-6}	10^{-4}
L	厘米	4×10^{-4}	10^{-2}	2×10^{-2}
δ	厘米	4×10^{-5}	10^{-3}	2×10^{-3}
D	厘米^2/秒	10^{-6}	10^{-5}	5×10^{-5}
N_0	毫渗透压·克分子/厘米^2·秒	10^{-10}	10^{-7}	10^{-5}
P	厘米^4/秒·毫渗透压克分子	10^{-6}	2×10^{-5}	2×10^{-4}
C_0	毫渗透压克分子/厘米^3	—	3×10^{-1}	—
ν	无量纲	10^{-5}	5×10^{-2}	10^2
η	无量纲	4×10^{-3}	75	10^{10}
κ	无量纲[1]	4×10^{-3}	5	200

1) κ 将在下文中定义.

一个失败的正则扰动计算

因为已用了尺度化的无量纲变数，我们可从 (2.20a) 式推导出 $C(x)\approx1$ 来，即 $C^*(x^*)=C_0$. 为了得到更多的知识，我们假定

应变量可以作为小参数 ν 的幂级数来展开:

$$C(x) = C^{(0)}(x) + \nu C^{(1)}(x) + \nu^2 C^{(2)}(x) + \cdots, \tag{6a}$$

$$v(x) = v^{(0)}(x) + \nu v^{(1)}(x) + \nu^2 v^{(2)}(x) + \cdots. \tag{6b}$$

现在我们把上式代入(2.20)式. 例如从(2.20b)式,我们得到

$$[v^{(0)} + \nu v^{(1)} + \cdots][C^{(0)} + \nu C^{(1)} + \cdots]$$

$$- \eta[C^{(0)} + \nu C^{(1)} + \cdots] = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(这里我们引进了二元列矢量, 按照习惯, 上面的元素表示 $0 \leqslant x < 1$, 下面的元素表示 $1 < x < \lambda$.) 下一步是让 ν 的每个幂次的系数等于零. 在这样做时, 我们必须决定 η 的作用. 一个自然的假设是 η 与 ν 无关,在此情况下,我们得到

$$\nu^0: \quad C^{(0)} = 1, \qquad v^{(0)}C^{(0)} - \eta C^{(0)\prime} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{7a, b}$$

$$\nu: \quad C^{(1)} = v^{(0)\prime}, \quad v^{(1)}C^{(0)} + v^{(0)}C^{(1)} - \eta C^{(1)\prime} = 0. \tag{8a, b}$$

易于看到,(7)和(8)式满足边界条件(2.20c, d)式的解为(练习 1)

$$C^{(0)} = 1, \quad v^{(0)} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(1)} = -\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

函数 $v^{(1)}$ 和 $C^{(1)}$ 在 $x = 1$ 处并不连续,这就违反了(2.20e)式. 看来并没有所寻找的这种类型的解答.

参数之间的关系

上节的困难是由于对问题的微分方程中出现的两个参数 ν 和 η 作了不恰当的处理引起的[1]. (原来边界条件中的参数 λ 并不起关键的作用.) 对于小 ν, (2.20a, b)式的基本简化是略去(2.20a)中的项 $\nu v'$. 我们保留了(2.20b)式中的所有项. 但是我们可以令

---

1) 在西格尔的工作中, 抛弃 η 与 ν 无关的假设是根据不连续解无法接受的理由作出的. 但是这种不连续性可用奇异扰动理论加以"修补"(练习 9.2.9). 然而根据DB解所给出的数值结果,没有发现这种性质的曲线,这种类型的解可以取消. 这就是说, 虽然在 $x = 1$ 附近, 有一个部分变化迅速的解在原则上肯定是可能的,但是它对生物学上有意义的参数区域是不合理的.

$\eta = \nu\eta_1$，此处从（2.22）式中 η 和 ν 的定义可知，$\eta_1 = \nu/\eta = cN_0^2d^2/aPC_0^3D$．如果假定当 ν 趋向于零时，η_1 保持不变，那末正比于 C' 的项在基本简化式（2.20b）中会被忽略．另一种可能性仍然是写出

$$\eta = \frac{\eta_2}{\nu}，\text{式中 } \eta_2 = \nu\eta = \frac{aD}{PC_0cd^2}. \tag{10}$$

假定当 ν 趋向于零时 η_2 保持不变．作替代 $\eta = \eta_2/\nu$，并用 ν 相乘，然后让 $\nu \to 0$，我们看到（2.20b）式中的首项现在为 $C' = 0$．现在清楚了，有两个参数存在，从而允许我们考虑许多不同的极限，那末哪种极限适合于我们的问题呢？

从(9)式我们知道

$$\lim_{\substack{\nu \to 0 \\ \eta,\lambda\text{固定}}} C(x;\nu,\eta,\lambda).$$

具有可接受的值 1．然而当我们看一下下一步近似时，我们就陷入了困境，因为

$$\lim_{\substack{\nu \to 0 \\ \eta,\lambda\text{固定}}} \nu^{-1}[C(x;\nu,\eta,\lambda) - 1] = C^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

是不连续的．如同我们将要看到的那样，原来合适的极限是使（10）式中所定义的量 η_2 保持固定．因为

$$\lim_{\substack{\nu \to 0 \\ \eta_2,\lambda\text{ 固定}}} C(x;\nu,\eta,\lambda) = 1 \quad \text{和} \quad \lim_{\substack{\nu \to 0 \\ \eta_2,\lambda\text{固定}}} \nu^{-1}[C(x;\nu,\eta,\lambda) - 1] \tag{12}$$

是连续的．

在继续往下做之前，值得注意的是(12)式中的极限可以更加完整地写作

$$\lim_{\substack{\nu\to 0,\ \eta\to\infty \\ \eta\nu=\eta_2 \\ x,\eta_2,\lambda\text{固定}}} C(x;\nu,\eta,\lambda). \tag{13}$$

不允许有极限(11)式，但允许有极限（13）式，这样的 η、λ 和 ν 的函数之一例是 $\lambda e^{\nu}\sin(1/\eta\nu)$．因为

$$\lim_{\substack{\nu \to 0 \\ \eta,\lambda\text{ 固定}}} \lambda e^{\nu} \sin\left(\frac{1}{\eta\nu}\right)$$

并不存在，但是

$$\lim_{\substack{\nu \to 0 \\ \lambda, \eta\nu \equiv \eta_2 \text{ 固定}}} \lambda e^{-\nu} \sin\left(\frac{1}{\eta\nu}\right) = \lambda \sin\left(\frac{1}{\eta_2}\right)$$

是存在的.

象这里所列举的涉及几个参数的问题中，没有一个必然取得成功的自动过程．尝试各种可能性仅是给出一点忠告．我们多次有信心地邀请读者去“考虑下列无量纲变量”，却留下导致这种正确选择的试凑法没有提到．多少稍好一点的忠告是*使用你的物理洞察力*．因为作者之一给出了本问题的分析，因而能够说这里的正确方法当初是用试凑法和下述物理推理(经过一段时间以后)得到的.

当 ν 很小时，我们从体积守恒方程 (2.20a) 看到，无量纲溶液浓度 C 近似地为 1． 在有量纲项中，这就是说溶质浓度 C^* 近似等于环境溶质浓度 C_0，如果 $C=1$，那末当然 $C'=0$，但作近似 $C'=0$ 并在 (2.20b) 中消去 $\eta C'$ 是危险的．一个理由是，虽然 C 可能接近于 1，但它可以迅速地围绕 1 脉动，因而 C' 可以相当大．即使 C' 并不大，但它乘了一个很可能大的参数 (参看图 8.2) 后，这样项 $\eta C'$ 可能就是重要的了.

另一方面，利用 $C \approx 1$ 的事实去证明近似 $vC \approx v$ 的合理性似乎是非常切合实际的，vC 代表溶质的对流项．要假定 $vC \approx v$ 就相当于用处于近似(无量纲)浓度 1 下的浓质对流代替处于实际在空间上有变化的浓度 $C(x)$ 下的溶质对流．如果实际浓度 $C^*(x^*)$ 并不偏离 C_0 太远，或者如果溶质对流并不太重要，那末这应该是近似成立的.

最终的表述

现在恰好是有点直接的试凑法导致了最终的解答．如果作了替代(10)式，那末最低阶近似就给出 $C^{(0)}=1$，而下一步的近似给出了对 C 的一个 $O(\nu)$ 修正 $C^{(1)}$ 和一个 $O(1)$ 速度 $v^{(0)}$[1]．量 $C^{(1)}$ 和

1) 在这一点上，利用表 8.2，使人受到鼓舞的并不象 η_1 那样，η_2 一般不大，它的典型值约为 4.

$v^{(0)}$ 满足溶质的(线性)守恒方程，在这个方程中，vC 为 $v^{(0)}$ 所代替，即在其中流体把浓度为 1 的浓质带走.

问题的最终表述中还包括了一种考虑，但这种考虑是一种繁琐的考虑. 如果把(10)式的参数 η_2 写成形式

$$\eta_2=\frac{\lambda^2}{\kappa^2}, \tag{14}$$

那末公式看起来简单些.

虽然导致上式的推导似乎可能有点绕圈子，但现在的方法是简单明了的. 利用(10)和(14)式，我们用下面的式子代替 η

$$\eta=\frac{\lambda^2}{\nu\kappa^2},\quad \text{因而}\quad \kappa=\left(\frac{cPC_0L^2}{aD}\right)^{1/2}. \tag{15}$$

问题(2.20)现在变成

$$C-1=\nu v',\quad \nu\kappa^2 vC-\lambda^2C'=\nu\kappa^2\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix} \tag{16a, b}$$

$$v(0)=0,\ C(\lambda)=1,\quad C \text{ 和 } v \text{ 在 } x=1 \text{ 处连续}. \tag{16,c,d,e}$$

$$0<\nu\ll 1,\quad \kappa,\lambda=O(1).$$

确定

$$O_s=\frac{1}{v(\lambda)}$$

这是问题的最终的尺度化了的无量纲形式. 得到这个合适的表述是经过了相当大的努力的. 但是，如同我们要在下文中见到的那样，现在用正则扰动法求解这个问题是一件简便的事情了.

在 1.1 节中我们说过，数学问题的求解并非应用数学家所面临的最艰苦的工作. 我们这里的讨论对这一点作了很好的说明.

练　　习

1. 试证明(7)和(8)式，并得到(9)式的解. 另外证明(16)式.

8.4 解答和解释

现在我们可以用正则扰动理论来求解上述问题. 我们将发

现，对于现在的情况来说，正是 O_s 这个最感兴趣的无量纲量的一级近似就足够了．我们利用近似解的解析表达式来给出对固定梯度流动的较深刻的理解．这里值得注意的一点是无量纲参数的物理解释．

解的一级近似

把级数 (3.6a) 和 (3.6b) 式代入 (3.16a, b) 式，收集 ν 的同次幂(练习 1)，我们就得到下列方程：

$$\nu^0:\quad C^{(0)}=1,\qquad \lambda^2 C^{(0)\prime}=0; \tag{1a,b}$$

$$\nu^1:\quad C^{(1)}=v^{(0)\prime},\quad \lambda^2 C^{(1)\prime}=\kappa^2\left[-\binom{x}{1}+v^{(0)}C^{(0)}\right]; \tag{2a, b}$$

$$\nu^2:\quad C^{(2)}=v^{(1)\prime},\quad \lambda^2 C^{(2)\prime}=\kappa^2[v^{(0)}C^{(1)}+v^{(1)}C^{(0)}]. \tag{3a, b}$$

当且仅当 $C^{(0)}=1$ 时 (1a) 和 (1b) 式才成立．利用这一点把 (2a) 和 (2b) 式联立起来，我们得到

$$\lambda^2 v^{(0)\prime\prime}-\kappa v^{(0)}=-\kappa^2\binom{x}{1}, \tag{4}$$

这个方程和有关的边界条件可以用标准的方法来得到（练习 2 ）．因此对于 $0\leqslant x\leqslant 1$，

$$v^{(0)}=x-K_1\sinh\kappa\lambda^{-1}x,\quad C^{(1)}=1-K_1\kappa\lambda^{-1}\cosh\kappa\lambda^{-1}x; \tag{5}$$

而对于 $1\leqslant x\leqslant\lambda$，

$$\begin{aligned}v^{(0)}&=1-K_2\cosh\kappa(1-\lambda^{-1}x),\\ C^{(1)}&=K_2\kappa\lambda^{-1}\sinh\kappa(1-\lambda^{-1}x).\end{aligned} \tag{6}$$

这里

$$K_1=\frac{\lambda\cosh\kappa(1-\lambda^{-1})}{\kappa\cosh\kappa},\quad K_2=\frac{\lambda\sinh\kappa\lambda^{-1}}{\kappa\cosh\kappa}. \tag{7}$$

逸出渗透压克分子的一级近似为

$$O_s=\frac{O_s^*}{C_0}=[\nu(\lambda)]^{-1}\approx[v^{(0)}(\lambda)]^{-1}=(1-K_2)^{-1}. \tag{8}$$

因为 λ 的典型值为 10，$\kappa\lambda^{-1}$ 往往并不超过 1． 在这种情况下，我们可以做近似 $\sinh(\kappa\lambda^{-1})\approx\kappa\lambda^{-1}$，这使我们能够写出特别简单的公式

$$O_s \approx \frac{\cosh\kappa}{\cosh\kappa - 1}. \qquad (9)$$

与数值计算的比较

让我们把所得的近似计算结果与 DB 就一些特殊情况所作的数值计算作一比较．图 8.4 画出了由(9)式确定的 O_s 的曲线，DB 画在五张图上的所有数值结果几乎都落在这一条曲线上．为了示明相符和不符的范围，我们也画出了在他们的图 7 上得到的一些点，他们的图 7 画出了逸出渗透压克分子作为渗透率函数的曲线，其中 $L = 100$ 微米，$\delta = 10$ 微米，$r = 0.05$ 微米，$C_0 = 0.3$ 毫渗透压克分子/厘米^3，$D=10^{-5}$ 厘米/秒，$N_0 = 10^{-5}$(◐)，10^{-6}(○)，

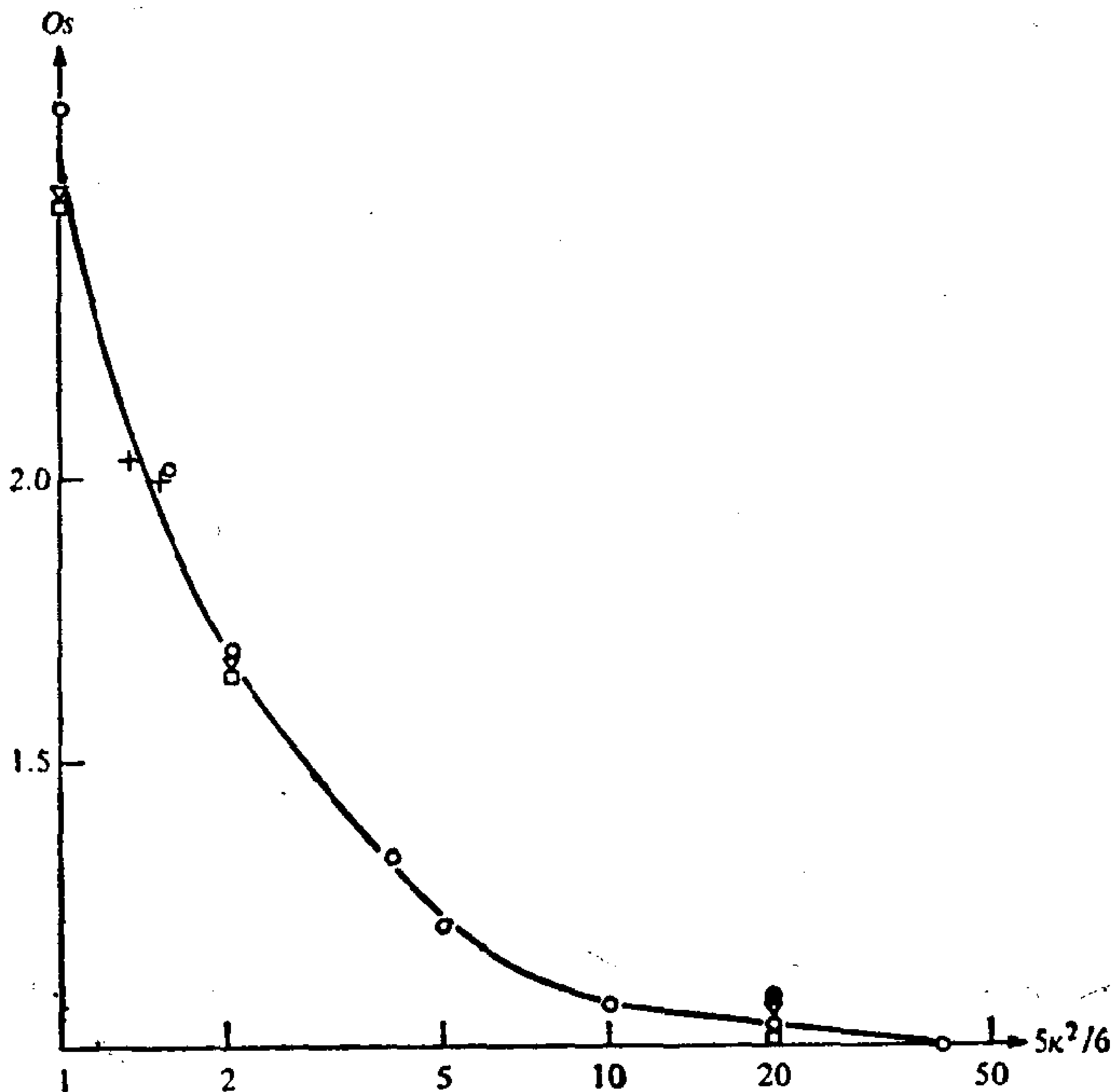


图 8.4　渠道开端处出现的流体浓度 O_s^* 与环境浓度 C_0 之比 O_s 的曲线．按照所用的近似理论表达式(9)式，O_s 只与(3.15)式中所定义的参数 κ 有关．图中各种点的数值是由课文中详细给出的各参数值从 DB 的"精确解"得到的．

10^{-7}(▽)，10^{-8}(+)或10^{-9}(口)毫渗透压克分子/厘米²·秒．为了便于比较，我们用单对数坐标画出了 O_s 随 $5\kappa^2/6$ 变化的曲线．可以看到，除了最大的 N_0 值以外，两者从相符很好变到相符极好．对于这些值，参数 ν 不再小得足以允许忽略(6)式中的高阶项．练习(3)中给出了级数展式中的 $O(\nu^2)$ 项．以后将要讨论到在大 ν 时这些项使两者的相符得到了改进．

画在图 8.5 中的 O_s 随 κ 变化的曲线把我们的近似结果表述得比较清楚．我们用了(9)式，并没有象我们在图 8.4 中那样在横坐标轴上用对数尺．为了看一下溶质输运地区的作用，我们还专门对(8)式作了研究，画出了当 $\lambda = 2$（即当溶质在渠道头半段上主动输运)时 O_s 随 κ 的变化．

我们一会儿将要更进一步地讨论上述结果．首先让我们暂时不去弄清从扰动理论的观点得到了什么．我们的问题是一个二阶非线性非齐次的常微分方程组．此外，在这个区间的两端都有一个边界条件．在两个不同的子区域中，非齐次项是不同的．连续条件把适合于每个子区间的解连接在一起．因此，问题并不是一个特别简单的问题．

Diamond 和 Bossert 用数值方法就许多情况处理了这个问题．他们的分析包括：在 $x = 0$ 处提出一个额外的边界条件，顺着 $x = \lambda$ 用"打靶方法"求解，一次又一次地（按照某种方案）调整 $x = 0$ 处的额外边界条件，直到 $x = \lambda$ 处的解具有合适的性质为止．

用一种正则扰动方法我们实际上能用简单的表达式(9)式把 DB 所得的全部结果拟合在一起．推导这个表达式所必需的简单计算可以在一两个小时内加以重复．但是读者不应该忘记想到这些计算所需的东西，特别是他应该回想起进入尺度化过程的直观思索（研讨某些数值解有助于这种直观思索)．在这个过程中，我们弄清楚有量纲参数的大小代表着各项的相对数值．读者应该记住，（从 DB 收集的数据中借用来的）实验数据使我们断定，对生理学上感兴趣的许多问题来说这些参数中有一个是小的，而另一

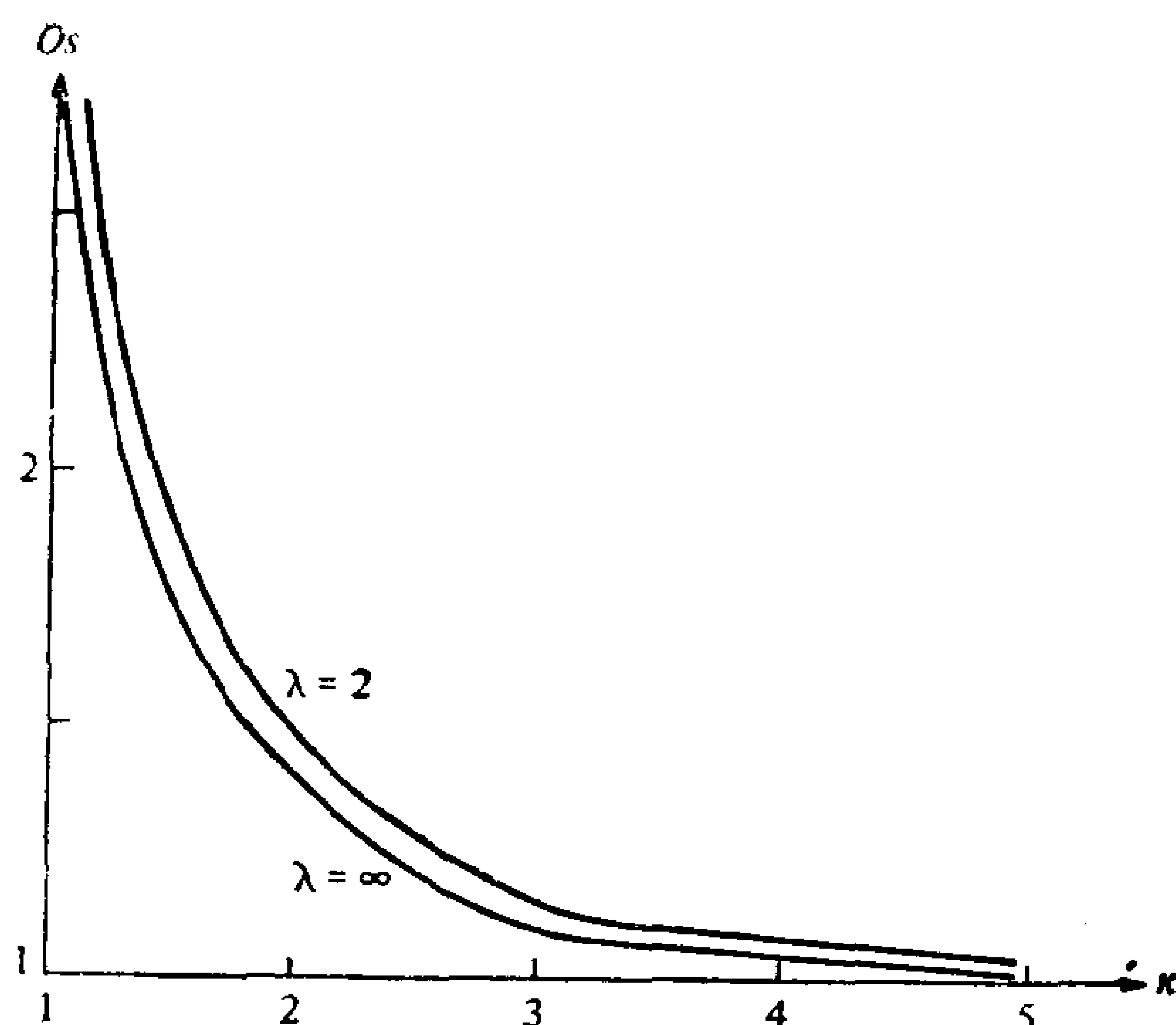


图 8.5　无量纲逸出浓度 O_s 随 κ 变化的曲线.（参数 κ 度量对流和扩散的相对重要性；它与溶质主动泵入管道无关.）底下的曲线是 $\lambda\to\infty$ 时的理论预测，式中 λ 是渠道长度 L 与泵入溶质的区域之长度 δ 之比. $\lambda=10$ 的结果与这里所画出的曲线难以区分. 上面的曲线：$\lambda=2$ 时的预测值.

个则相当大. 最后我们应该记住，为了通过扰动方法去利用有关参数大小的知识，需要与某种试凑法结合在一起的物理上的直观能力.

在某些问题中，简单的扰动计算必须辅之以大量的其他的推理,这也许一开始会使人丧失信心. 按照作者的看法,虽然事实上有很多问题可用本质上常规的正则扰动理论来处理，但恰恰正是较为困难的应用才向专门的应用数学家提出了挑战.

解释：无量纲参数的物理意义

作为本节的结束，让我们用研究微小管道的固定梯度流动中得到的结果来更好地理解这种流动如何发生和为什么发生的问题.

为了给出示明我们学到了什么这样一个问题的简单而有价值的例子,我们的分析表明,因为只有 κ 出现在最终的结果(9)式中,

把周线长和面积之比加倍，其效果与加倍渗透率相同．这种效果在比较短的渠道中可能是重要的．

更一般地说，识别制约一种现象的重要的无量纲参数是考虑简化模型所得到主要成果．对于这里所考虑的模型，量纲分析表明，不管制约问题的八个有量纲参数的值怎样，O_s（即逸出渗透压克分子数 O_s^* 对环境渗透压克分子数 C_0 之比）由三个无量纲参数决定．用扰动理论得到的基本方程的近似解导致了下列认识：O_s 往往仅是一个参数 κ 的函数．在确定这个参数的意义时，考虑 $\frac{1}{2}\kappa^2$ 更为方便些，而 $\frac{1}{2}\kappa^2$ 可写作

$$\frac{1}{2}\kappa^2 = \frac{[c(\bar{C} - C_0)PL]C_0}{aD(\bar{C} - C_0)/(2L)}. \tag{10}$$

在上述表达式中，$\bar{C}$ 是渠道中的典型浓度．（为了确定起见，$\bar{C}$ 可以看作管道中间的浓度．）因此，在分子上，方括号括出的因子是对单位时间内越过边界进入渠道的总水流量的估计．这当然等于单位时间内从渠道开端流出的水的总体积．因此整个分子是对渠道外溶质的对流量 aF^*_{conv} 的估计．分母是对渠道外溶质扩散流量 aF^*_{diff} 的一种估算，因为 $(\bar{C} - C_0)/(L/2)$ 应该是对渠道末端浓度梯度的近似[1]．因此

$$\frac{1}{2}\kappa^2 \approx \frac{F^*_{\mathrm{conv}}}{F^*_{\mathrm{diff}}}. \tag{11}$$

要与(11)式作比较的是

$$O_s \equiv \frac{O_s^*}{C_0} = \frac{F^*_{\mathrm{conv}} + F^*_{\mathrm{diff}}}{F^*_{\mathrm{conv}}} = 1 + \frac{F^*_{\mathrm{diff}}}{F^*_{\mathrm{conv}}}. \tag{12}$$

这是一个精确的结果，它可以从(2.18)式中定义的 O_s^* 的关系式得到．把(11)和(12)式联列，我们得到

$$O_s \approx 1 + 2\kappa^{-2}. \tag{13}$$

因此，当解(9)式对小量 κ 作展开时，我们得到 $O_s \approx 2\kappa^{-2}$，这与相

1) 我们对浓度的估算是用渠道中间和开端浓度差除以渠道长的一半得到的．

应的展开式(13)是一致的.

我们已经看到,参数 κ 是对流与扩散之间相对重要性的一种估计,这个值与 O_s 密切相关. 当 κ 为小量时,扩散占主导地位,因而浓度随距离变化的曲线,其梯度很接近于常值. 这是一个典型的扩散问题. (比较图 8.3 的曲线 2.) 毫不奇怪,在这种情况下,(13)式几乎是精确的,因为 $C^*(L/2)$ 几乎精确地是管子中浓度的平均值. 而 $[C^*(L/2)-C_0]/[L/2]$ 是对浓度梯度的极好的估计.

当 κ 变大时,(11) 式对 $2\kappa^{-2}$ 的解释失去了其定量的精确性,但 (13) 式仍是一种粗糙的近似. 如同我们现在将要示明的那样,为了理解所研究现象的基本方面,仍可利用 κ^2 的方程(10)的近似解释式(11).

鸟类的盐腺和鳄鱼的肾细管中的流动,有一个显著特征:即分泌浓度实际上似乎不受到往细管中去的主动输运速率改变的影响. DB 的数值计算表明,固定梯度系统能够产生这种特征. 用现在的术语,我们就说,除非 ν 是大值,O_s 与 ν 无关. 这怎么可能呢? (10)式给出了回答. 如果 $N_0\delta$ 减少,那末,典型的溶质浓度 $\bar{C}$ 减小,吸进管道的水少了,在把溶质扫出渠道的作用上,对流的重要性减小了. 但根据 (10) 式,$\bar{C}_0$ 的减小造成开端处浓度梯度减少,这就恢复了对流和扩散之间的平衡,从而把逸出渗透压克分子数保持在原来的值上. 看来仅当从主动输运区域流出的流体溶质浓度相当大时,这种浓度的改变才影响由对流和扩散而从渠道开端移走溶质的性质. 扰动级数中下一项的确定(练习 3) 给出了预期的并且最初为 DB 的数值解所示明的定性结果,即当 ν 为大值时,(9)式低估了逸出渗透压克分子数.

请注意,*在本质上,正是级数中的第一项给出了几乎全部的有趣的知识*. 这是经常发生的事.

在生理情况中,ν 的什么值标志着最低阶初级近似式 (9) 不适用呢? 为了得到关于这个值的一点概念,我们从图 8.5 观察到 $5\kappa^2/6=20$ 时点◐与 (9) 式相符得很好. 但 $5\kappa^2/6=2$ 的点则与

(9)相符极差．在前一情况下，$\nu=5$，而在后一情况，$\nu=50$．按照表8.2，甚至ν值为5也仍是罕见的．我们得到结论：除了特别例外的生理情形，可指望最低阶近似给出了固定梯度流动的一种恰当的描述．

很明显，按照定义(2.22)式，N_0在分子上，ν是主动输运重要性的一个无量纲量度．如果需要的话，可以把ν写成下式得到它的更为精确的解释：

$$\nu=\left[\frac{N_0 c\delta}{P_c\delta(C_2-C_0)C(1)}\right]\left[\frac{C(1)}{C_0}\right]\left[\frac{C_2-C_0}{C_0}\right], \qquad (14)$$

式中C_2是管道封闭端的典型浓度．(在分子和分母上引进同一因子使解释变得更容易些．)根据(14)式我们得到

$$\nu\approx\left[1+\frac{F^*_{\text{diff}}}{F^*_{\text{conv}}}\right]\left[\frac{C(1)}{C_0}\right]\left[\frac{C_2-C_0}{C_0}\right], \qquad (15)$$

式中F^*_{diff}和F^*_{conv}是在主动输运区域一端$x=1$处算出的．

制约O_s的三个参数中最后一个为$\lambda\equiv L/\delta$，这个参数显然是量度在管道封闭端主动输送地区的集中程度的．同时，λ并不进入简化公式(9)，而图8.6表明，即使在λ小到2时，(9)式的使用也只引起很小的改变．(如果输运溶质保持相同，当λ下降时，泵入率N_0必然下降，但对于主要感兴趣的参数范围，N_0的这种下降对O_s不产生影响．)这种O_s对λ的很弱的依赖关系使我们对模型产生了信心．这表明，只要主动输运是限制在靠近管道封闭端的"合理的范围"之内，那就会出现固定梯度流动的这些特征．为了给出有关λ影响的更多的观察，我们从练习3注意到，在高输运率影响变得明显之前，ν越大，λ必然越高．这与下列直观相符的：当主动输运地区仅占管道的很小一部分时，即使高的输运率也影响很小．

结束语

在本章结束时，让我们作一回顾：固定梯度渗透流动已用来

示明应用数学中的一些基本技巧，例如无量纲化、尺度化和扰动理论．更重要的是该问题已用作一个范例，来说明如何可用理论使科学的理解前进一步．

如同我们已看到的那样，固定梯度问题最初是为了对一个生理学之谜作出更准确回答才提出来的．DB的数值计算表明，下列启示是合理的：对于所涉及各种参数的合理的数值，证明渠道远端处泵入的活性溶质有能力完成要它做的工作的．数值计算也帮助确定了各项的典型值，这些在现在的分析处理中是很需要的．分析研究得到了一个简单公式(9)，它总结了固定梯度模型的作用．

给定一组特定的参数．宁肯参考这个公式得到某个数值而不要靠用一些图表来得到"解答"．上述分析的一个更为重要的结果是对流动过程的理解，因为模型无疑是过分简化了，因而精确的估算是不可信的．这种理解归于(i)从八个有量纲参数中孤立出可作为流动的基本参数；(ii)对 κ 的物理解释；(iii)预测出在生理系统中，可指望逸出渗透压克分子数 O_r^* 与溶质泵入率 N_0 无关．(iv)对为什么出现这种预测作出分析．为了看一下理论分析的长处，把现在你对固定梯度流动的了解与完全从下列推理开始的单纯而未经证实的观念作一比较："分泌组织可能是靠深埋在各处的折叠中的主动泵工作的"[1]．

练　　习

1. 推导(1)、(2)和(3)式．

2. 在合理的边界条件下求解(4)式，从而得到(5)和(6)式．

3. (a) 利用(5)和(6)式证明 $v^{(1)}$ 满足下列方程

---

1) 已有人作过和分析过固定梯度模型的改进和推广工作．(例如)参阅 S. Weinbaum 和 J. R. Goldgraben, "On the Movement of Water and Solute in the Extracellular Channels With Filtration, Osmosis, and Active Transport," *J. Fluid Mech.* **53**, 481—512 (1972). Weinbaum 和 Goldgraben 强调 $C^*(L)$ 可以按照出口处的条件而取 C_0 以外的值．他们从考虑解的单参数族解得到了有趣的结论，其中，$C^*(L)=\tilde{C}$，$\tilde{C}$ 任意．他们的论文中另一个重要部分是论述外加压力梯度的影响的．

$$0 < x < 1: \quad \left(\frac{\lambda}{\kappa}\right)^2 v^{(1)''} - v^{(1)} = \frac{1}{2} K_1^2 \kappa \sinh 2\kappa\lambda^{-1}x$$

$$- K_1\lambda \sinh \kappa\lambda^{-1}x - K_1\kappa x \cosh \kappa\lambda^{-1}x + \lambda x.$$

$$1 < x \leqslant 1: \quad \left(\frac{\lambda}{\kappa}\right)^2 v^{(1)''} - v^{(1)} = -\frac{1}{2} K_2^2 \sinh 2\kappa(1 - \lambda^{-1}x)$$

$$+ K_2\kappa \sinh \kappa(1 - \lambda^{-1}x).$$

(b) 试证明 $v^{(1)}$ 的解答为

$$0 \leqslant x \leqslant 1: \quad v^{(1)} = A_1 \sinh \kappa\lambda^{-1}x + B_1 \cosh \kappa\lambda^{-1}x$$

$$+ \frac{1}{6} K_1^2 \kappa \sinh 2\kappa\lambda^{-1}x - \frac{1}{4} K_1\kappa x \cosh \kappa\lambda^{-1}x$$

$$- \frac{1}{4} K_1\kappa^2\lambda^{-1} \sinh \kappa\lambda^{-1}x - \lambda x, \quad c^{(2)} = v^{(1)'};$$

$$1 \leqslant x \leqslant \lambda: \quad v^{(1)} = A_2 \sinh \kappa(1 - \lambda^{-1}x) + B_2 \sinh \kappa(1 - \lambda^{-1}x)$$

$$- \frac{1}{2} K_2\kappa^2\lambda^{-1}x \cosh \kappa(1 - \lambda^{-1}x)$$

$$- \frac{1}{6} K_2^2 \kappa \sinh 2\kappa(1 - \lambda^{-1}x), \quad C^{(2)} = v^{(1)'},$$

式中四个常数 A_1, B_1, A_2 和 B_2 要用条件 $v^{(1)}(0) = 0$, $v^{(1)'}(\lambda) = 0$ 以及 $v^{(1)}$ 和 $v^{(1)'}$ 在 $x = 1$ 处连续的条件来确定.

(c) 与量级为 λ 的项作比较，忽略量级为 1 的项，从而简化本来庞大的表达式. 得到

$$v^{(1)}(\lambda) \approx \frac{-5\sinh 2\kappa - 4\sinh \kappa - 6\kappa \cosh^2 \kappa}{12\lambda \cosh^3 \kappa}.$$

(d) 以 κ 的幂级数展开上式中的双曲函数并保留第一个非零项，从而作进一步的简化. 得到

$$v^{(1)}(\lambda) \approx -\frac{7\kappa^7}{120\lambda \cosh^3 \kappa}.$$

于是，可以看到，修正量是使无量纲出口速度 $v(\lambda)$ 减少(至少在 λ^{-1} 和 κ 并不是很小时是如此)，因而使 O_s 增加.

第九章　奇异扰动理论引论

奇异扰动理论是在研究物理问题时产生的，这些物理问题最重要的是流体力学中的边界层现象．边界层现象的经典例子是流体流过一个物体，例如空气经过飞机机翼时出现的情况．正如要在第II卷第三章中谨慎地加以讨论的那样，恰当地加以尺度化后，这一情况下的方程只有在与极小的参数相乘的项中才包含粘性的影响．可是计算表明，如果忽略这些项，空气对机翼不再有阻力．这叫做达朗伯佯谬（参看15.4节）．这个佯谬在本世纪初期就解决了，那时，L.普朗特从实验和理论上证明，不论流体的粘性或"粘附性"多么小，在邻近机翼的层中粘性效应仍是重要的．普朗特的发现不仅在空气动力学的理解上是一个突破，而且还揭开了用奇异扰动理论去研究微小原因(例如流体的小粘性)如何引起重大后果（可观的阻力)这一课题的章页．

奇异扰动理论的专业人员可能会发现要解决的重要问题似乎是很少的，但情况却完全不是如此．这类问题是十分丰富的，这一点至少部分地可用下列事实来说明：奇异扰动技巧似乎适用于研究在"恶性"奇点附近解的性质．"不畏艰难"，在"恶性"奇点附近去考察函数[1]，这正是得到定性知识的最好途径，而且阐明这种性质往往也正是理论家的目标所在[2]．正是在这一问题上，人们对一位杰出的应用数学家曾有过这样一种观点的评论，"他所能解决的只是奇异扰动问题，不过，他当然也能把所有的问题都化成奇异扰动问题！"

本章是奇异扰动理论的引论，从讨论最高阶项与小参数相乘的代数方程出发，首先用奇异扰动理论的初等概念去寻找某些根

1）用复变量理论的语言来讲，恶性奇点就是本性奇点．

2）参阅 L. A. Segel "The Importance of Asymptotic Analysis in Applied Mathematics", *Amer. Math. Monthly* **73**, 7—14 (1966).

的性质，而这些根正是正则扰动理论所"遗漏掉的"．然后用逐次逼近法去寻找这些根的更好的近似，或者提出适当的级数假定．在这以后，我们反过来全面地讨论一个特殊的常微分方程，这个方程是用作奇异扰动现象的模型方程的．利用这个方程来示明把奇异扰动理论应用于简单的边界问题时所需要的大量的分析工作．

这里所用的"模型"一词，其意义多少与我们在此以前所用的有点不同．在以前大部分时间里，我们指的是**描述模型**，它是用来模仿一定的自然现象的．而现在我们说的则是**理性上的模型**，"它是构造出来阐明某个理论的棘手和困难之处，并不是很容易（或者甚至可以希望）在这两种概念之间清楚地划出一条分界线的，但是，两者的极端情况之间的差别却是清晰可辨的"．[1]

我们将要研究的模型方程是一个线性的二阶常微分方程，其最高阶导数与小参数相乘．我们仔细地考察这个方程及相关的边界条件的精确解．这样就能使我们提出适用于一大类问题的奇异扰动方法的主要方向，这一类微分方程其最高阶导数都是与一个小参数相乘的．我们碰到的奇扰问题的种类可能是很多的，以致排除了提出一种综合方法的希望．当然，这里一种也没提，事实上，是一种也没有的．相反，我们强调了"奇异扰动方法的精神"，以希望读者受到鼓励，从而进一步去研究这种既令人神往，又很有价值的课题．

第十章为读者提供了进一步学习的机会，在这一章中，我们要用奇异扰动理论去分析酶的催化作用．然后在 11.2 节中，我们要把强有力的"多重尺度"方法用到现在已熟知的摆问题的奇异扰动计算上去．所有这些示例都是与遵循常微分方程组的问题有关的．在第 II 卷的第三章里我们要讨论奇异扰动技巧在高雷诺数粘性流动中的应用．这就是边界层问题，如上所述，这个问题是最早促进奇异扰动方法的发展的．

1）参阅 M. Kac, "Some Mathematical Models in Science" *Science* 166, 695—99 (1969).

9.1 高次方程的根

一个简单问题

二次方程

$$\varepsilon m^2 + 2m + 1 = 0, \qquad 式中\ 0 < \varepsilon \ll 1 \tag{1}$$

是一个非常简单的问题，能使我们对奇异扰动理论有深入的了解．为了得到近似解，我们略去看上去很小的项 εm^2，并得到

$$2m + 1 \approx 0, \quad m \approx -\frac{1}{2}.$$

我们可以用第七章中讨论的三个方法中的任何一个来改进这个"天真的"近似(练习1)．例如，如果我们取一个级数解

$$m = -\frac{1}{2} + \varepsilon m_1 + \varepsilon^2 m_2 + \cdots, \tag{2}$$

那末我们就得到

$$m = -\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\varepsilon - \frac{1}{16}\varepsilon^2 + \cdots. \tag{3}$$

这样我便得到二次式(1)的一个解的任意精度的近似．但是按照代数的基本定理，这个方程有两个这样的解．于是，这就是一个其中简单的方法并未得到完全满意的解的扰动问题．这正是一种用奇异扰动方法有好处的问题．

(1)式的奇异性质是与整个方程是二次的(因此有两个根)这一事实相联系的，而近似方程 $2m + 1 = 0$ 却只有一个根．相比之下，方程 $m^2 + \varepsilon m - 4 = 0$ (在练习 7.2.9 中处理)是二次的，而近似方程 $m^2 - 4 = 0$ 也是二次的；这是正则扰动问题的一个例子．**天真地近似后的问题与原问题具有不同的定性特征，这正是奇异扰动问题的一个特性．**

在寻找二次式的第二个根 $\bar{m}$ 的近似时，我们可以从尚未证明忽略项 $\varepsilon \bar{m}^2$ 是合理的这一点着手．我们已经找到了从忽略这一项得到的一阶方程的根．

如果 $\bar{m}$ 是 $O(1)$，即如果 $\bar{m}$ 在 $\varepsilon \to 0$ 时趋向于一个(有限的)

极限，那末对于小 ε，忽略 $\varepsilon\bar{m}^2$ 项的合理性大概是会得到证明的；因为这一项比项 1 小．推测起来，我们大概正在研究一个在 $\varepsilon\to 0$ 时变得非常大的根(或者可能讨论一个 $\varepsilon\to 0$ 时不趋向于某个极限的根)．

当 $\varepsilon\to 0$ 时，项 $\varepsilon\bar{m}^2$、$2\bar{m}$ 和 1 中每一项都具有某个数值．如果所有这三项都具有相同的量级，那末求 $\bar{m}$ 的任务就不会被 ε 是小量的事实所减轻：(1) 式中的三项全都是重要的，我们就要回到原始方程．也可能有两项具有相同的量级，而第三项则比较小．我们已同意必须保留 $\varepsilon\bar{m}^2$ 项，因而可能性是：εm^2 与 1 具有相同的量级，而 $2\bar{m}$ 比较小；$\varepsilon\bar{m}^2$ 与 $2\bar{m}^2$ 具有相同的量级，而 1 比较小．如果得到第一种可能性，那末从 (1) 式我们看到 $\varepsilon\bar{m}^2+1\approx 0$ 或 $\bar{m}\approx i\varepsilon^{-1/2}$．然而在这种情况下 $2\bar{m}\approx 2i\varepsilon^{-1/2}$，而比较小的项实际上具有比较大的值 ($|2\bar{m}|\gg 1$)．第二种可能性是 $\varepsilon\bar{m}^2+2\bar{m}\approx 0$．如果我们暂时撇开两种选择中的一种 $\bar{m}\approx 0$，我们就得到 $\bar{m}\approx 2\varepsilon^{-1}$．事实上，这里略去的项相对而言远小于保留项：

$$1\ll|\varepsilon\bar{m}^2|\approx 4\varepsilon^{-1},\quad 1\ll|2\bar{m}|\approx 4\varepsilon^{-1}.$$

因此，看来我们的近似是自洽的．上面撇开的另一种选择是不该顾及的，因为如果 $\bar{m}\approx 0$，那末，忽略项并不远小于保留项，这是一种自相矛盾．

为了改进对 $\bar{m}$ 所作的初次估算，让我们使用逐次逼近的方法．如图 7.2 节中所讨论的那样，想法是把方程写成 $f(m)=g(m)$ 的形式，其中初级近似 $m^{(0)}$ 是由 $f(m^{(0)})=0$ 的解给出的．而高阶近似则由 $f(m^{(i)})=g(m^{(i-1)})$，$i=1,2,\cdots$给出．

似乎做到这一点的方法在于选择 $f(m)=\varepsilon m^2+2m$，但是，此时令 $f=0$ 便既能得到一个真正的近似 $m^{(0)}\approx -2\varepsilon^{-1}$，也得到一个虚假的近似 $m^{(0)}\approx 0$．为了避开这一点，我们用 $\bar{m}$ 除式(1)，因而得到对 $\bar{m}$ 的逐次逼近 $m^{(i)}$ 的方案为 $m^{(0)}=-2\varepsilon^{-1}$ 和

$$\varepsilon m^{(i)}+2=-\frac{1}{m^{(i-1)}}$$

或

$$m^{(i)} = -\frac{2}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon m^{(i-1)}}, \quad i = 1, 2, 3, \cdots \tag{4}$$

由此得到

$$m^{(1)} = -\frac{2}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon(-2\varepsilon^{-1})} = -\frac{2}{\varepsilon} + \frac{1}{2}$$

和

$$m^{(2)} = -\frac{2}{\varepsilon} + \frac{1}{2 - \frac{1}{2}\varepsilon}.$$

注意，如果我们以 ε 的幂级数展开上式的第二项，则得到

$$\bar{m} \approx m^{(2)} = -2\varepsilon^{-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\varepsilon + \cdots.$$

对(4)式的检查表明，可以得到关于 $m^{(3)}$，$m^{(4)}$ 等的类似级数.

这里同其他问题中一样，一旦弄清楚了解的形式可能最好还是放弃逐次近似方法．我们已从上面的计算中看到，根 $\bar{m}$ 可以写成如下形式

$$\bar{m} = -2\varepsilon^{-1} + m_0 + m_1\varepsilon + m_2\varepsilon^2 + \cdots. \tag{5}$$

从假设(5)式出发，用级数方法可以用比逐次逼近法更少的劳动来得到系数 m_i [练习 2(a)]．另外一种方法是从 εm 可以展为 ε 的幂级数这个假设作出发点，并采用参数微分法来得到系数 m_i [练习 2(b)].

让我们来作一个概述．从 (3) 和 (5) 式，我们看到，二次方程 $\varepsilon m^2 + 2m + 1 = 0$ 具有根

$$m = -\frac{1}{2} + \cdots, \quad \bar{m} = -2\varepsilon^{-1} + \cdots. \tag{6}$$

用正则扰动理论的方法，可以得到第一个根的任意精度的表达式，这是因为这个根具有幂级数展开式．第二个根在 $\varepsilon \to 0$ 时变为无穷大．在原方程中寻找出互相匹配而且数值比较大的两项，让它们之和等于零，就可以确定出上述近似表达式中的首项．鉴于原方程中首项的系数是小参数这一“天真”的原因，这两项中必有一

项为 εm^2，把它加以忽略便只能得到对量级为 $O(1)$ 的根 $m=-\frac{1}{2}+\cdots$的近似.

用二次方程的公式很容易求解我们的第一个例子(1)式. 为了验证上面的计算结果,我们可以把两个根的表达式加以展开(练习3). 但是,已经很明显，刚才所示明的方法可用于最高次幂项含有小参数的任何代数方程.

一个比较复杂的问题

考虑四次方程

$$\varepsilon x^4+\varepsilon x^3-x^2+2x-1=0,\quad 0<\varepsilon\ll 1. \tag{7}$$

忽略项 εx^4 和 εx^3，便可得到 $\varepsilon\to 0$ 时任何趋近于非零值为极限的根. 这就给出具有重根 1 的二次方程 $x^2-2x+1=0$.

例 1 (7) 式有两个近似等于 1 的根,试求它们的高阶近似表达式.

部分解 我们假定

$$x=1+x_1\varepsilon+O(\varepsilon^2),$$

代入(7)式,我们得到

$$\varepsilon[2+O(\varepsilon)]-x_1^2\varepsilon^2+O(\varepsilon^3)=0.$$

收集 $O(\varepsilon)$ 的项,我们得到 $2=0$,这是自相矛盾的. 我们所取的解的形式必然是不正确的. 为了得到正确的形式，我们提出一个逐步逼近的方案. 把(7)式的主要部分放在左边,我们考虑

$$(x-1)^2=\varepsilon x^4+\varepsilon x^3.$$

这就得到两个根中一个根的计算方案

$$x_0=1;\quad x_n=1+\sqrt{\varepsilon x_{n-1}^4+\varepsilon x_{n-1}^3},\quad n=1,2,\cdots,$$

对于另一个根则有

$$x_0=1;\quad x_n=1-\sqrt{\varepsilon x_{n-1}^4+\varepsilon x_{n-1}^3},\quad n=1,2,\cdots.$$

两三次叠代表明，这些根可以以 $\varepsilon^{1/2}$ 的幂级数展开. 让我们引进 $a=\varepsilon^{1/2}$，因而(7)式变成

$$a^2x^4+a^2x^3-(x-1)^2=0,$$

这样问题便归结为直接确定展开式

$$x = 1 + x_1 a + x_2 a^2 + \cdots$$

中的系数．我们要求读者完成这一计算［练习 4(a)］．

为了得到其余两个根的一级近似，我们仍旧采用经常有用的**平衡方法**，这个方法假定有两项的数量级相同，而其余的项可以忽略．我们已考虑过 (7) 式中头两项可以忽略的情况．因此留下作相互平衡的项有下列几种选择方案：(a) $\varepsilon x^4 \approx -\varepsilon x^3$; (b) $\varepsilon x^4 \approx x^2$; (c) $\varepsilon x^4 \approx -2x$; (d) $\varepsilon x^4 \approx 1$; (e) $\varepsilon x^3 \approx x^2$; (f) $\varepsilon x^3 \approx -2x$; (g) $\varepsilon x^3 \approx 1$，而其余的项可以忽略．

与上面一样，由选择方案 (a) 得到的零根可加以剔除．而剩下的根 $x \approx -1$ 也是自相矛盾的，因为"大"项 εx^4 和 εx^3 都是 $O(\varepsilon)$．

选择方案 (b) 给出非零根

$$p^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \qquad n^{(0)} = \frac{-1}{\sqrt{\varepsilon}}. \tag{8}$$

［在式 (8) 中我们用 p 和 n 表示正根和负根．］利用对 x 的近似式 (8)，我们看到 εx^4 和 x^2 都是 $O(\varepsilon^{-1})$，而剩下项的量级为

$$\varepsilon x^3 = O(\varepsilon^{-1/2}), \quad 2x = O(\varepsilon^{-1/2}), 1 = O(1). \tag{9}$$

这些项确实比较小，因而(8)式给出了我们正研究的两个根的一级近似．如所指望的那样，可以证明，选择方案(c)—(g)．都是自相矛盾的［练习 4(b)］．

为了用逐次逼近法求得 $O(\varepsilon^{-1/2})$ 根的更为精确的表达式，我们模仿以前的方法，用 x^2 去除(7)式的两边，并把它改写为

$$\varepsilon x^2 - 1 = x^{-2} - 2x^{-1} - \varepsilon x,$$

式中，左端是二项式，其根为零级近似式(8)．因而叠代满足

$$\varepsilon [x^{(0)}]^2 - 1 = 0, \quad \varepsilon [x^{(k)}]^2 - 1 = [x^{(k-1)}]^{-2}$$
$$- 2[x^{(k-1)}]^{-1} - \varepsilon x^{(k-1)}; \quad k = 1, 2, \cdots.$$

求解 $x^{(k)}$，我们得到最终的叠代方案：

$$p^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},$$

$$p^{(k)} = \sqrt{\varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-1}[x^{(k-1)}]^{-2} - 2\varepsilon^{-1}[x^{(k-1)}]^{-1} - x^{(k-1)}}, \quad (10a)$$

$$n^{(0)} = \frac{-1}{\sqrt{\varepsilon}},$$

$$n^{(k)} = -\sqrt{\varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-1}[x^{(k-1)}]^{-2} - 2\varepsilon^{-1}[x^{(k-1)}]^{-1} - x^{(k-1)}}, \quad (10b)$$

这里 $p^{(k)}$ 表示正根 p 的 k 级近似，其量级为 $\varepsilon^{-1/2}$，$n^{(k)}$ 是具有这个量级的负根 n 的 k 级近似. 请注意，p 和 n 这两个根各自都与一个唯一确定的叠代次序联系在一起. 初学者常常会犯错误，他们在相应于(10)式的整个公式中放上一个±号. 这就导致了不可能正确的"近似"的迅速扩大，因为总根数当然必须等于方程的阶数. 对于每一个根，必然有一个在每一步都得到唯一解答的叠代方案.

由(10)式我们得到

$$p^{(1)} = \sqrt{\varepsilon^{-1} - 3\varepsilon^{-1/2} + 1}, \quad n^{(1)} = -\sqrt{\varepsilon^{-1} + 3\varepsilon^{-1/2} + 1}. \quad (11)$$

我们可以把这两个表达式围绕 $\varepsilon = 0$ 展开，如同在逐次逼近方案中常见到的那样，只有修正项中的头一项才是可靠的. 于是我们最终得到

$$p^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{3}{2} + \cdots, \qquad n^{(1)} = \frac{-1}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{3}{2} + \cdots. \quad (12)$$

下一步近似的确定，进一步确认了(11)和(12)式已经示明的结果：p 和 n 具有 $\sqrt{\varepsilon}$ 的幂次展开式.

读者应该补充上例的细节，并作一些练习，以利用代数方程中存在小参数的有利条件. 我们的讨论示明了仅有的比较困难的特性：(i) 需要小心多值根；(ii)根的级数展开式中可能出现分数幂次. 应用逐次逼近法可以预测分数幂的出现.

尺度化的应用

熟悉 6.3 节尺度化概念的人，会发现在这里使用这个概念是很值得的. 这样式(1)的两个根中就只有一个根是 $O(1)$，而且也只有对这个根来说，才能指望 εm^2 项对解答影响很小. 另一个根是 $O(\varepsilon^{-1})$，因而变量变换 $m = \varepsilon^{-1}\hat{m}$ 对于得到正确尺度化了的

$O(1)$ 的变量$\hat{m}$是必要．利用 $\hat{m}$，式(1)就变成

$$\varepsilon(\varepsilon^{-1}\hat{m})^2+2\varepsilon^{-1}\hat{m}+1=0 \text{ 或 } \hat{m}^2+2\hat{m}+\varepsilon=0,$$

该式得到近似 $\hat{m}=-2$ 与上面的结果相符．在这个例子和本节的其他例子中，请注意，*没有单一的尺度可以用来表征问题的整个解的特性*．我们将发现这是奇异扰动问题的一个特殊的性质．

练　　习

1. (a) 假定式(1)具有一个形为(2)式的解，由此证明式(3)．

(b) 用参数微商法得到(3)式．

(c) 用逐次逼近法得到(3)式．

2. (a) 假定(5)式，试求(1)式的第二个根 $\bar{m}$ 的级数展开．至少求出 m_0 和 m_1．

†(b) 用参数微商法证明上述计算．

†3. 用二次公式求解(1)式；用级数展开两个根的表达式；与练习 1 和 2 的结果加以比较．

4. (a) 如文中所示，对于一级近似，(7) 式有一对重根．通过完成例 1，求出这两个根的三项近似表达式．特别是证明这两个根是相等的．

(b) 证明在讨论式 (7) 时提出的选择方案 (c)—(g) 是不相容的．

(c) 对于小 ε，画出(7)式的四个根与 ε 的函数关系．

(d) 证明 (12) 式，并利用逐次逼近法再多求出级数中的一项．

(e) 利用级数求出 (d) 的结果．

†(f) 利用**修正**的参数微分法得到 (d) 的结果．

5. ε 为小正数，试求下列方程所有根的一级近似．

(a) $\varepsilon x^4-x^2+3x-2=0$；

(b) $\varepsilon x^5+x^3-1=0$；

(c) $x+\varepsilon x^3=2$；

(d) $\varepsilon x^3+\varepsilon x^2+x-1=0$．

6. 试求练习 4 中所估算的根的二级近似．

7. 详细讨论

$$\varepsilon p_n(x) + p_m(x) = 0, \quad n > m.$$

的根的特性．式中 p_i 表示 i 阶多项式．

8. 本问题概述了用来估算（1）式的根 $\bar{m}$ 的一个比较演译的方法．令 $\bar{m}(\varepsilon) = E(\varepsilon) + R(\varepsilon)$．因为我们希望余项 R 比估计值小，因而要求 $\lim_{\varepsilon\to 0}(R/E) = 0$．由(1)式得到

$$\varepsilon(E + R)^2 + 2(E + R) + 1 = 0. \tag{13}$$

†(a) 假定 $|\varepsilon E| \to \infty$，得出一个矛盾．

†(b) 假定 $|\varepsilon E| \to 0$，得出一个矛盾．

(c) 按照 (a) 和 (b)，如果 εE 具有极限，那末它必然趋向于一个非零常数．确定这个常数．

9.2 常微分方程的边值问题

在本节中，我们将研究奇异扰动方法的应用，以得到最高阶导数项含有小参数的二阶常微分方程的近似解．大部分讨论是与一个简单的"模型"问题有关．在上节中得到的一些结果，在这里证明是有用的．

对一个模型问题的精确解的研究

考虑 $y(x)$ 的下列方程：

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0; \quad 0 < x < 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \tag{1}$$

及其边界条件

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1. \tag{2a, b}$$

注意 ε 是正的．

因为 ε 非常小，我们天真地假定(1)式中的第一项可以忽略．这就得到方程

$$2\frac{dy}{dx} + y = 0, \tag{3}$$

及其通解

$$y = K\exp\left(-\frac{1}{2}x\right),$$

式中，K 是一个任意常数. 不过，这样就立即出现一种进退两难的困境，因为如果 K 由 (2a) 式确定，那末就得到"近似"

$$y \equiv 0, \tag{4}$$

而如果 K 由 (2b) 式来确定，那末"近似"就是

$$y = \exp\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right). \tag{5}$$

这两个近似中没有一个能同时满足两个边界条件，因此，当 $\varepsilon \to 0$ 时，对于闭区间 $[0,1]$ 上的所有 x，两个近似都不能趋向真解. 这两个近似中是否有一个是好的呢？如果是这样的话，那末在区间的哪一部分是好的呢？这个解在区间的其余部分情况又是怎样的呢？能否得到一个在整个区间上都很好的近似呢？

为了回答这些问题，我们将精确地求解(1)和(2)式，然后在 ε 为小正数的条件下对这个解作近似，尔后我们假装并不知道精确解，再去重新考虑上述问题，而在心中则记住这个解的定性特征. 我们将能够发展一种近似的方法，而这种方法对一大类不可能得到精确解的问题也适用.

在我们实行这一计划之前，让我们注意本问题具有的"奇异"性质，它与上面讨论过的代数方程所具有的性质相类似. 对于二次多项式方程(1.1)，其近似方程是一次的，只有一个根. 这里近似方程是一阶的，因而(2)式的两个边界条件不能都满足. 对于所有的根来说，方程(1.1)中的项 εm^2 不能被忽略. 这里项 $\varepsilon d^2y/dx^2$ 至少对 $(0, 1)$ 的一些部分必然是重要的. 在这些部分中，d^2y/dx^2 的值必然是很大的；否则对于足够小的 ε，$\varepsilon d^2y/dx^2$ 确实就可以忽略.

回到对(1)式的分析，我们首先观察到：因为这个方程是线性的，并且具有常系数，故它具有通解

$$y = c_1\exp(m_1x) + c_2\exp(m_2x), \tag{6}$$

式中 m_1 和 m_2 是

$$\varepsilon m^2 + 2m + 1 = 0 \tag{7}$$

的两个根．当把边界条件(2)式加上去时，我们便得到最终的解

$$y = \frac{\exp(m_1 x) - \exp(m_2 x)}{\exp(m_1) - \exp(m_2)}, \tag{8}$$

方程(7)与方程(1.1)相同，因此当 ε 很小时，我们可以利用以前的分析，这一分析已在(1.6)式中作了综述：m_1 和 m_2 可用下式

$$m_1 = -\frac{1}{2}, \quad m_2 = -\frac{2}{\varepsilon} \tag{9}$$

来近似．利用(9)式，因为 ε 是正的，我们看到，与 $\exp(m_1)$ 相比，在式 (8) 的分母上可把 $\exp(m_2)$ 加以忽略．因此我们把问题的近似解写作

$$y(x, \varepsilon) \approx e^{1/2}[e^{-x/2} - e^{-2x/\varepsilon}], \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \tag{10}$$

近似解 (10) 的定性特征是什么呢？如同边界条件 (2a) 式所要求的那样，这个近似在 $x = 0$ 处的值为零，这是因为方括号中的第二项与第一项具有完全相同的数值和相反符号的缘故．不过当 x 增加时，第二项迅速减少．当 $x = \varepsilon$ 时，这一项仅为 e^{-2}，大约为它在 $x = 0$ 处值的七分之一．当 $x = 2\varepsilon$ 时，这一项的值小于同一值的百分之二．因此，除了当 x 在 $\varepsilon = 0$ 处的几倍 ε 之内，第二项是可以忽略的，因而(10)式可以进一步加以近似得到

$$y = e^{1/2}e^{-x/2} = e^{1/2(1-x)}. \tag{11}$$

于是可以画出(10)式的曲线，如图 9.1 中的实线所示．我们看到，在 $x = 0$ 附近厚度为 $O(\varepsilon)$ 的一层中，解迅速变化着．在边界附近解迅速变化的区域称为**边界层**．

注意，(11)与(5)式相同．因而，对于 ε 为正小量时，微分方程(1)及边界条件(2)的解从 $x = 0$ 处取给定的零值迅速上升，直到与(5)式合并为止，而(5)式则是在 $x = 1$ 处满足边界条件(2)的天真方程(3)的解，这个“天真”解在图 9.1 中用虚线画出．

考虑一下 ε 为负小量的情况是很有教益的．(7) 式的近似根仍为(9)式，但现在却正是精确解 (8) 式分母的第一项可以忽略，我们有

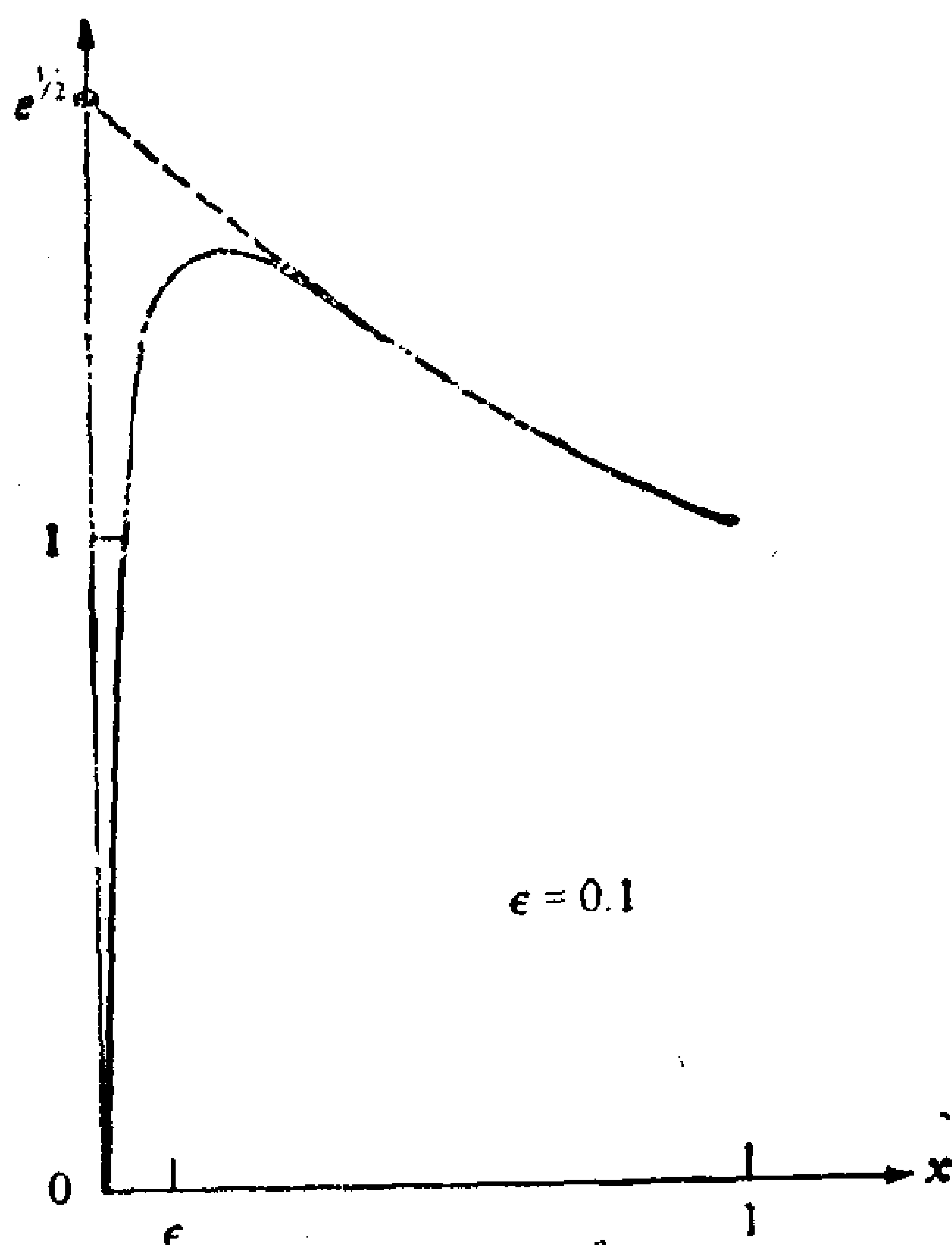


图 9.1 解(10)的曲线. 当 ε 为正小量时，(10)式是(1)和(2)式的解的一个很好的近似(实线). "外部近似"[(11)、(14) 或(5)式]是用虚线画出的.

$$y(x,\varepsilon) \approx e^{-2/\varepsilon}[e^{-x/2} - e^{-2x/\varepsilon}], \quad |\varepsilon| \ll 1, \quad \varepsilon < 0. \tag{12}$$

此外，这个表达式的第一项对 (0, 1) 中所有 x 都是按指数律下降的，因此，我们可以写出下式而不失其精度，

$$y(x,\varepsilon) \approx e^{(2/\varepsilon)(1-x)}, \quad |\varepsilon| \ll 1, \varepsilon < 0. \tag{13}$$

除了在 $x = 1$ 处的几倍 ε 大小的边界层内，(13) 式中所保留的唯一的项实际上为零. （参看图 9.2）因此在 ε 为负小量时，(1) 和 (2)式的解可以用满足边界条件 (2a) 的天真方程的(恒等于零的)解来很好地近似. 边界层仍然具有 $O(\varepsilon)$ 的厚度，但是与 ε 为正小量的情况相反，现在边界层位于 $x = 1$ 附近.

如果这个例子是典型的二阶边值问题 (而且也的确是)，那末除了在一个边界附近外，看起来可用适当的"天真"方程来给出完整方程解的一个很好的近似. 在上述这个边界附近，解迅速变化，与天真方程所不能满足的边界条件相一致. 应该把哪一个边界条件应用于天真方程以及剩下来还有什么要用边界层来使之满足的

呢？这两者都依赖于各项的相对符号．（并非仅是 ε 的符号决定这一点，因为如有必要的话，方程可用（—1）相乘，以使小参数变为正的．）如若我们设想边界层既可靠近 $x=0$，又可靠近 $x=1$，那末其位置大概可以相当有效地用试凑法来确定．

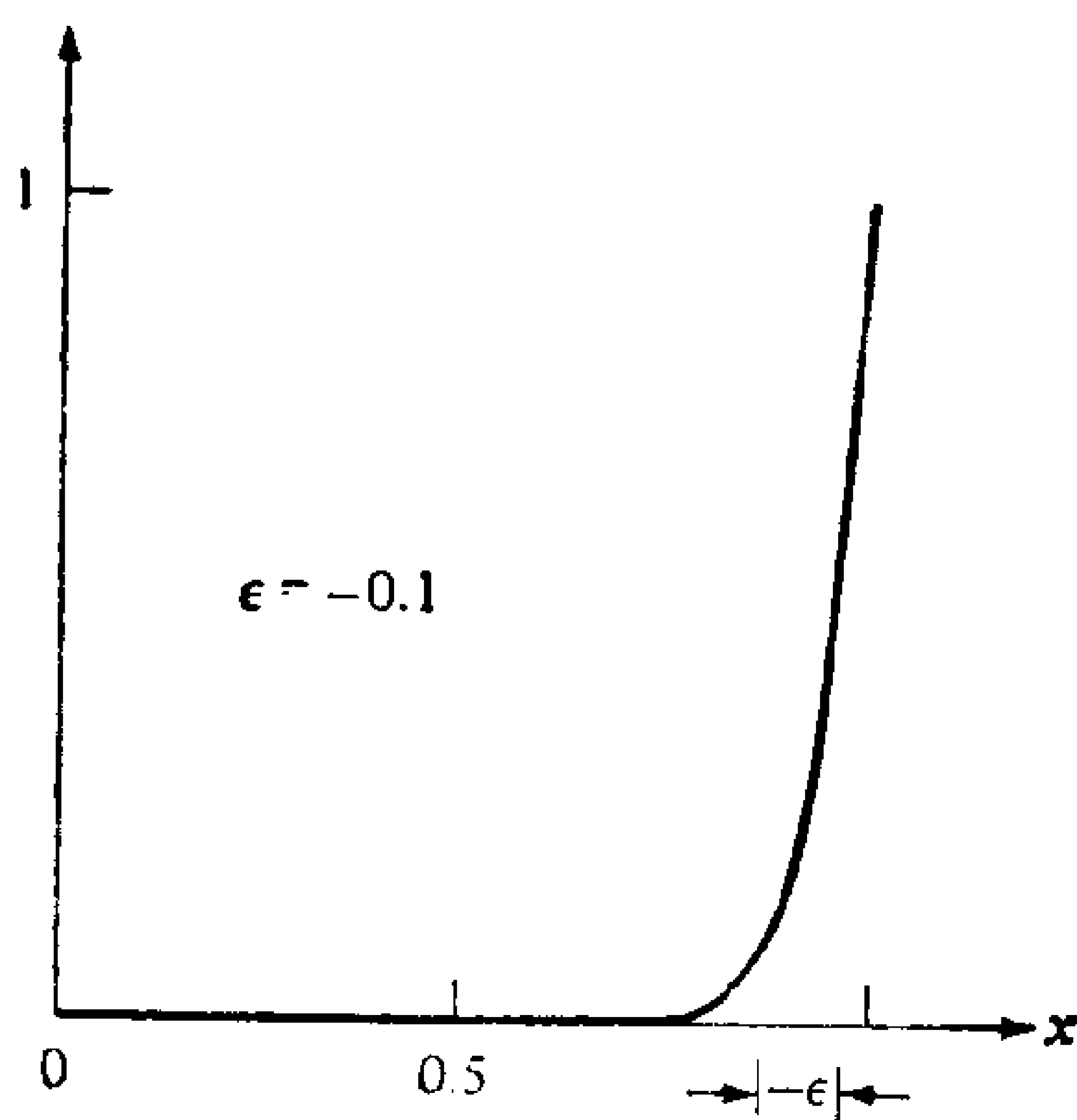


图 9.2 当 ε 为负小量时，(1) 和(2)式的解．

为了使读者不接受错误的观念，我们必须对他作如下的告诫：虽然上一段的推广适用于一大类重要问题，但它们并不适用于（例如）最高阶导数项含有小参数的所有二阶线性常微分方程的边值问题．现在保持谨慎而乐观的情绪则是恰当的．

更加小心地考察一下近似方程(3)的解和完整问题(1)的解之间的关系是有益的．因为 (3) 式和恰当的边界条件下的解给出了在边界层外成立的一种近似．人们习惯于把**外部**这个词与这种近似联系在一起．直到另作规定之前，我们将考虑 $\varepsilon>0$ 的情况，因而恰当的外部近似将是近似式 (11)． 我们用 O 代表外部，并把(11)式写作

$$y_0(x)\equiv\exp\left[\frac{1}{2}(1-x)\right]. \qquad (14)$$

我们知道，除了在 $x=0$ 附近外，$y_0(x)$ 是对精确解 $y(x,\varepsilon)$ 的一个好的近似．事实上，不难证明[练习 1a]

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} y(x, \varepsilon) = y_0(x) \quad \text{对于}(0,1]\text{内的} x^{1)}. \tag{15}$$

对于 $a \leqslant x \leqslant 1$，$a$ 为正数，这个极限是一致的. 这就是说，给定任何 $E > 0$，存在着一个依赖于 E、但并不依赖于 x 的正数 D，对于所有 $[a, 1]$ 中的 x，只要 $0 < \varepsilon < D$，就有 $|y(x, \varepsilon) - y_0(x)| < E$.

方程(15)就是本节所涉及的多变量函数的几个极限中的第一个极限. 凡是我们对上述变量中的一个取极限时，总是不言而喻地理解为其余的变量在极限过程中是保持不变的. 因此在(15)式中，y 对于 x 和 ε 的依赖是明确地表示出来的. 在(15)式这个极限中，ε 向零减小时，认为 x 是固定的.

回到我们对 $y_0(x)$ 的讨论，我们注意到利用(10)和(11)式有[2]

$$\lim_{x \downarrow 0} [\lim_{\varepsilon \downarrow 0} y(x, \varepsilon)] = y_0(0) = e^{1/2}, \tag{16}$$

但是

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} [\lim_{x \downarrow 0} y(x, \varepsilon)] = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} 0 = 0, \tag{17}$$

所以运算 $\lim_{\varepsilon \downarrow 0}$ 和 $\lim_{x \downarrow 0}$ 不能交换. 倘若对于某个正 b，(15)式在 $(0, b)$ 上的极限是一致的，那末这样一种交换便是允许的[3]. 因此，$y(x, \varepsilon)$ 在这样一个区间上并不一致地趋向于 $y_0(x)$，这也可以直接推导出来.

总而言之，外部解在 $x = 0$ 处并不满足边界条件. 然而，$y_0(x)$ 在 $(0, 1]$ 中是 $y(x, \varepsilon)$ 在 $\varepsilon \downarrow 0$ 时的极限，但这个极限不是一致的. 我们说近似 $y_0(x)$ 在 $(0, 1]$ 中**不是一致有效的**.

无论固定的 x 怎样接近于原点，在 $\varepsilon \downarrow 0$ 时这个 x 就在边界层以外变得越来越远. 因此根据(15)式，外部解的命名是恰当的，因为它只在边界层之外近似真解. 但对于小 ε，在边界层内合适的近似是什么呢？我们现在回到这个问题上来.

我们发现，任意给边界层定出一个精确的“外缘”是得不到什

---

1) (15)式中向下的箭号表示 ε 经过正值趋向零.

2) 原文为(12)和(13)，似有笔误. ——译者注

3) 参阅(例如) Franklin (1964)，第 395 页

么的．另一方面，现在似乎清楚，（例如）$x=0.1\varepsilon$ 完全在边界层之内，而 $x=4\varepsilon$ 是远离边界层外缘的．不论 ε 的值是多少，只要 ε 是小量，这就是真的．为了得到完全在边界层之内和远离边界层外缘的典型值，我们可以分别考虑

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}[y(x,\varepsilon)|_{x=0.1\varepsilon}] \text{ 和 } \lim_{\varepsilon\downarrow 0}[y(x,\varepsilon)|_{x=4\varepsilon}].$$

更一般地讲，边界层的绝对厚度随 $\varepsilon\downarrow 0$ 而连续地变薄，而式

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}[y(x,\varepsilon)|_{x=\xi\varepsilon}]\equiv y_I(\xi), \quad \xi \text{ 固定}, \tag{18}$$

将给出在边界层内固定相对距离 ξ 处的近似解 $y_I(\xi)$．我们把这叫作**内部**近似或边界层近似，式中 I 代表"内部"．利用另外的符号，我们把 Y 定义为

$$Y(\xi,\varepsilon)\equiv y(\xi\varepsilon,\varepsilon), \tag{19}$$

由此得到

$$y_I(\xi)\equiv \lim_{\varepsilon\downarrow 0} Y(\xi,\varepsilon). \tag{20}$$

我们要强调，ξ 在(18)和(20)式的极限中是固定的．

在现在这个例子中，根据(8)式，

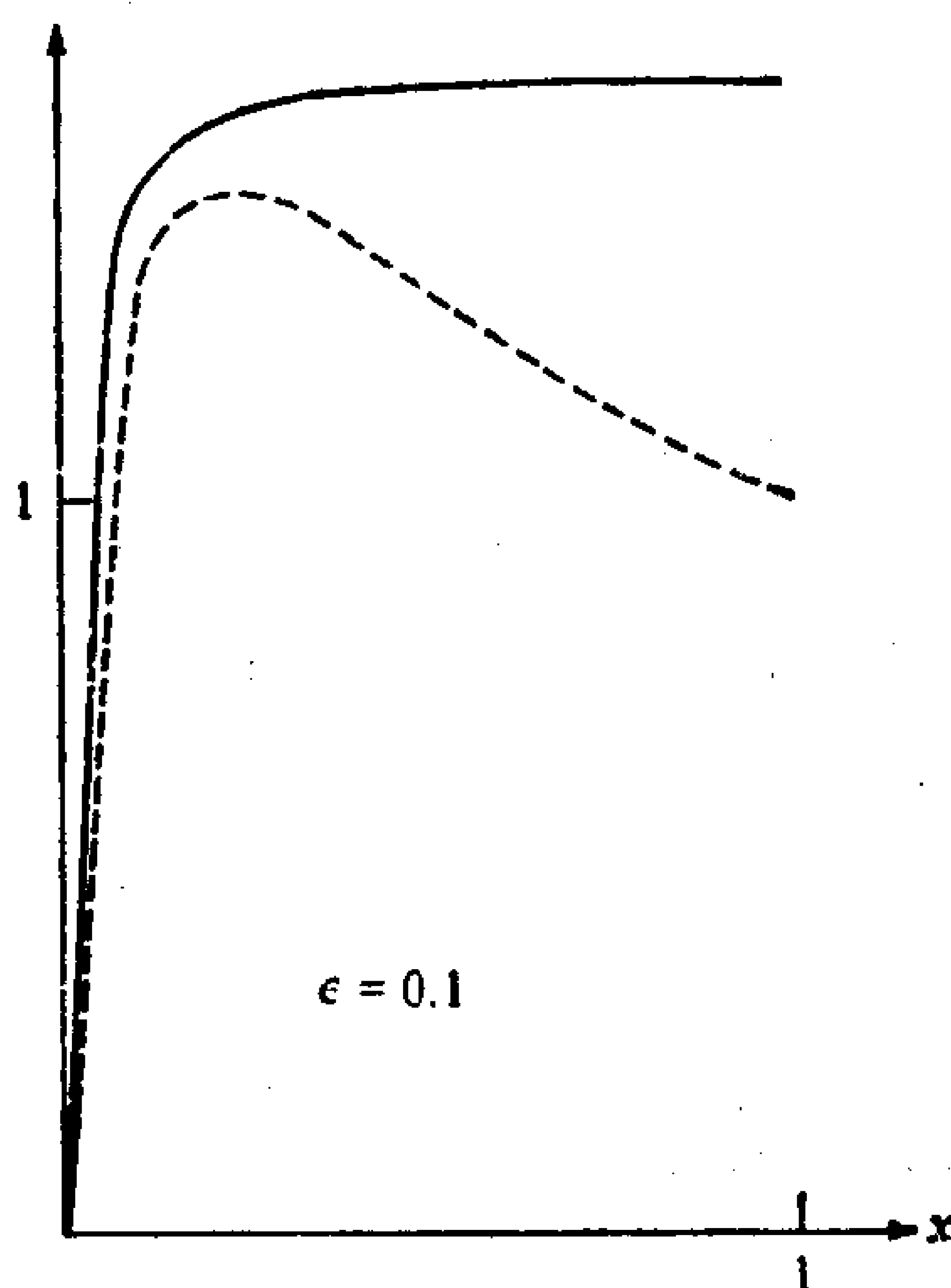


图 9.3　ε 为正小量时(1)和(2)式的精确解(虚线)与"内部"边界层近似(21)式(实线)之间的比较．在 $x=0$ 附近两者相符得很好．

$$y(x,\varepsilon)=K[\exp(m_1x)-\exp(m_2x)],$$

$$K\equiv\frac{1}{\exp(m_1)-\exp(m_2)},$$

因而

$$Y(\xi,\varepsilon)=K[\exp(m_1\varepsilon\xi)-\exp(m_2\varepsilon\xi)].$$

根据(9)式或者更彻底地根据我们早先关于二次方程(7)的根的讨论，有

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon m_1(\varepsilon)=0,\quad \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon m_2(\varepsilon)=-2,$$

因此

$$y_l(\xi)\equiv\lim_{\varepsilon\downarrow 0}Y(\xi,\varepsilon)=e^{1/2}(1-e^{-2\xi}).\tag{21}$$

图 9.3 表明，$y_l(\xi)$ 确实给出了精确解在边界层内的很好近似.

用奇异扰动法求近似解

让我们回到原始问题(1)和(2)：

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=0;\quad y(0)=0,$$

$$y(1)=1,\quad 0<\varepsilon\ll 1.\tag{22}$$

我们假装并不知道这个问题的精确解，现在来推导它的近似解. 根据前边的讨论，我们作如下的假定：除了邻近边界的薄层以外，外部方程的解能很好地近似于精确解. 暂时也把位于 $x=0$ 附近的边界层当作是给定的.

外部近似的变化并不迅速，因而应该允许把 $\varepsilon d^2y/dx^2$ 这一项加以忽略. 利用以前关于边界层位于 $x=0$ 附近的知识，我们要求外部近似 y_0 满足在 $x=1$ 处的边界条件. 因此

$$2\frac{dy_0}{dx}+y_0=0,\quad y_0(1)=1,\tag{23a, b}$$

这样

$$y_0(x)=\exp\left[\frac{1}{2}(1-x)\right],\tag{24}$$

便与(14)式一致.

令 $x=0$ 附近边界层厚度的量级为 $\delta(x)$. 当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时，边界层的厚度趋向于零. 因而，我们要求当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时 $\delta\to 0$. 为了确定边界层内解的性质,我们引进

$$\xi=\frac{x}{\delta}, \tag{25}$$

这个参数允许我们度量出与边界层成正比的距离. [我们从 (8) 式知道，$\delta(\varepsilon)=\varepsilon$，但是我们暂时“忘掉”这一点.]

尺度化概念 (6.3 节) 强烈地推动着我们去作变量变换 (25). 外部解(24)的长度尺度 (x 尺度)的量级为 1. 但是这个尺度在边界层内是不合适的，因为在边界层内，解在大小为 δ 的距离上迅速改变. 因而(25)式可以看作适合于边界层区域的一种**再次尺度化**. 两个尺度,即在边界层内是 δ, 在边界层外是 1，必须用它们来详细地确定 (22) 式的解的变化. 正如我们已在 6.3 节“非正统性”的讨论中提到的那样,这种双重尺度是奇异扰动问题的一个标志.

让我们在微分方程(22)中引进变量变换式 (25), 象在(19)式中那样,用 Y 代替函数 y, 我们得到

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2}\frac{d^2Y}{d\xi^2}+\frac{2}{\delta}\frac{dY}{d\xi}+Y=0. \tag{26}$$

如同我们在确定一次方程(1.1) 的第二个根的大小时所作的那样. 现在我们成对地比较这些项. 因为 δ 是边界层的长度尺度，在这里表达式 $d^2Y/d\xi^2$, $dY/d\xi$ 和 Y 都是 $O(1)$. 各项的数量级为

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2},\ \frac{1}{\delta},\ 1. \tag{27}$$

很有希望成功的是,这些项中有两项互相平衡,而第三项则可以忽略(因为此时问题可以通过忽略一项而加以简化). 平衡对中的一项必须是 ε/δ^2, 这是因为我们已经看到，如若不计二阶导数项,那就不能得到在 [0, 1] 上成立的近似.

如果(27)中的第一项与第三项平衡,那末 $\delta=\varepsilon^{1/2}$. 因而 $1/\delta$

比其他两项大得多 ($1/\delta = \varepsilon^{-1/2} \gg 1$)，从而不可加以忽略. 如果(27)式中第一项与第二项平衡，那末

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2} = \frac{1}{\delta} \text{ 或 } \delta = \varepsilon \quad \left(\text{因而 } \xi = \frac{x}{\varepsilon}\right). \tag{28}$$

现在剩下的一项可以忽略 ($1 \ll \varepsilon^{-1}$)，因而(28)式给出了我们所寻求的尺度化. 有了(28)式，(26)式变为

$$\frac{d^2Y}{d\xi^2} + \frac{2dY}{d\xi} + \varepsilon Y = 0. \tag{29}$$

这就是**内部方程**. 它是由适合于内层或边界层的尺度化而得到的. 作为一级近似，我们忽略最后一项，并把它看作是在边界层内描述解的性质的近似方程:

$$\frac{d^2y_I}{d\xi} + \frac{2dy_I}{d\xi} = 0. \tag{30}$$

[从(29)式到(30)式时，我们让 $\varepsilon \downarrow 0$ 而让 ξ 固定，因而用 y_I 代替 Y 是(20)式所要求的.]这个二阶方程需要两个边界条件，一个是从 $y(0) = 0$ 来的，用现在的变量来表示，这就是

$$y_I(0) = 0. \tag{31}$$

关于 y 的第二个边界条件 $y(1) = 1$，并不给出对 y_I 的第二个限制，因为 $x = 1$ 远在边界层之外，而上面所有的讨论都集中在对一个函数的近似，而这个函数是用来描述在边界层中迅速变化的解的. 那末现在让我们把第二个边界条件放在一边，先求解(30)和(31)式. 我们得到

$$y_I(\xi) = C(1 - e^{-2\xi}), \tag{32}$$

式中 C 是一个常数.

匹配

为了确定 C，我们必须把在"最远的端点"处的内部解与"最近的端点"处的外部解匹配起来，弄清这一点按照事后的认识是不足为奇的，因为这些端点相应于边界层的同一边缘. 人们希望在某种意义上有这样一个"边缘"存在(或者更恰当地说，有一个重叠

区域或中间区域存在)，在这里，内部解和外部解都是对真解的一个合理的近似. 在重叠区域里,要求这两个近似相符是合理的.

比起最初看到的情况来说,匹配是件更为精细的事情,也是本书要继续广泛研究的课题. 当 $x = O(\delta)$ 时，x 在边界层之内，而当 $x = O(1)$ 时，x 在边界层之外，认识到这一点，似乎就是继续进行研究的最好途径. 对于中间区域内的 x，我们应当让 $x = O[\Theta(\varepsilon)]$，这里 $O(\Theta)$ 在 $O(\delta)$ 和 $O(1)$ 之间;即

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0}\frac{\Theta}{\delta} = \infty, \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Theta = 0. \tag{33a, b}$$

现在,当 x 在边界层之内 $[x = O(\delta)]$ 时,宜于引进变量 $\xi = x/\delta$，并让 $\varepsilon \downarrow 0$ 而固定 ξ. 类似,当 x 在中间区域时,宜于引进 η，并令 $\varepsilon \downarrow 0$ 而固定 η，这里

$$\eta = \frac{x}{\Theta}, \quad \left(x = \eta\Theta,\ \xi = \frac{\eta\Theta}{\delta}\right) \tag{34}$$

因而当引进新的变量 η，并在 ε 趋向于零时保持它不变时,只要此时内部近似和外部近似具有同一极限，那末这两个近似就称为是**匹配的**. 所以匹配要求

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0}[y_0(x)|_{x=\eta\Theta}] = \lim_{\varepsilon \downarrow 0}[y_I(\xi)|_{\xi=\eta\Theta/\delta}], \quad \eta \text{ 固定}. \tag{35}$$

在目前的情况下,根据(24)和(33b)式，(35)式的左端为

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0}[e^{(1/2)(1-x)}|_{x=\eta\Theta} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} e^{(1/2)(1-\eta\Theta)} = e^{1/2}. \tag{36}$$

因为 $\delta(\varepsilon) \equiv \varepsilon$，由(32)和(33a)式,式(35)的右端为

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} C(1 - e^{-2\eta\Theta/\delta}) = C. \tag{37}$$

因而(35)式要求 $C = e^{1/2}$，这样由(32)式得到

$$y_I(\xi) = e^{1/2}(1 - e^{-2\xi}), \tag{38}$$

这与(21)式相符.

对于这个特殊问题,从精确解和表面上相当全面的近似方法,我们都能推导出内部近似 $y_I(\xi)$ 和外部近似 $y_0(x)$，如果有一个在 $[0, 1]$ 上都成立的**一致近似** y_U，那是很有用的. 把 y_I 和 y_0 相加,并减去它们的公共部分,就可得到这个近似. 因此

$$y_U(x) = y_0(x) + y_I\left(\frac{x}{\delta}\right) - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} y_0(\eta\Theta). \qquad (39)$$

在内区，上式右端的第一项和第三项的和可以忽略，留下的是内部近似. 在外区，第二和第三项的和可以忽略，这一点从(35)式可以看出，这样就留下了外部的近似. 因此在每个区域中，y_U 归结为合适的近似. 对于正在研究的这个例子，从 (24)、(38)和(36)式，我们有

$$y_U = e^{(1/2)(1-x)} + e^{1/2}(1 - e^{-2x/\varepsilon}) - e^{1/2} = e^{1/2}(e^{-x/2} - e^{-2x/\varepsilon}),$$

它与我们对精确解的原始近似(10)式是一致的.

进一步的例子

在关于示例问题(22)的研究中，我们把边界层位于 $x = 0$ 附近看作是已知的. 我们知道，这是当 $\varepsilon \downarrow 0$ 的情况. 但是当 $\varepsilon \uparrow 0$ 时，边界层在 $x = 1$ 附近. 幸运的是，如果我们对边界层的位置作了不正确的假定，那末这是会暴露出来的，因为这会导致我们的方法失效. 在下面的例子中，我们就来示明这一点，同时更进一步地熟悉奇异扰动方法.

例1 如果假定边界层位于 $x = 0$ 附近，试证明当 $\varepsilon \uparrow 0$ 时边界层方法失效.

解 所有各步的分析都与以前一样，只是最后有一步，(37)式为下式所代替：

$$\lim_{\varepsilon \uparrow 0} C(1 - e^{-2\eta\Theta/\delta}) = \infty,$$

因此不可能匹配.

例 2 假定边界层位于 $x = 1$ 附近，试完成上述计算.

解 我们现在应该要求外部近似满足 $x = 0$ 处的边界条件. 此外，外部近似仍然满足 (23a) 式，但 (23b) 式为 $y_0(0) = 0$ 所代替，并给出 $y_0(x) \equiv 0$.

对于边界层内的 x，$1 - x$ 必然为 $O(\delta)$，因而合适的边界层变量为 $(1 - x)/\delta = \xi$. (注意 ξ 是正的.) 引进 ξ，我们得到

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2}\frac{d^2Y}{d\bar{\xi}^2}-\frac{2}{\delta}\frac{dY}{d\bar{\xi}}+Y=0. \tag{40}$$

因为(40)和(26)式的不同仅在于符号有变化，项与项之间的平衡可以如以前一样去进行，并且仍有 $\delta(\varepsilon)=\varepsilon$，忽略(40)式中的最后一项，并要求 Y 在 $\bar{\xi}=0$（相当于 $x=1$）处具有的值为 1，我们得到

$$y_I(\bar{\xi})=C(e^{2\bar{\xi}}-1)+1.$$

为了确定常数 C，我们引进中间变量 $\bar{\eta}=(1-x)/\Theta$，这里 Θ 象以前一样以(33)为条件．那末我们再加上匹配条件(35)（作了适当的小的修正）：

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}y_I\left(\frac{\bar{\eta}\Theta}{\delta}\right)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}y_0(1-\Theta\bar{\eta})=0.$$

如果 ε 通过正值趋向于零，那末 y_I 的极限（如所指望的那样）便不再存在．但是如果 ε 通过负值趋向于零，那末极限为 $-C+1$．在后一种情况下，$C=1$，$y_I(\bar{\xi})=\exp(2\bar{\xi})$，并且

$$y_U(x)=0+e^{2(1-x)/\varepsilon}-0=e^{2(1-x)/\varepsilon},$$

这与(13)式相符．

作为推广，我们对二阶常微分方程的奇异扰动问题提出如下的基本步骤．这些步骤并不总是奏效的．但它对很广的一类问题都是行得通的，而且对作了修正后的更广的一类问题也是适用的．这里所谓的修正理应是读者力所能及的[1]．

考虑边值问题

$$\varepsilon y''+f(x,y,y')=0,\quad y(a)=A,$$
$$y(b)=B;\ '\equiv\frac{d}{dx}. \tag{41}$$

（不失一般性）假定 ε 是正数，也假定问题有一个在 $x=0$ 处具有边界层的唯一的解．这个假设并不要我们保证边界层是在右边还

1）读者应该熟悉如下的事实：即使(14)式不是线性的，它也可能有无穷多个解，或者根本就没有解．参阅（例如）I. Stakgold 的《*Boundary Value Problems of Mathematical Physics* (N. Y.: Macmillan, 1967)》．一书中的 1.5 节．

是左边，因为我们没有规定 a 和 b 中间那一个是大的.

(a) 通过求解

$$f(x, y_0, y_0') = 0, \quad y_0(b) = B, \tag{42}$$

确定外部近似 y_0.

(b) 把边界层变量

$$\xi = \pm \frac{x - a}{\delta(\varepsilon)}, \tag{43}$$

引进(41)式，式中的符号选得使 ξ 在微分方程所适用的区域内部为正值. (注意 $x = a \pm \delta\xi$) 利用符号 $Y(\xi, \varepsilon) = y(a \pm \delta\xi, \varepsilon)$，(41)式可以写作

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2} \frac{d^2Y}{d\xi^2} + f\left(a \pm \delta\xi, Y, \pm \frac{1}{\delta} \frac{dY}{d\xi} \right) = 0. \tag{44}$$

假定对于小 ε (和固定的 ξ) 对(44)式中第二项的主要贡献具有如下形式:

$$\delta^s F\left(\xi, Y, \frac{dY}{d\xi} \right), \tag{45}$$

这里 F 是某个函数，s 是常数. [注意 $F(\xi, Y, dY/d\xi)$ 与 δ 无关.] 选择

$$\varepsilon\delta^{-2} = \delta^s \text{ 或 } \delta = \varepsilon^{1/(2+s)} \tag{46}$$

以使二阶导数与式(45)相平衡，象所要求的那样，如果 δ 随 ε 而趋向于零，那末问题必然是使 $s > -2$.

(c) 求解

$$\frac{d^2y_I}{d\xi^2} + F\left(\xi, y_I, \frac{dy_I}{d\xi} \right) = 0, \quad y_I^{(0)} = A, \tag{47}$$

来确定 $y_I(\xi)$.

(d) 为了得到(47)式解答中的任意常数，引进中间变量

$$\eta \equiv \pm \frac{x - a}{\Theta(\varepsilon)}, \tag{48}$$

式中 Θ 除了满足要求

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Theta(\varepsilon) = 0 \text{ 和 } \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Theta(\varepsilon)}{\delta(\varepsilon)} = \infty. \tag{49}$$

以外，是一个未确定的函数．再加上**匹配要求**

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}[y_0(x)|_{x=a\pm\Theta\eta}] = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}[y_I(\xi)|_{\xi=\eta\Theta/\delta}], \quad \eta \text{ 固定}. \quad (50)$$

注意：(a) 为了得到匹配，可以对 Θ 作进一步的限制；(b) 上述步骤不应盲目地去“硬套”，倒不如把它看作是一种提要和指南．这将会使我们比较有效地去解决比较容易的问题，并增加读者获得有关奇异扰动的“感性知识”的机会．这对于把本方法推广到更困难的问题中去是必要的；(c) 非线性问题往往要求大量采用上述步骤．一般地说，非线性简化方程(42)不止一个根．不同的解在不同的区域里用作外部近似．外部解的选择受到与位于边界附近和边界内部的“边界层”进行匹配的可能性的限制．[参阅 Cole (1968)，第二章．]

例 3 对于小正数 ε，试求方程

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha(x)\frac{dy}{dx} + \beta(x)y = 0; \quad y(0) = 0,$$

$$y(1) = 1, \quad \alpha(0) \equiv a_0 > 0, \quad \beta(0) \text{ 有限}$$

的解的内部和外部近似．为了避免试凑，我们给出边界层位于 $x = 0$ 附近的信息．

解 外部近似满足 $\alpha y' + \beta y = 0$，$y(1) = 1$，因而由下式给出

$$y_0(x) = \exp\int_x^1 \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}ds.$$

我们引进 $\xi \equiv x/\delta$，这里当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时，$\delta(\varepsilon)\to 0$．我们得到

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2}\frac{d^2Y}{d\xi^2} + \frac{\alpha(\delta\xi)}{\delta}\frac{dY}{d\xi} + \beta(\delta\xi)Y = 0.$$

因为当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时，对固定的 ξ 有 $\alpha(\delta\xi)\to a_0$，各项的大小仍然与(27)式中的一样，因此按照我们在那里所用的同样的论点，有 $\delta = \varepsilon$．内部近似满足 $d^2y_I/d\xi^2 + a_0 dy_I/d\xi = 0$，$y_I(0) = 0$，因而 $y_I(\xi) = C(1 - e^{-a_0\xi})$．匹配给出

$$C = \exp\left\{\int_0^1 [\beta(s)/\alpha(s)]ds\right\}.$$

例如练习中的问题：

(a) 高于二阶(练习 7)；

(b) $\delta = \varepsilon$ 不再成立〔练习 2(c)〕和

(c) 二阶方程外部解不再满足(两个边界条件中)任何一个边界条件(练习 6)

示明了奇异扰动问题的其他有意义的性质.

正如我们提到过的那样，奇异扰动理论现在几乎仍是一种手段. 我们仅对已经用过上述问题中的一小部分严格地证明了这些步骤是正确的，如同在 Van Dyke (1964)，Cole (1968) 和 Nayfeh (1973) 的书中所示出的那样，应用奇异扰动技巧时，特别是把它应用于非线性常微分方程和偏微分方程时，创造性可导出优雅而令人满意的结果. 陷井对于粗心大意者是危险的，但是，正如人们已注意到的那样[1]，“使用任何技巧时，不可剥夺的思索权非常现实地可以使他防止接受虚假的结构”.

练　　习

1. (a) 试证明式(15)

(b) 试证明，如同课本中所说的那样，在 $[a, 1]$ 中(15)式的极限是一致的.

(c) 试直接证明在 $(0, 1]$ 中上述极限是不一致的.

2. 试求下列各问题解的内部、外部和一致的近似. 假定 ε 是小正数，并且在 $x=0$ 处有一边界层. 在每一情况下，根据基本原理往下做，不要硬套公式. ($' \equiv d/dx$).

(a) $\varepsilon y'' + (1+x)y' + y = 0$；$y(0) = 1$，$y(1) = 1$.

(b) $\varepsilon y'' + y' + y^2 = 0$；$y(0) = 1/4$，$y(1) = 1/2$.

†(c) $\varepsilon y'' + x^{1/3}y' + y = 0$；$y(0) = 0$，$y(1) = e^{-3/2}$.

3. 如果假定边界层在 $x=1$ 附近，试指出练习 2 的问题中所造成的矛盾.

---

1) G. F. Carrier, “Singular Perturbation Theory and Geophysics” *SIAM Rev.* **12**, 175—93 (1970).

4. 在一根无质量的弹簧上挂一个"小"质量 m，弹簧的内部阻尼与速度成正比. 用锤子敲打该质量，加给它一个铅垂冲量 I（瞬时动量改变）. 在时刻 t^*，垂直偏离 y^* 的初始条件取作:

$$t^* = 0 \text{ 时}, \quad y^* = 0, \quad m\frac{dy^*}{dt^*} = I.$$

基本方程为

$$m\frac{d^2y^*}{dt^{*2}} + \mu\frac{dy^*}{dt^*} + ky^* = 0,$$

式中 μ 和 k 分别为阻尼常数和弹性常数. 因为质量很小,所以我们处于"强过阻尼"的情况,此时当冲量在拉伸弹簧时消耗掉之后,质量迅速回到了静止的位置. 本练习要求对此作扰动分析.

(a) 证明选择某种无量纲参数能使问题变成

$$\varepsilon y'' + y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad \varepsilon y'(0) = 1. \qquad (51)$$

(b) 按照下列提示用奇异扰动技巧求解这个问题. 对外部近似不要加初始条件. 求满足两个初始条件的内部近似. 然后完全确定外部近似.

†(c) 你的解答似是而非吗? 简要地进行讨论. 特别是倘若 t 并不太大的话,试解释为什么(51)式已正确尺度化.

(d) 试求在整个区域对 $t > 0$ 都成立的复合解.

(e) 考察 $\varepsilon \ll 1$ 时的精确解,校核你的解答.

†**5.** 利用奇异扰动理论求下列问题解的外部、内部和复合展开(参阅前面脚注中 Carrier 的文章).

$$\varepsilon u'' - (2 - x^2)u = -1, \quad u(-1) = u(1) = 0.$$

注意: 求解在(0, 1)上满足边界条件 $u'(0) = 0, u(1) = 0$ 的微分方程就足够了. 为什么?

6. (a) 利用奇异扰动技巧对下列问题的解作近似

$$\varepsilon^2 y'' - y = 0, \quad y(0) = 1,$$
$$y(1) = 2, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

(b) 试证明奇异扰动方法对下列问题失效:

$$\varepsilon^2 y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

利用精确解证明为什么出毛病?

7. 对于具有固定端点的小刚性弹簧，振动的波形所具有的形状 $y(x)$ 由下列特征值问题给定

$$\varepsilon y^{(IV)} - y' = \lambda y, \quad y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0,$$

这里 ε 是刚度的量度；$0 < \varepsilon \ll 1$. 本征值 λ 是振动的无量纲频率. 假定 λ 为 $O(1)$，试求外部和内部近似，并得出结论：刚度对最低阶的本征值没有影响. [有关刚度所引起的修正的讨论，请参阅 R. E. O'Malley 的 "Topics in Singular Perturbations." *Advan. Math*. **2**, 365—40 (1968) 的第 3 节. 该文重印在 *Lectures on Ordinary Differential Equations* (New York: Academic 1970)上.]

†8. 试求

$$y'' - \varepsilon^2 y = 0; \quad y(0) = 1,$$
$$\text{当 } x \to \infty \text{ 时}, \quad y'(x) \to 0$$

的精确解，并在 $\varepsilon \downarrow 0$ 时取极限. 按照所考虑的 x 的范围，试证明有三种不同类型的极限. 由此说明对于小 ε，尽管当 ε 取零时方程的阶数并不改变，但这个问题仍具有奇异扰动的特征[1].

9. 本练习的目的在于证明，在(8.3.9)式中出现的"不可接受"的间断可以利用奇异扰动理论加以"固定".

(a) 在(8.4.5),(8.4.6)和(8.4.7)式中，利用 $\kappa \equiv \lambda(\eta D)^{-1/2}$ 重新引进参数 η. 试证明当 $\eta\nu \ll 1$ 时，

$$\frac{C-1}{\nu}\begin{cases} \approx 1 - \dfrac{1}{2} e^{(x-1)/(\eta\nu)^{1/2}} & x \leqslant 1 \\[2ex] \approx \dfrac{1}{2} e^{-(x-1)/(\eta\nu)^{1/2}} & x \geqslant 1. \end{cases}$$

试画出示意图. 并且也画出不连续函数

---

1) 这个练习是从练习 7 所引的 O'Malley 的论文中选取的.

$$\lim_{\substack{\nu \to 0 \\ \eta \text{固定}}} \frac{C-1}{\nu}.$$

(b) 现在应该清楚，(8.3.6)式给出了问题(8.2.20)的外部展开．假装你不知道(a)的结果，利用边界层把(8.3.9)中得到的间断位置“定”出来．

10. 研究粘性流体绕一块无限平板的流动时，人们往往得到在$0 \leqslant x<\infty$，$0<\varepsilon$上关于$y(x,\varepsilon)$的下列问题:

$$\varepsilon(y''' + yy'') + 1 - (y')^2 = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

$$\lim_{x \to \infty} y'(x) = 1.$$

我们对$\varepsilon \downarrow 0$感到兴趣，因而你可假定在$x=0$处有一个边界层．试确定外部解中的第一项．同时，确定边界层方程、边界条件和匹配条件，不用求解．[为了进行求解，你必须引进对y和x的边界层参数，同时也要用到从内部区域到外部区域时当$\varepsilon \downarrow 0$时y必须连续的要求．]

第十章　奇异扰动理论在生化动力学问题中的一个应用

作为第九章中所介绍技巧的一个比较简单但又重要的应用例子，我们现在来考察生化动力学中的一个问题，这里所要考虑的是涉及某一常微分方程组*初始值*问题的奇异扰动理论．第九章中讨论边值问题的某些细节不再适用了，但是论述的精神实质还是相同的．这样就会加强读者的理解．

在 10.1 节中，我们考虑被酶催化的一个化学反应过程，对于描述这种过程的数学问题作出表述．我们将考虑酶的初始浓度较小的这种常有的情况．(以后再更加精确地指出"小"的含义．)用奇异扰动理论来分析这一问题有其便利之处．在 10.2 节中我们便要这样做．特别是要指出如何得到更高阶近似，以求在技巧上比第九章有所进步．

10.1　关于一种酶——一个底物的化学反应初值问题的表述

质量作用定律

我们主要关心的是酶的催化反应的时间进程，但是首先必须考虑*质量作用定律*的某些简单情形，这是定量研究化学反应的基础．

为了确定起见，让我们从分子 a 与 b 结合成分子 c 的情形开始．若要 a 与 b 发生反应，它们必须进行某种有效的碰撞．因为产生反应可能要求分子的活性部分或重要部分对好位置，所以并不是每一次碰撞都是有效的．(参见图 10.1)

如果我们使外界因素(如温度等)固定不变，并且使 b 的浓度也保持不变，那么自然就会假设有效碰撞的频繁率（随之反应率）正比于 a 的浓度．因为，如果我们使 a 的含量加倍，那么单位时

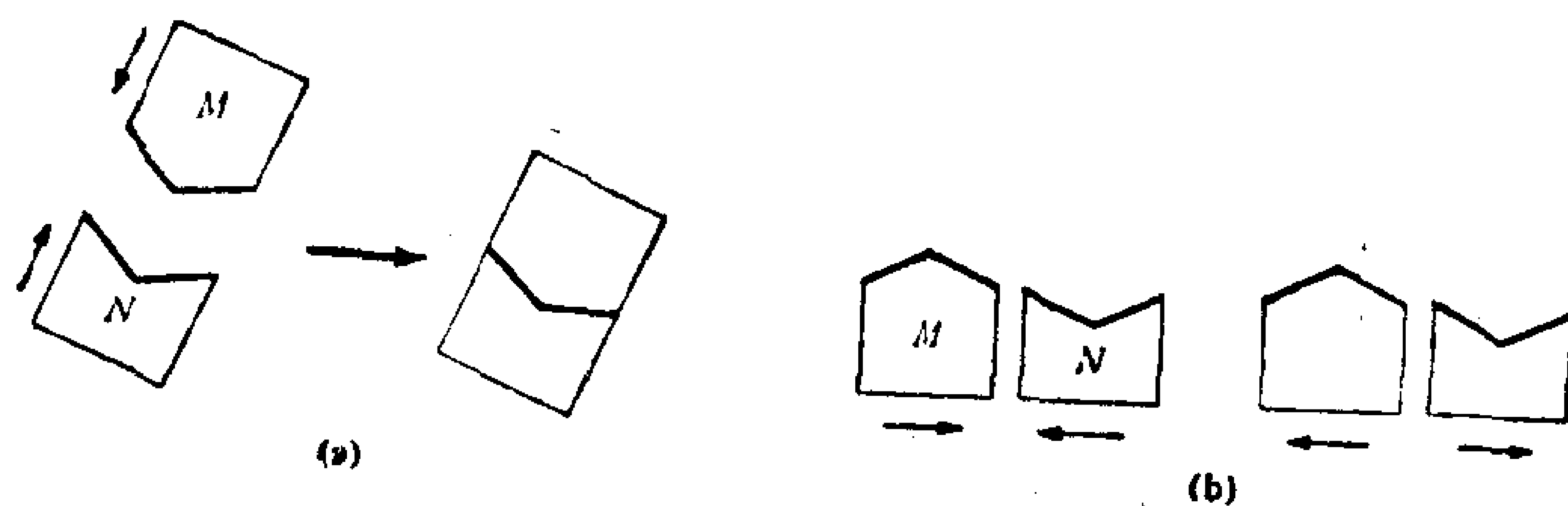


图 10.1 分子碰撞示意图. 在一个成功的反应中,“分子”M与N的粗线边界部分必须衔接起来. (a) 有效碰撞. (b) 无效碰撞.

间内有效碰撞的次数也会加倍(这儿我们假定 a 的浓度不太高;否则浓度加倍之后可能会引起相干效应). 用同一符号来标记化学物质及其浓度(单位体积内的分子数),可以写出 $dc/dt \sim a$. 同理可知,$dc/dt \sim b$. 这就使我们得到下列方程:

$$\frac{dc}{dt} = k_1 ab,$$

此处 k_1 是**速率常数**. 化学家采用下列标记法:

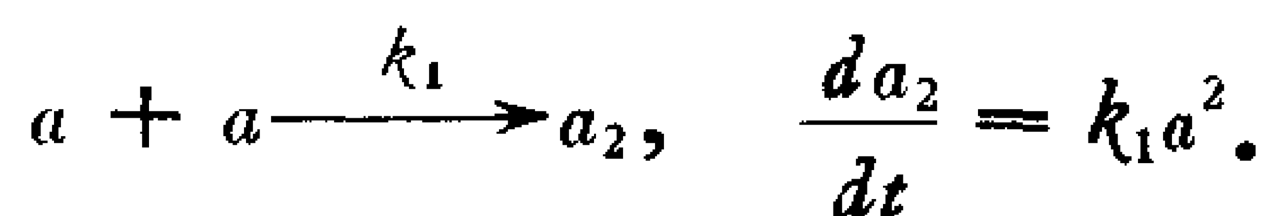


$$a + b \xrightarrow{k_1} c,$$

表示我们所讨论的反应. 显然,在上述情况下,关于 a 与 b 的浓度的方程为

$$\frac{da}{dt} = -k_1 ab, \quad \frac{db}{dt} = -k_1 ab.$$

一个重要的特例是 a 与 b 全同并且化合成双元素链或称**二聚物** a_2 的情况. 此时我们有



$$a + a \xrightarrow{k_1} a_2, \quad \frac{da_2}{dt} = k_1 a^2.$$

这表明,在一个反应中刚好包含同一物质的两个分子时,速率正比于相应浓度的二次方.

上述讨论看起来虽然是合理的,但毕竟是一种推测. 1867 年,当挪威人 Guldberg 和 Waage 在实验上确证了其正确性以后,我们论及的上述观点才为人们接受.

只要把我们的基本观点稍作推广便可考虑下列逆反应:



$$a + b \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} c, \tag{1}$$

其中化合物 c 可以自发地分解成它的原始物质 a 与 b. 读者应该彻底弄明白这时的支配方程为

$$\frac{da}{dt} = -k_1 ab + k_{-1}c,$$

$$\frac{db}{dt} = -k_1 ab + k_{-1}c,$$

$$\frac{dc}{dt} = k_1 ab - k_{-1}c.$$

从上述方程,立即可推得

$$\frac{d(a+c)}{dt} = 0, \quad \frac{d(b+c)}{dt} = 0,$$

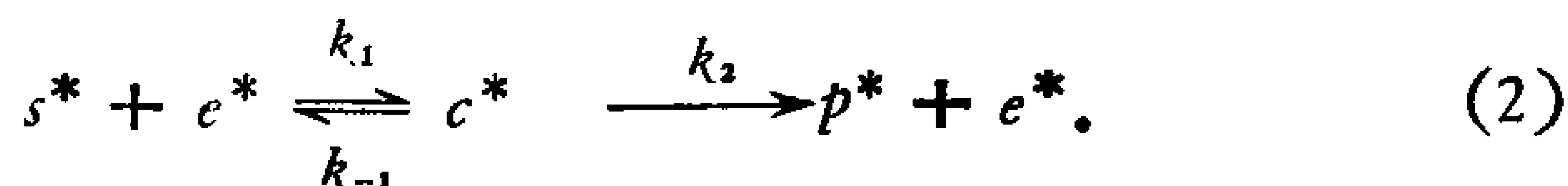
从而有 $a + c =$ 常量和 $b + c =$ 常量. 这是在意料之中的. 因为每一个新分子 c 是由 a 与 b 化合产生的, 因而在 c 的产生过程中,便有一个分子 a 以及一个分子 b 消失了.

酶催化

已经发现某些化学物质在加速或控制化学过程方面具有重要作用. 现在已经搞清楚,这些叫做酶[1]的化学物质是一些蛋白质大分子. 酶能够催化化学反应. 而且往往是一种特定的酶能催化一种特定的反应. 关于酶的精确作用机理仍然是一个广泛的研究专题. 不过, 正如瑞典化学家 Svante Arrhenius, 在十九世纪末期所建议的那样,事情的本质在于酶(浓度为 e^*) 与"输入"分子或称**底物**(浓度为 s^*) 进行了结合, 产生一种结合了的"酶一底物"分子, 或称**复合物**(浓度为 c^*). 由于在这一复合物中,底物分子被束缚在酶上,所以它活化了, 从而形成反应后的"输出物"或称**产物**(浓度为 p^*) 的可能性大大增加了. (在我们考虑的简单情况下)发生

1) 包括有理论性讨论的一本经典参考书是 M. Dixon 和 E. C. Webb 合写的 *The Enzymes* (New York: Academic, 2nd ed., 1964).

这种反应的时候，我们假定复合物分解成产物分子和原来的“自由”酶分子．还必须容许存在没有发生反应复合物便分离开来的可能性．因此可以示意地写作:



$$s^* + e^* \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} c^* \xrightarrow{k_2} p^* + e^*. \tag{2}$$

假定一开始只存在着底物和酶，浓度分别为 $\bar{s}$ 与 $\bar{e}$，那么时刻 t^* 时化合物的浓度由下列一些方程和初始条件所决定:

$$\frac{ds^*}{dt^*} = -k_1 s^* e^* + k_{-1} c^*, \tag{3a}$$

$$\frac{de^*}{dt^*} = -k_1 s^* e^* + k_{-1} c^* + k_2 c^*, \tag{3b}$$

$$\frac{dc^*}{dt^*} = k_1 s^* e^* - k_{-1} c^* - k_2 c^*, \tag{3c}$$

$$\frac{dp^*}{dt^*} = k_2 c^*, \tag{3d}$$

$$\text{在}\ t^* = 0:\ s^* = \bar{s},\ e^* = \bar{e},\ c^* = 0,\ p^* = 0. \tag{3e}$$

将 (3b) 与 (3c) 相加，利用 (3e)，得

$$e^*(t^*) + c^*(t^*) = \text{常量} = \bar{e}. \tag{4}$$

这样，我们就能消去 e^*，而考虑下列问题

$$\frac{ds^*}{dt^*} = -k_1 \bar{e} s^* + (k_1 s^* + k_{-1}) c^*, \tag{5a}$$

$$\frac{dc^*}{dt^*} = k_1 \bar{e} s^* - (k_1 s^* + k_{-1} + k_2) c^*, \tag{5b}$$

$$s^*(0) = \bar{s}, \quad c^*(0) = 0. \tag{5c}$$

一旦由上述方程确定了 $s^*(t^*)$ 和 $c^*(t^*)$ 以后，就可以从下面一个易于推得的方程

$$s^* + c^* + p^* = \bar{s} + \bar{e} \tag{6}$$

来确定 $e^*(t^*)$ 和 $p^*(t^*)$.

建立反应的时间进程方程组或称**动力学**方程组，并不是一桩无谓之举．因为，我们不能把分子相互作用拍摄一张快片以检验

Arrhenius 的推测是否正确．不过，实验工作者已能追踪反应随时间的进程．例如借助于观察吸收光性质的变化，把这种观察同动力学的理论结果作比较，人们得到了存在酶-复合物机制的经典证据．

对假定作某种简化之后，我们能够同实验进行清晰的比较．许多人在这方面作出了贡献．最常提到的名字是柏林的科学家 Leonor Michaelis 和 Maude Menten，也有人喜欢引举法国人 *Henri* 或英国人 Briggs 和 Haldane[1)]．尽管如此，主要观念可以概述如下．

经常发生或者可以使其发生的情况是底物的初始浓度远大于酶的初始浓度．（"浓度"意指单位体积内的分子数．）在这种情况下，存在着一段短暂的初始时间．在此期间，酶很快地"扛起"底物分子，使复合物的浓度急剧上升．然而在发生反应的大部分时间中，复合物的浓度差不多保持不变．出现这种情况的原因是，只要每个酶分子的周围存在着许多底物分子，那么限制反应速度的因素仅仅在于酶工作得多快，而不是用来继续工作的底物的来源有多少． 一个酶分子恢复"自由"以后，又能束缚一个新底物分子，这一周期差不多总是一样的．当然，在大部分底物分子用完的时候，上述时间变得越来越长．因而，在反应的最后阶段中，复合物浓度显著减小．最后，所有底物都被反应(2)转化为产物，酶全部重获"自由"，复合物不再存在了．

因而，生物化学家把他们的观察结果同理论进行比较时，作为初级近似而假设复合物的浓度可以看作常量．此时，利用方程(5b)及 $dc^*/dt^*=0$，可用 s^* 来表示 c^*． 将这一结果代入(5a)式，就把问题约化为单个常微分方程，其中只包含 ds^*/dt^* 及 s^*．这就是 Michaelis-Menten 动力学．在本章中，我们通过奇异扰动的方法，对这一问题作一详细处理．特别是我们将证明，用前一章

1) 后来一些文章从奇异扰动的观点出发进行了分析．这些论文有 J. R. Bowen, A. Acrivos 和 A. K. Oppenheim 写的"详论化学动力学中亚稳态近似的奇异扰动"，见 *Chem. Eng. Sci.* **18**, 177—88 (1963)；和 F. G. Heineken, H. M. Tsuchiya 和 R. Aris 合写的"关于生化动力学中亚稳态假设的数学状况"，见 *Math. Biosci.* **1**, 95—113 (1967).

的术语来讲，Michaelis-Menten 动力学方程相当于“外部”方程．我们的分析基本上遵循 Heineken 等人的分析(引文参见前面)．

尺度化以及问题的最终表述

第一步是通过使每一项的最大值可以用它前面的参量正确地估计出来，从而引进无量纲的变数．(这一步叫做尺度化)在这一过程中，我们把注意力集中在最初“扛起”以后但尚未进入最后阶段的这种情形．由于整个方法是根据下列事实，即 s^* 并不比它的初始值 $\bar{s}$ 减小很多，因而在所要研究的时期中，可以极好地用 $\bar{s}$ 来估计 s^*．而且，在底物丰富的情况下，最初存在的大多数酶应该很快与底物结合成复合物．这样，我们可以把 c^* 的估计量取作 $\bar{e}$．时间尺度的选择或许暂且还不明显；因此让我们简单地把它记作 $\bar{t}$．这样就引进了无量纲的底物和复合物浓度以及一种无量纲的时间，它们是

$$s=\frac{s^*}{\bar{s}},\quad c=\frac{c^*}{\bar{e}},\quad t=\frac{t^*}{\bar{t}}. \tag{7}$$

把它们代入 (5a) 式，得

$$\frac{\bar{s}}{\bar{t}}\frac{ds}{dt}=-k_1\bar{e}\bar{s}s(1-c)+k_{-1}\bar{e}c. \tag{8}$$

(8) 式右边第一项给出了由于转化为复合物而引起的底物浓度衰减率．右边第二项给出了由于复合物自发分裂而引起的底物浓度的增加率．如果后一效应大的话，那么尽管有相当多的复合物产生，但它们只是分裂而不生成任何产物．显然，这种“逆转反应”占上风的现象随时会出现，它起了一种控制作用．不过我们将考虑更为经常的情况．这时，(8)式中的 $(\bar{s}/\bar{t})ds/dt$ 与 $-k_1\bar{e}\bar{s}s(1-c)$ 两项大致平衡，这就要求时间尺度为

$$\bar{t}=\frac{1}{k_1\bar{e}}. \tag{9}$$

把(7)式与(9)式代入(5)式，即可求得无量纲尺度化之后的方程

$$\dot{s} = -s + (s + \kappa - \lambda)c, \tag{10a}$$

$$\varepsilon\dot{c} = s - (s + \kappa)c, \quad \left(\cdot \equiv \frac{d}{dt}\right) \tag{10b}$$

$$s(0) = 1, \quad c(0) = 0, \tag{10c}$$

其中

$$\varepsilon = \frac{\bar{e}}{\bar{s}}, \quad \kappa = \frac{k_{-1} + k_2}{k_1\bar{s}}, \quad \lambda = \frac{k_2}{k_1\bar{s}},$$

是参量.

方框中的方程(10)构成了问题的数学表述. 因而，摆在我们面前的是一对一阶非线性常微分方程的初值问题. 出现了三个参量,其中有一个是小的. 如果让这一小的参量为零,我们就把问题约化为单个一阶微分方程了. 但是至少在目前，有一个初始条件满足不了,看来要用奇异扰动方法. 这就是下一节的主题.

练　　习

1. 证明(4)、(5)和(6)式.

2. 假定(2)式中的第二个反应是可逆的,速率常数为 k_{-2}.

(a) (3)式作何变更?

(b) (4)、(5)和(6)式作何变更?

(c) 在本章其余部分的计算中，请探索这种可能性所引起的结果.

10.2 用奇异扰动方法求得的近似解

在本节中,我们运用奇异扰动方法求得(1.10)式所提出问题的近似解.

作为外部解的 Michaelis-Menten 动力学

根据假设,(1.10)式中的无量纲参量是小的. 由于我们已经引进了尺度化的无量纲参量，所以，如果尺度化是正确的话，就

可以略去带有因子 ε 的项；从而得到下列关于近似值 s_0 与 c_0 的方程：

$$\dot{s}_0 = -s_0 + (s_0 + \kappa - \lambda)c_0, \tag{1a}$$

$$s_0 - (s_0 + \kappa)c_0 = 0, \text{ 或 } c_0 = \frac{s_0}{s_0 + \kappa}. \tag{1b}$$

把 (1b) 式代入 (1a) 式，便得到单个一阶方程

$$\dot{s}_0 = -\frac{\lambda s_0}{s_0 + \kappa}, \tag{2}$$

我们把(1)与(2)式的解叫做 **Michaelis-Menten 近似**. 采用这一近似就可以把化学实验数据进行处理，从而迅速定出参数 κ 与 λ(练习 8).

显然可以把 Michaelis-Menten 近似看作一个奇异扰动问题的外部近似. 一阶方程(2)不可能具有同时满足(1.10c)式中的两个初始条件的解. 这是不奇怪的. 因为我们已经忽略了 $\varepsilon\dot{c}$，把方程组的阶数降低了. 另外，我们的尺度化是针对经过了复合物浓度从零值急剧上升的初始时刻以后的时期. 求解(2)式，最后易于得到[练习 1(a)]

$$s_0 + \kappa \ln s_0 = -\lambda t + Q, \tag{3}$$

其中 Q 是一常数. 这一方程连同 (1b) 式一起即是外部解，Q 必须通过匹配才能定出.

内部解

为了寻找内部方程，我们假设存在有一个宽度为 $\delta(\varepsilon)$ 的内层或称**初始层**. 适当改变变量之后引入 $\tau = t/\delta(\varepsilon)$，可知内部解 $S(\tau, \varepsilon) = s(\delta\tau, \varepsilon)$ 与 $C(\tau, \varepsilon) = c(\delta\tau, \varepsilon)$ 满足

$$\delta^{-1}\frac{dS}{d\tau} = -S + (S + \kappa - \lambda)c,$$

$$\varepsilon\delta^{-1}\frac{dC}{d\tau} = S - (S + \kappa)C. \tag{4}$$

为了保留含有 $dC/d\tau$ 的项，必须取

$$\delta(\varepsilon)=\varepsilon \text{ 即 } \tau=t/\varepsilon.^{1)} \tag{5}$$

因此,内部方程为

$$S'=\varepsilon[-S+(S+\kappa-\lambda)C],$$

$$C'=S-(S+\kappa)C, \quad '\equiv\frac{d}{d\tau}. \tag{6}$$

由于我们要使内部解适用于反应刚开始的时刻，所以必须满足原来的初始条件．故

$$S(0,\varepsilon)=1, \quad C(0,\varepsilon)=0. \tag{7}$$

令 $S_0(\tau)$ 和 $C_0(\tau)$ 表示内部解的初步近似．由(6)与(7)式，它们满足

$$S_0'=0, \quad C_0'=S_0-(S_0+\kappa)C_0;$$

$$S_0(0)=1, \quad C_0(0)=0.$$

因此[练习1(b)]

$$S_0(\tau)\equiv 1, \quad C_0(\tau)=(\kappa+1)^{-1}[1-e^{-(\kappa+1)\tau}], \tag{8a, b}$$

内部解就完全确定了．

为了进行匹配,与(9.2.49)式相平行,引入一个中间变量 τ_i,使

$$\tau_i\equiv\frac{t}{\Psi(\varepsilon)}, \quad \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\Psi(\varepsilon)=0,$$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\Psi(\varepsilon)}{\delta(\varepsilon)}=\infty, \tag{9a, b, c}$$

回忆(5)式: $\delta(\varepsilon)=\varepsilon$．(还要注意 $\tau=\tau_i\phi/\delta$.) 与(9.2.50)式相平行,对于固定的 Ψ,由于 $S_0\equiv 1$，底物浓度的匹配条件为

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}[s_0(t)|_{t=\Psi\tau_i}]=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}[S_0(\tau)|_{\tau=\tau_i\Psi/\delta}] \text{ 或 } s_0(0)=1, \tag{10}$$

因而(3)式中的 $Q=1$．这样

$$s_0+\kappa\ln s_0=-\lambda t+1. \tag{11}$$

就完全(以隐式)确定了底物浓度的外部近似.

---

1) 我们可以把引入 τ 而不是 t，看作是在内部层中进行了必要的重新尺度化,在这儿，当复合物浓度急剧上升时 c 比之 s 与 $(s+\kappa)c$ 远非可以忽略，而是相当的．因而这是一种非正统函数的另一个例子，要适当地描述它，需要引入不止一个尺度．(参见 6.3 节.)

关于复合物浓度的相应匹配条件要求

$$c_0(0)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\{(\kappa+1)^{-1}[1-e^{-(\kappa+1)\tau_i\psi/\delta}]\}=(\kappa+1)^{-1},\quad (12)$$

其中用了 (8b) 式. 这里没有可供选择的其余常量,因此这一条件必须被满足. 然而,由 (1b) 与(10)式,我们有

$$c_0(0)=\frac{s_0(0)}{s_0(0)+\kappa}=\frac{1}{1+\kappa}.\quad (13)$$

因此这一条件是自动满足的. 这种情况的出现不是偶然的, 这是由于我们对问题作了正确处理的缘故.

一致近似

得到一致近似的步骤都是一样的: **把内部近似与外部近似相加并减去它们的公共部分**. 在(9.2.39)式中首次引进这一方法以后, 关于它的合理性的论证并不受它所出现的那个地方的特殊内容的限制. 在现在的情况下, s 的一致近似 $s^{(u)}$ 中的初始项 $s_0^{(u)}$ 由下式给出:

$$s_0^{(u)}(t)=s_0(t)+S_0(t/\varepsilon)-1 \text{ 或 } s_0^{(u)}(t)=s_0(t).\quad (14)$$

这里,我们已经用了(10)式以及 $S_0=1$ 这一事实. 利用(12)式,可以求得关于复合物浓度的相应式子:

$$c_0^{(u)}(t)=c_0(t)+C_0(t/\varepsilon)-\frac{1}{\kappa+1},$$

于是

$$c_0^{(u)}(t)=\frac{s_0(t)}{s_0(t)+\kappa}-\frac{e^{-(\kappa+1)t/\varepsilon}}{\kappa+1}.\quad (15)$$

我们求得的各种结果,都是用 $s_0(t)$ 表达的, 而 $s_0(t)$ 又由超越方程 (11) 的隐式给出. 采用各种数值方法 [例如参阅 Ralston (1965)], 可以画出在参量 κ 与 λ 的数值固定时, s_0 作为 t 的函数的图. 此外,正如我们现在要证明的那样,还可求得关于 t 取小值与大值时的有用的分析近似式.

对于小的 t ,用幂级数展开式比较合适. 为了求得这一展开式, 我们需要算出 $t=0$ 时 $s_0(t)$ 的微商. 而 s_0 的初始条件为 $s_0(0)=1$. 从微分方程 (1.10a) 与初始条件(13)也可立即得到

$$\dot{s}_0(0) = -1 + \frac{1+\kappa-\lambda}{1+\kappa} = -(\kappa+1)^{-1}\lambda. \qquad (16)$$

更高阶的项可以采用逐次微分(1.10a)，或者把幂级数代入(11)式之后再令两边系数相等的方法(练习 2) 求出.

对于我们的目标说来，把结果记作

$$s_0(t) = 1 - (\kappa+1)^{-1}\lambda t + O(t^2). \qquad (17)$$

已经足够了.

当 $t \gg \lambda^{-1}$，可把(11)式近似作

$$s_0 + \kappa \ln s_0 \approx -\lambda t. \qquad (18)$$

由于 s_0 是正的，而当 t 取大值时右边等于一个大的负数，因此(18)式左边能得到这样一个数的唯一途径是当 $t \to \infty$ 时，s_0 趋于零[1)]. 当 s_0 是小正数时，$|\ln s_0| \geqslant s_0$。这样，(18)式可以近似为 $\kappa \ln s_0 \approx -\lambda t$，从而给出

$$s_0(t) \approx \exp\left(\frac{-\lambda t}{\kappa}\right)，\text{当 } t \text{ 很大时}. \qquad (19)$$

根据上述结果，当 $\lambda t/\kappa \gg \exp(-\lambda t/\kappa)$ 时，我们取的近似 $|\ln s_0| \gg s_0$ 似乎是自洽的. 由于 $\exp(-2) \approx 0.14$，也许我们可以认为当 $\lambda t/\kappa > 2$ 时，就满足了上述要求. 一开始作出的另一要求是 $t \gg \lambda^{-1}$. 由于 λ 与 κ 的典型数量级为 1，因而可以认为，经过了几个无量纲时间单位之后，也就是当有量纲时间 t^* 经过了 $(k_1\bar{e})^{-1}$ 的几倍之后，底物就会出现(19)式所示的指数衰减.

关于已知结果的评论

直到前不久，生物化学家对于复合物与底物之间的 Michaelis-Menten 关系式 (1b) 的一种非正规的推导方式一直是感到满意的. 正如练习 8 中解释的那样，在了解生物系统中酶的作用这一点上，已经证明这一关系式是十分有用的. 然而，正如预料的那样，为了把基本概念用到更为复杂的情况，最终就引起了一些的问题，其中

1) 根据客观考虑，我们当然可以预期底物最终全部用光了.

需要在更深刻的分析基础上作出了解. 表明这一情况的一个例子是 S. Rubinow 和 J. Lebowitz[1] 的某些工作,它们涉及一个底物与一种酶抑制剂 L-天冬酰胺-氨基水解酶之间的相互作用. (L-天冬酰胺-氨基水解酶这一化合物对于治疗癌症证明是有希望的.)

从我们的详细分析中,能够定量地估计出能够应用 Michaelis-Menten 近似之前必需经过的初始间期有多长. 从(15)式我们看到,只有经过了无量纲持续期为数倍于 $\varepsilon(\kappa+1)^{-1}$ 这样长的一个初始间期之后,c_0 的近似式 $s_0/(s_0+\kappa)$ [见(1b)]才是准确的. 在这一间期中,复合物浓度 $c_0(t)$ 从它的初始零值急剧地上升到大约等于 $(\kappa+1)^{-1}$ 的数值. 实际情况中,典型的初始间期将持续一秒钟或者更短一些.

高阶近似

直至现在为止,我们只是求得了奇异扰动问题的最简单一类内部、外部以及一致近似解. 这些近似还可以通过一种系统的方式去改进. 下面就来说明这一点. 主要思想是假定内部和外部方程的解有级数展开式. (至今得到的近似是这些展开式中的第一项.)象以前那样,通过引入一个中间变量,就可得到唯一决定高阶近似的附加条件,不过需要一种更为精确的匹配.

为了说明求得高阶近似的方法,我们回到酶动力学问题上来. 现在我们通过假设的级数展开来处理内部和外部方程. 对于内部方程(6),需要假定:

$$S(\tau,\varepsilon)=S_0(\tau)+\varepsilon S_1(\tau)+\cdots,$$
$$C(\tau,\varepsilon)=C_0(\tau)+\varepsilon C_1(\tau)+\cdots. \tag{20}$$

经过普通的代换并且并项(练习 3)以后,便发觉最低阶近似 S_0 与 C_0 同前面(8)式给出的当然一样. 下一个较高阶近似项满足

$$S_1'=-S_0+(\kappa-\lambda+S_0)C_0,$$
$$C_1'=-(\kappa+S_0)C_1+(1-C_0)S_1. \tag{21}$$

1) 参阅"与时间有关的酶-抑制基-底物体系的 Michaelis-Menten 动力学", *J. Amer. Chem. Soc.* **92**, 3888—3893 (1970).

把级数代入边界条件(7)之后,我们发现较高阶的近似满足齐次边界条件

$$S_1(0)=0,\quad C_1(0)=0. \tag{22}$$

通过初等的、但是有点冗长的计算,求得(21)与(22)式的解为

$$S_1=-(\kappa+1)^{-2}[\lambda\tau_1+(1+\kappa-\lambda)(1-e^{-\tau_1})],$$

$$\tau_1\equiv(\kappa+1)\tau,$$

$$C_1=-(\kappa+1)^{-4}\Big\{\lambda\kappa\tau_1+\kappa(1+\kappa-2\lambda)+(1+\kappa-\lambda)e^{-2\tau_1}$$

$$+\Big[\frac{1}{2}\lambda\tau_1^2+(1+\kappa-\lambda)(1-\kappa)\tau_1$$

$$-(1+2\kappa+\kappa^2-\lambda-2\kappa\lambda)\Big]e^{-\tau_1}\Big\}. \tag{23}$$

对于外部解,我们也假定可展为 ε 的幂级数:

$$s(t,\varepsilon)=s_0(t)+\varepsilon s_1(t)+\cdots,$$

$$c(t,\varepsilon)=c_0(t)+\varepsilon c_1(t)+\cdots, \tag{24}$$

注意,此处的独立变量是外部变量 t,而在(20)式中我们用了内部变量 τ. 还是同前面一样,最低阶近似 s_0 与 c_0 由(1b)和(11)式给出. 练习4(a)证明了下一级近似满足方程

$$\dot{s}_1=(c_0-1)s_1+(\kappa-\lambda+s_0)c_1,$$

$$\dot{c}_0=s_1(1-c_0)-(\kappa+s_0)c_1. \tag{25a, b}$$

但还缺少初始条件,必须通过匹配来确定.

如果读者引入中间变量并且"尽量合理地"进行匹配,便能很好地完成高阶匹配. 要想知道何谓"合理",需要凭经验(下面我们将介绍某些经验)和灵活的技巧.

在现在的初值问题中,内部解已完全确定了. 我们来构造一个内部底物浓度的中间展开式. 为此,用(9)式中的中间变量 $\tau_i=t/\Psi$ 来表达内部变量. 从 $S_0(\tau)$ 和 $S_1(\tau)$ 的表示式(8)与(23),我们求得

$$S\left(\frac{\tau_i\Psi}{\varepsilon}\right)=S_0\left(\frac{\tau_i\Psi}{\varepsilon}\right)+\varepsilon S_1\left(\frac{\tau_i\Psi}{\varepsilon}\right)+\cdots$$

$$= 1 - \varepsilon(\kappa + 1)^{-2}\left[\lambda(\kappa + 1)\left(\frac{\tau_i\Psi}{\varepsilon}\right)\right.$$

$$\left. + (1 + \kappa - \lambda) + \text{TST}\right] + \cdots$$

$$= 1 - (\kappa + 1)^{-1}\lambda\tau_i\Psi - (\kappa + 1)^{-2}(1 + \kappa - \lambda)\varepsilon + \text{TST} + \cdots \quad (26)$$

仿效 Cole (1968) 的写法，我们已把超越小项缩写为 TST，在 $S_1(\tau_i\Psi/\varepsilon)$ 中，这一项为

$$(\kappa + 1)^{-2}(1 + \kappa - \lambda)\exp(-\tau_i\Psi/\varepsilon).$$

由(9c)式，$\Psi/\varepsilon \to +\infty$. 因此，当 τ_i 固定，$\varepsilon \downarrow 0$ 时，此项指数下降到零. 这一点与代数下降项(如(26)式中用显式表示的 $-(\kappa+1)^{-1}\lambda\tau_i\Psi$) 是大不相同的.

当 t 用中间变量 τ_i 表达时，上面的表式必须与外部解 $s(t)$ 相匹配. 但是如何使(26)式中正比于 Ψ 的项匹配呢? 如果具备了奇异扰动理论的先驱们所具有的眼力以后，我们可以看出，适当选择外部近似 $s_0(t)$ 的"内部最大"值 $s_0(0)$，就可得到最低阶的匹配. 现在我们必须来考查一下更加接近 $t=0$ 处的这一近似值. 事实上，我们不是仅仅利用 $s_0(0)$，还要利用 $s_0(t)$ 在 $t=0$ 邻近展开式中的头两项. 由(17)式

$$s_0(t) = 1 - (\kappa + 1)^{-1}\lambda t + O(t^2)$$

知
$$s_0(\tau_i\Psi) = 1 - (\kappa + 1)^{-1}\lambda\tau_i\Psi + O(\Psi^2).$$

引入中间变量之后，$s_0(t)$ 中的 $O(t)$ 项恰好提供了与(26)式中 $O(\Psi)$ 项匹配所需要的东西.

为了得到更加精确的匹配，不仅要计及 s_0 中的两项，还必须从 s_1 引入一项. 这样，我们应该使(26)式与下式匹配

$$s_0(\tau_i\Psi) + \varepsilon s_1(\tau_i\Psi) + O(\varepsilon^2) = 1 - (k + 1)^{-1}\lambda\tau_i\Psi + O(\Psi^2) + \varepsilon s_1(0) + O(\varepsilon\Psi) + O(\varepsilon^2). \quad (27)$$

这就要求

$$s_1(0) = -(\kappa + 1)^{-2}(1 + \kappa - \lambda), \quad (28)$$

这是对于 s_1 所要求的初始条件.

让我们对于匹配再进一步作一点讨论. 试问: 跟(27)式中 $O(\Psi^2)$ 项(这是从 $s_0(t)$ 中的 $O(t^2)$ 项得来的)相匹配的项将是什么呢? 与之相匹配的项必然来之于(26)式中忽略掉的 $\varepsilon^2 S_2$ 项. 正如在 $\varepsilon S_1(\tau)$ 中与 $\varepsilon\tau$ 成正比的一项在中间区域引起了一个 $O(\Psi)$ 项那样,因此可望在 $\varepsilon^2 S_2(\tau)$ 中与 $\varepsilon^2\tau^2$ 成正比的一项在中间区域中引起了一个 $O(\Psi^2)$ 项. 这样,当进一步取近似时,在一种十分满意的方法中,应该把在某一点取近似时所忽略掉的主导项考虑进去.

作了(28)式的说明以后,我们从(26)和(27)式可以得到

$$[S_0(\tau)+\varepsilon S_1(\tau)]_{\tau=\tau_i\Psi/\varepsilon}-[s_0(0)+ts_0'(0)+\varepsilon s_1(0)]_{t=\Psi\tau_i}$$
$$=O(\Psi^2)+O(\varepsilon\Psi)+O(\varepsilon^2).$$

回忆一下过去所讲的,我们便知道可以加上**二项匹配条件**

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\{[S_0(\tau)+\varepsilon S_1(\tau)]_{\tau=\tau_i\Psi/\varepsilon}$$
$$-[s_0(0)+ts_0'(0)+\varepsilon s_1(0)]_{t=\Psi\tau_i}\}=0. \qquad (29)$$

当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时, 如果 $\Psi^2/\varepsilon\to 0$, 则方程(29)成立. 这便是除了当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时 $\Psi/\varepsilon\to\infty$ 这一早先的要求之外,关于 Ψ 的一种限制. 这意味着我们的匹配是施加在 $O(\Psi)$ 的一个薄层上的,此处

$$\varepsilon\ll\Psi\ll\sqrt{\varepsilon}.$$

例 经过适当的匹配后,找出 $c_1(t)$ 必须满足的初始条件. 试证,这一条件已隐含在(28)式中.

解 利用(8*b*)与(23)式,我们得到

$$C_0\left(\frac{\tau_i\Psi}{\varepsilon}\right)+\varepsilon C_1\left(\frac{\tau_i\Psi}{\varepsilon}\right)=(\kappa+1)^{-1}$$
$$-(\kappa+1)^{-3}\lambda\kappa\tau_i\Psi-(\kappa+1)^{-4}\kappa(1+\kappa$$
$$-2\lambda)\varepsilon+\mathrm{TST}.$$

由(1b)与(17)式得

$$c_0(t)=\frac{s_0(t)}{s_0(t)+\kappa}=\frac{1-(\kappa+1)^{-1}\lambda t+O(t^2)}{\kappa+1-(\kappa+1)^{-1}\lambda t+O(t^2)}$$

$$= (\kappa + 1)^{-1} - (\kappa + 1)^{-3}\lambda\kappa t + O(t^2)$$

故有

$$[c_0(t) + \varepsilon c_1(t)]_{t=\tau_i\Psi} = (\kappa + 1)^{-1} - (\kappa + 1)^{-3}\lambda\kappa\tau_i\Psi$$
$$+ O(\Psi^2) + \varepsilon c_1(0) + O(\varepsilon\Psi).$$

匹配要求下列初始条件

$$c_1(0) = -(\kappa + 1)^{-4}\kappa(1 + \kappa - 2\lambda). \tag{30}$$

但从 (25b) 式有

$$c_1 = -\frac{\dot{c}_0 + s_1 c_0 - s_1}{\kappa + s_0}. \tag{31}$$

微分 (1b) 式，且利用(2)式，我们得到

$$\dot{c}_0 = \kappa\dot{s}_0(s_0 + \kappa)^{-2}. \tag{32}$$

利用上式，(2)式以及(28)式，又得到(30)式.

现在我们能够确定二级近似了. 由 (25b) 式我们能够导出 (31)式，代入 (25a) 式，便得到关于 $s_1(t)$ 的一个方程式. 经过某些计算（练习 5），我们知道该方程连同初始条件(28)式一起，具有下列解：

$$s_1 = \frac{s_0}{s_0 + \kappa}\left[\frac{\kappa - \lambda}{\kappa}\ln\left(\frac{\kappa + s_0}{(1 + \kappa)s_0}\right) - \frac{\kappa - \lambda + s_0}{\kappa + s_0}\right]. \tag{33}$$

因此，从(31)与(32)式可得

$$c_1 = \frac{1}{(\kappa + s_0)^3}\left[\frac{2\kappa s_0\lambda}{\kappa + s_0} - \kappa s_0 + s_0(\kappa - \lambda)\ln\left(\frac{\kappa + s_0}{(1 + \kappa)s_0}\right)\right]. \tag{34}$$

正如在最低阶近似的情况下那样，一致解 $s^{(u)}$ 等于内部解加上外部解再减去其共同部分，不过在现在的情况下，解中已取较高阶项. 例如，令 $s_1^{(u)}$ 是 $s^{(u)}$ 保留 $O(\varepsilon)$ 项的近似. 那么

$$s_1^{(u)}(t, \varepsilon) = [s_0(t) + \varepsilon s_1(t)] + \left[S_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + \varepsilon S_1\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right]$$
$$- [1 - (\kappa + 1)^{-1}\lambda t - \varepsilon(\kappa + 1)^{-2}(1 + \kappa - \lambda)]$$
$$= s_0(t) + \frac{\varepsilon s_0(t)}{s_0(t) + \kappa}\left[\frac{\kappa - \lambda}{\kappa}\ln\left(\frac{\kappa + s_0(t)}{(\kappa + 1)s_0(t)}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{\kappa - \lambda + s_0(t)}{\kappa + s_0(t)}\right] + \frac{\varepsilon(1 + \kappa - \lambda)e^{-(\kappa+1)t/\varepsilon}}{(\kappa + 1)^2}. \tag{35}$$

对于长时间的进一步分析

我们通过发展并阐述在奇异扰动理论中有广泛应用的一些原理，已经研究了酶动力学中的一个问题. 然而，目下要研究的问题属于正在拓广着的(但决不是无所不包的)一类，这是能够通过具有严密基础的"规定"来加以处理的. 正如 Heineken 等人所应用的那样(参阅所引论文)，这种规定出自苏联数学家 A. B. Vasil'eva[1] 的工作. 作为例子，这一工作证明了 $s_1^{(u)}(t, \varepsilon)$ 的上述表达式是准确解 $s^{(e)}(t, \varepsilon)$ 的一种渐近近似. 这是在下列意义上说的：对于足够小的 ε，当 $0 \leqslant t \leqslant T$ 时，

$$|s^{(e)}(t,\varepsilon) - s_1^{(u)}(t,\varepsilon)| < a\varepsilon^2. \qquad (36)$$

量 a 不依赖于 ε 与 t，但可能依赖于常数 T. 换言之，在具有固定长度 T 的整个时间间隔中，误差一致地为 $O(\varepsilon^2)$.

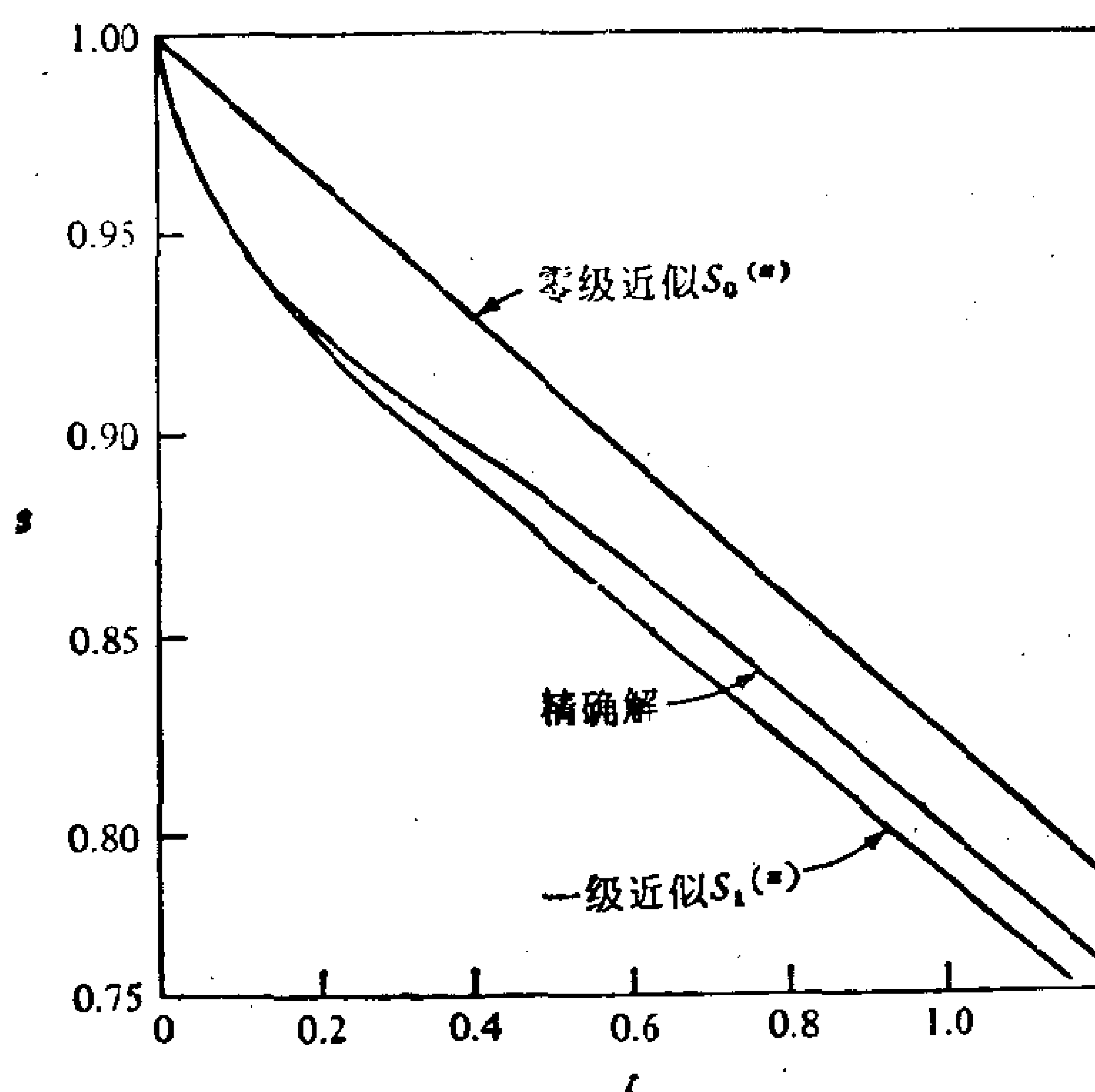


图 10.2 当 $\varepsilon = 0.1$ 时，无量纲底物浓度的近似结果. "准确"解是用数值法得到的. [本图经许可，采自 F. G. Heineken, H. M. Tsuchiya 和 R. Aris 的 "On the Mathematical Status of the Pseudo-Steady State Hypothesis of Biochemical Kinetics," *Mathematical Biosciences* **1**, 95—113, (1967).]

1) *Russ. Math. Surv.* **18**, 13 (1963).

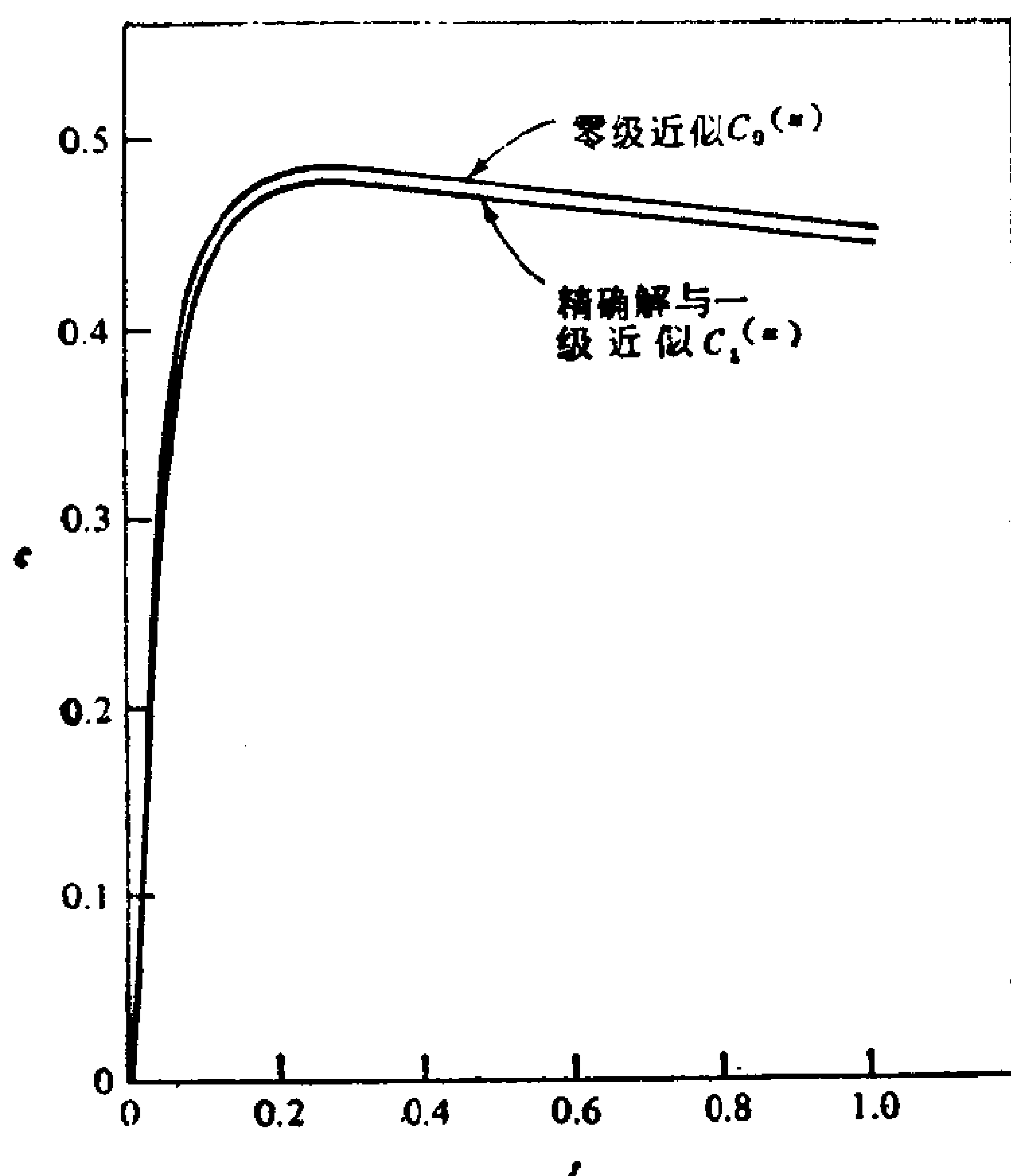


图 10.3 当 $\varepsilon=0.1$ 时，无量纲复合物浓度的近似值.[经许可根据 F. G. Heineken, H. M. Tsuchiya 和 R. Aris 的"On the Mathematical Status of the Pseudosteady State Hypothesis of Biochemical Kinetics," *Mathematical Biosciences* **1**, 95—113(1967). 一文重画]

当人们默察上面刚刚讲述的那类结果时，自然会好奇地问道：把时间限制在一段固定的间隔中，这样做究竟是出于证明过程中的技术困难呢，还是问题本身所要求的呢？看来前者是对的. 只需利用（19）式中的"长时间"近似 $s_0(t)\approx\exp(-\lambda t/\kappa)$，计算比率 $\varepsilon s_1(t)/s_0(t)$，便可看出这一点. 我们得到

$$\frac{s_1(t)}{s_0(t)}\approx\frac{1}{\kappa}\left[\frac{\kappa-\lambda}{\kappa}\ln\frac{\kappa}{(1+\kappa)\exp(-\lambda\tau/\kappa)}-\frac{\kappa-\lambda}{\kappa}\right]$$
$$\approx\frac{\lambda(\kappa-\lambda)t}{\kappa^3}. \tag{37}$$

为了使我们的近似是表观自洽的（采用 6.1 节中的语言），修正项 $\varepsilon s_1(t)$ 应比 $s_0(t)$ 要小. 从上面的计算中，我们看到情况的确如此（如果 $\lambda\neq\kappa$），除非 $\varepsilon t=O(1)$，$t=O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$. 不过当 $t=O(1/$

ε) 时，那么根据(19)式，$s_0 \approx \exp(-\lambda/\kappa\varepsilon)$，这是一个超越小量. 因此，仅当它可以完全忽略时，不自洽性才会影响解. 事实上，对于十分长的时间间隔，直接解法所得的结果与(19)和 (1b) 式的结果是相同的. (见练习 7.)

从我们的评论中可以猜测到不等式(36)是对全部非负的 t 都

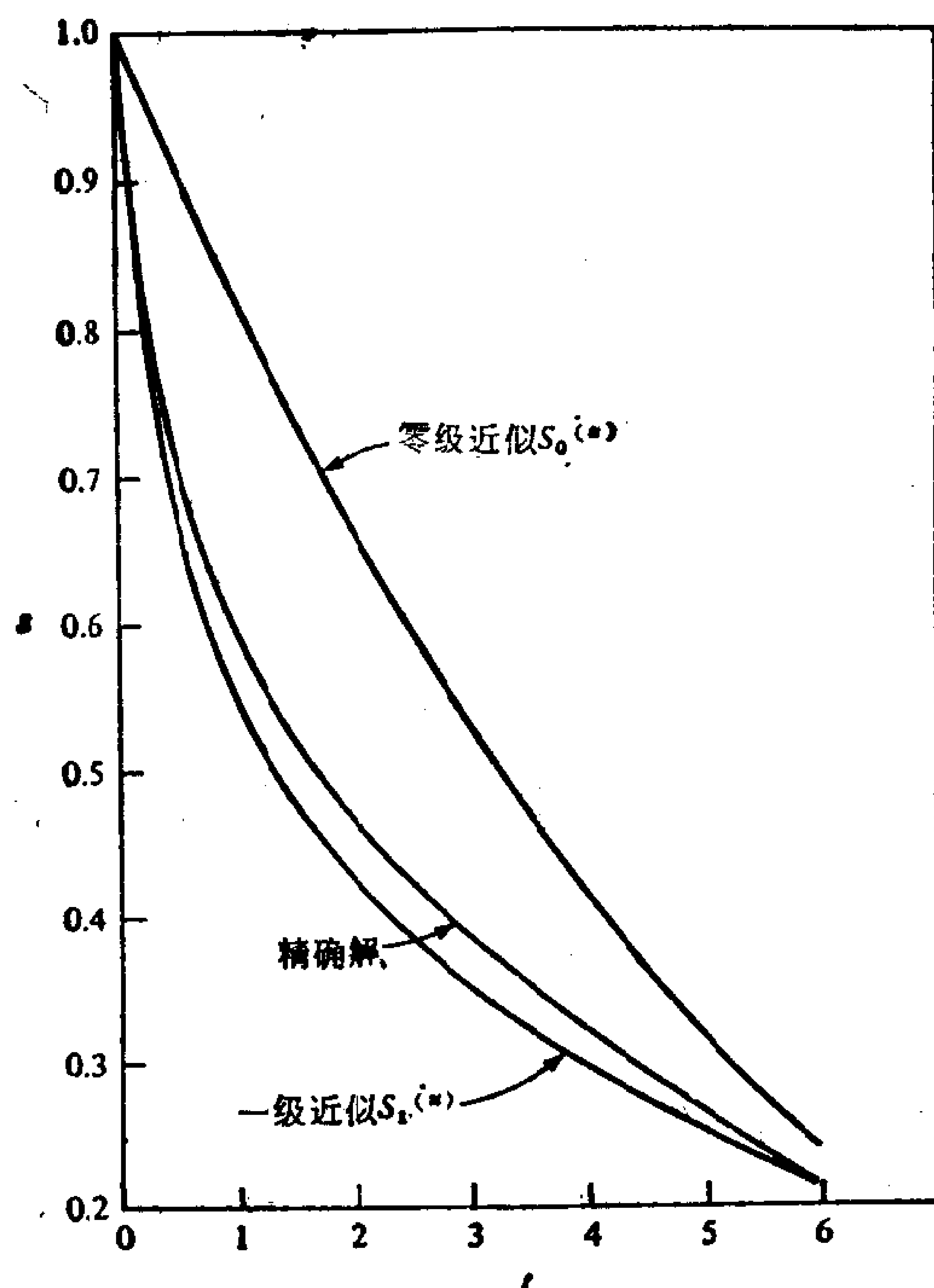


图 10.4 当 $\varepsilon = 1.0$ 时，无量纲底物浓度的近似解[经许可根据下列文献重画：F. G. Heineken, H. M. Tsuchiya 和 R. Aris 的 "On the Mathematical Status of the Pseudosteady State Hypothesis of Biomechanical Kinetics," ***Mathematical Biosciences* 1**, 95—113 (1967).]

成立的. 事实上已经作出了关于这类猜测的证明. [参阅 F. C. Hoppensteadt, "Singular Perturbations on the Infinite Interval," *Trans. Amer. Math. Soc.* **123**, 521—35 (1966).]

关于近似解的进一步讨论

为了对所得近似结果的准确性作出估计，Heineken 等人（参阅所引论文）用数值计算方法找到了支配方程（1.10）的某些“准确”解. 他们采用了关于被异蛋白酶催化的苯甲酰 L-精氨酸乙酯的水解作用的资料，取 $\kappa=1$，$\lambda=0.375$. 其结果示于图 10.2—10.4 中. 这些图与 $\varepsilon=0.1$“这一被生化学家视作十分大的数值”符合得极好，甚至当 $\varepsilon=1.0$ 时也符合得很好.

关于这种化学反应的时间进程所获得的分析知识越多，就越容易从浓度测量中推知各种参量的数值. 分析解使得对于参量变化的研究更加容易起来. 但是对于象刚才作出的研究的最大报偿也许就是这种研究所给出的对科学现象的透彻了解.

从应用数学中提出重要概念的观点看来，现在所讲的例子已经提供了一种示例，去说明怎样在奇异扰动理论中寻找高阶近似. 假如读者很好地了解了现在所讨论的细节，特别是练习 3，4 和 6 的细节，并且还完成了练习 9，（后者涉及一个边值问题的高阶近似），那么应该说他已经初步掌握了前面所述的内容.

练　　习

1. (a) 证明(3)式

　(b) 证明(8)式给出外部近似 S_0 和 C_0.

2. (a) 通过逐次微分 (1.10a) 式，找出 $\ddot{s}_0(0)$ 和 $\dddot{s}_0(0)$.

　(b) 假定 $s_0(t)=1+\sigma_1 t+\sigma_2 t^2+\sigma_3 t^3+\cdots$，把它代入 (11) 式之后并项，找出 σ_1，σ_2 和 σ_3，与 (a) 相比较以检验所得结果.

3. (a) 证明外部展开式中的 $O(\varepsilon)$ 的系数 S_1 和 C_1 满足 (21) 和 (22).

　(b) 找出 S_2 和 C_2 所满足的方程.

　†(c) 如(23)式那样求出 S_1 和 C_1.

4. (a) 证明内部展开式中的 $O(\varepsilon)$ 的系数 s_1 和 c_1 满足(25)式.

(b) 找出 s_2 和 c_2 所满足的方程.

5. †(a) 运用(31)式求出 s_1 的非齐次的一阶微分方程，证明这一方程和初始条件(28)具有解(33).

(b) 找出 c_1 的解,从而证明(34)式.

6. 采用与(35)式相似的方式,找出一致近似 $c_1^{(u)}$.

7. 对于非常长的时间,我们期望 $s=s^*/\bar{s}\ll 1$ 以及 $c=c^*/\bar{c}\ll 1$. 加上这一要求后,试求(10)式的一个近似解. 试证,在解中保留主导项后就可与(19)及(1b)式相匹配，从而证明,即使对于非常长的时间,s_0 和 c_0 仍然给出了 s 和 c 的一阶近似.

8. 这一练习题的目的是要指出生化学家利用 Michaelis-Menten 近似的方法.

(a) 定义产物生成率 V 为 $V=dp^*/dt^*$. 对于任意初始底物浓度 s_0，$V_{\max}$ 为任意时刻的最大产物生成率. 利用(1.3e)证明 $V_{\max}=k_2\bar{e}$.

(b) 利用 Michaelis-Menten 方程(2)，试证当 $s=\kappa$ 时，$V=\frac{1}{2}V_{\max}$. 等价地,证明当 $s^*=K_m$ 时，$V=\frac{1}{2}V_{\max}$，这里 $Km=(k_{-1}+k_2)/k_1$.（这给予 κ 以一种解释，而生化学家喜欢把 **Michaelis 常数**记作 K_m.)

(c) 证明: 可以把这些结果示为图 10.5. 这种双倒数曲线当然是生化学家们所乐于接受的. 因为(如果适用的话)人们可以把数据拟合为一条直线.

†(d) (c)中已给出了关于 κ 的解释. 采用 $\beta=k_{-1}/k_2[\lambda=\kappa/(1+\beta)]$ 而不是用其它无量纲常数 λ 来表示结果,也许更好些. 量 β 是复合物分解成底物和酶的速率，再去除以它产生酶和产物的速率. 但是 λ，或者 κ 和 λ 的其它组合,也可以直接给予解释. 怎样解释 λ? 其它组合又如何解释?

9. 考虑

$$\varepsilon y''+(1+x)y'+y=0,\quad y(0)=0,$$
$$y(1)=1,\quad 0<\varepsilon\ll 1.$$

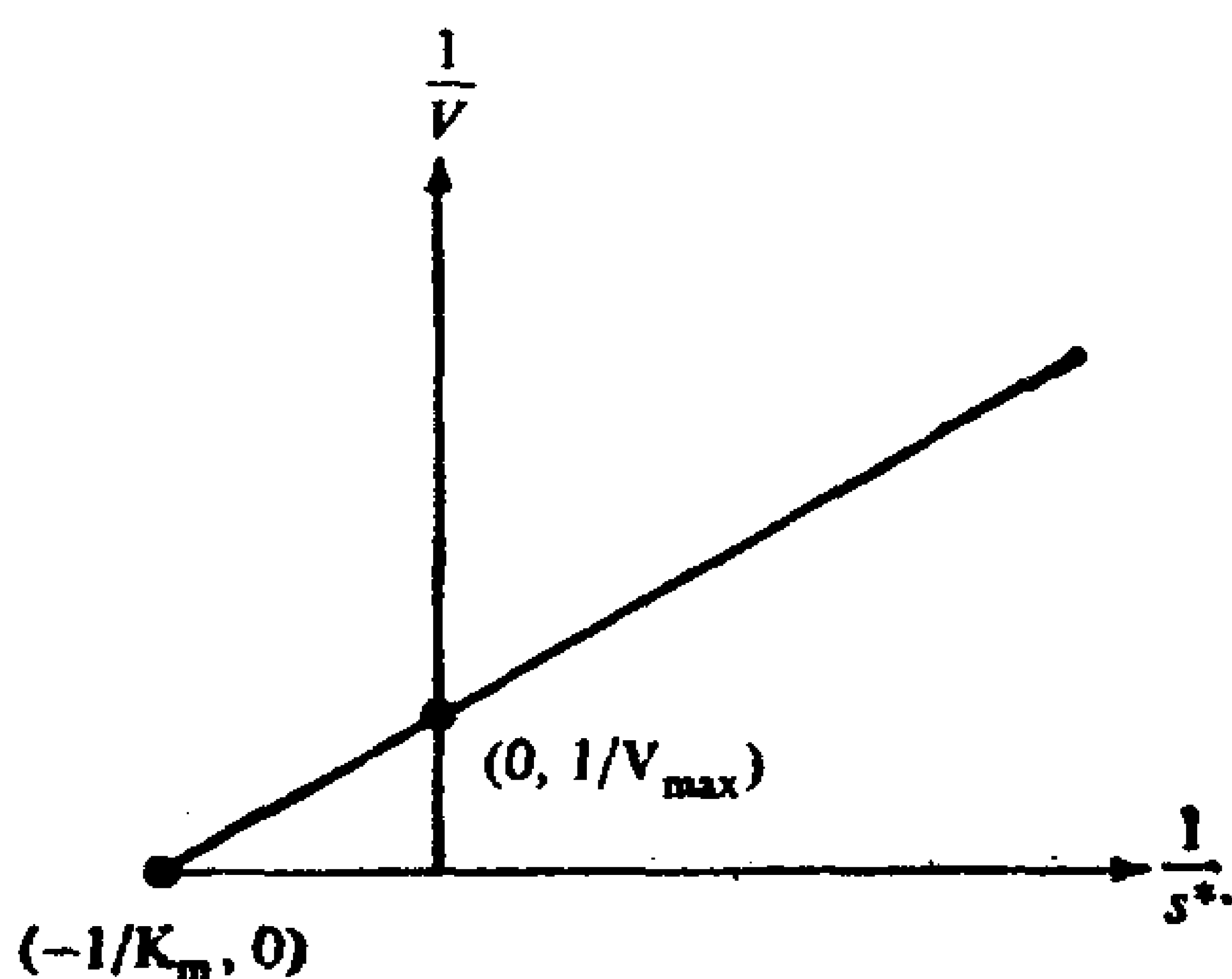


图 10.5 Lineweaver-Burk 的双倒数曲线. 它表示了速度 V(产物生成率)与底物浓度 s^* 的关系.

这是 Cole (1968) 讨论过的示范问题的一种特例.

(a) 试证外部近似是 $y_0(x) = 2/(1+x)$, 而内部近似为 $Y_1(\xi) = 2 - 2\exp(-\xi)$, 此处 $\xi = x/\varepsilon$. 证明,一致近似为 $2/(1+x) - 2\exp(-x/\varepsilon)$.

(b) 试证 $O(\varepsilon)$ 对外部解的贡献为

$$y_1(x) = -\frac{1}{2}(1+x)^{-1} + 2(1+x)^{-3},$$

而对内部解的贡献为

$$Y_1(\xi) = C(1 - e^{-\xi}) - 2\left(e^{-\xi} + \xi - 1 - \frac{1}{2}(\xi^2 e^{-\xi})\right).$$

(c) 试证: 为了确定常数 c, 应令 $\eta(\varepsilon) = x/\Theta(\varepsilon)$, 而且把

$$y_0(\Theta\eta) + \varepsilon y_1(\Theta\eta) = 2 - 2\Theta\eta + O(\Theta^2\eta^2) + \frac{3\varepsilon}{2} + O(\varepsilon\Theta\eta)$$

和

$$Y_0\left(\frac{\Theta\eta}{\varepsilon}\right) + \varepsilon Y_1\left(\frac{\Theta\eta}{\varepsilon}\right) = 2 - 2\Theta\eta + O(\Theta^2\eta^2) + 2\varepsilon + C\varepsilon + \text{TST},$$

进行匹配之后给出 $C = -\frac{1}{2}$.(记住 TST 表示超越小项.)

(d) 求出一致近似,保留至 $O(\varepsilon)$ 的项.

第十一章　应用于单摆问题的三种技巧

本章简要地讨论一些有用的技巧和概念．全部讨论都集中在单摆问题上．我们已经对这个问题作了略为详细的研究，但尽管如此，以后将看到，对这个问题的进一步研究可以获得更多的东西．由此我们得到一个普遍的教训：充分地研究一个恰当地选定的特殊问题，就可以从中得到其量惊人的科学理解．

在 11.1 节中，我们要研究一下小扰动方法在摆的两个平衡(即摆锤朝上和朝下)位置上的最终结果．这就给出了稳定性概念的一个简单示例．这个概念在我们以前关于阿米巴聚合的研究中曾简要地引进过(1.3 节)，在我们对密度分层流体的稳定性进行研究时(15.2 节)，将会更加详细地对这个问题进行分析．

11.2 节说明多重尺度扰动方法的威力．对于单摆，这个方法认为有两个时间尺度，一个是单摆在其中作振动的时间尺度，另一个时间尺度则要长得多，在这段时间里单摆振动的周期有很大的改变．多重尺度或"两种计时"方法近来在很多问题中得到了应用．

11.3 节指出，用位移——角速度平面的分析可以定性地理解单摆全部可能的运动．阻尼和无阻尼摆互成对照．另一种具有广泛应用的方法——相平面方法因此而得到了说明．

这三节是互相独立的，可以按照任何次序去阅读．

11.1　单摆正常平衡和倒置平衡的稳定性

从力学到经济学范围的问题中，一种现象的基本方程往往具有与时间无关的**定常**解或**平衡**解．例如，单摆问题就具有两个这样的解，一个解是摆锤向下(**正常平衡**)，另一个解是摆锤向上(**倒置平衡**)．

为什么我们从未见过一个处于倒置平衡的单摆呢？这是因为

这种单摆是不稳定的，这就是说，极轻微的扰动会造成根本不同的情况．这个相当简单的问题将在这里加以研究，从而为 15.2 节中将要进一步发展的一种一般的技巧提供一个基本的例子．

确定平衡的稳定性

单摆运动所遵循的方程只有在 t 的导数中才含变量 t．很多问题中都出现这种情况，事实上在所有问题中时间起点的选择并不重要，下面我们利用单摆作为这种不因时间的平移而变化的问题的一个例子，来概述研究平衡稳定性的步骤．我们限于与平衡有小偏离或者有**扰动**的情况，因此只需考虑线性方程．尽管如此，仍可得到很多有用的知识．

第一步．确定所有的平衡解，对于单摆．以如下的形式

$$\frac{d^2\theta^*}{dt^2}+\sin\theta^*=0 \tag{1}$$

写出角位移 θ^* 的方程是很方便的．[这里 t 是时间，以单位 $(L/g)^{1/2}$ 来度量．(1) 式的推导已在 2.2 节中给出．]

按照定义，平衡态不随时间而改变；因此，我们寻找一个常数 Θ，使 $\theta^*=\Theta$．于是 $\sin\Theta=0$，并且我们有两种情况：

情况 (i)：$\Theta=0$，正常平衡；

情况 (ii)：$\Theta=\pi$，倒置平衡．

第二步．引进一个度量与平衡态偏离的变量．对于单摆，这样的一个变量为 θ'，这里

$$\theta'=\theta^*-\Theta. \tag{2}$$

用 θ' 表示的基本方程为

$$\frac{d^2\theta'}{dt^2}+\sin(\Theta+\theta')=0. \tag{3}$$

第三步．假定与平衡态的偏离仅为一小扰动，并且在基本方程中只保留线性项．为了得到 θ' 的近似方程，我们采用泰勒公式

$$f(\theta')=f(0)+f'(0)\theta'+f''(\xi)\frac{(\theta')^2}{2!},$$

其中 ξ 在 0 和 θ' 之间. 我们忽略余项,因为它正比于 $(\theta')^2$, 是一个由小量的平方组成的非线性表达式. 这就得到了线性近似:

$$\sin(\Theta + \theta') = \sin\Theta + \theta'\cos\Theta.$$

将此式代入(3)式,在情况 (i) 时我们得到

$$\frac{d^2\theta'}{dt^2} + \theta' = 0, \tag{4a}$$

在情况 (ii) 时则得到

$$\frac{d^2\theta'}{dt^2} - \theta' = 0. \tag{4b}$$

第四步. **确定扰动作为时间函数时的性质**. 我们发现, (4a) 式有解

$$\theta' = \theta_0\cos t + \theta_1\sin t, \tag{5}$$

式中常数 θ_0 和 θ_1 由初始条件

$$\theta'(0) = \theta_0, \qquad \frac{d\theta'}{dt}(0) = \theta_1 \tag{6}$$

来确定. 按照(5)式,如果我们给悬挂在正常平衡位置上的摆以一个微小的扰动,就会引起小的振动。初始扰动位移 θ_0 和速度 θ_1 越小,所引起振动的振幅就越小.

为了研究倒置摆的稳定性,我们利用初始条件(6)求解 (4b),并得到

$$\theta' = \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta_1)e^t + \frac{1}{2}(\theta_0 - \theta_1)e^{-t}, \tag{7a}$$

或等价形式

$$\theta' = \theta_0\cosh t + \theta_1\sinh t. \tag{7b}$$

结果的讨论

倒置摆是小扰动几乎肯定随时间增加的一种平衡态的例子. 因为微小扰动是不可避免的, 这种不稳定平衡点在实际上是不应该观察到的[1].

---

1) 如果支点适当地振动, 那末单摆可以在倒置位置上继续停留. (例如) 参看 J. P. Den Hartog, *Mechanical Vibrations* (New York: McGraw-Hill, 4th ed., 1956), pp. 348-50.

当 $\theta_1 = -\theta_0$ 时，出现一种例外的情形．这里 (7a) 式表明，$\theta'(t)$ 按指数规律衰减为零．显然，对于偏离平衡位置为 θ_0 的初始角位移，初始角速度 $-\theta_0$ 正好足以最终把单摆恢复到倒置平衡位置．虽然这个例外情形在理论上使人感到有兴趣，但它几乎没有实际意义．

因为存在着随时间增长着的小扰动，所以摆锤向上的平衡称为**不稳定**的平衡．这个定义考虑到下述事实，即只有特别的初始条件才会排除这种增长着的解．

对于所考虑的那类扰动，摆锤向下的平衡称为**随遇稳定**平衡，这是因为这些小扰动既不增长也不衰减的缘故．另一个名词**李雅普诺夫稳定**也用来描述这种情况，倘若初始位移充分小，如果(象这里那样)扰动解保持任意接近于平衡解，那末就可应用这个术语．

11.3 节考虑阻尼效应．在那里我们从稍为广泛的观点看到，偏离正常平衡的小扰动最终会完全消失掉，因而重新达到平衡．在这种情况下，我们就称为**渐近稳定**．事实上，不管初始条件怎样，当有阻尼存在时，摆最终在摆锤向下的位置上静止下来，这个位置因此而称为**总体渐近稳定的**．大量的（而且还有更多的）定义，暗示出稳定性理论所包含的困难．

我们提醒读者，我们已经删掉了所有的非线性项，这是研究小扰动的一个合理的方法，但却是一个没有严格证明正确的方法．关于这个问题，我们作如下的评述：也许，除了随遇平衡这种难以确定的两可情况外，我们指望所得的结果是正确的，在随遇平衡的情况下，问题的微小改变就可能以任意一种方式接近于系统的状态．

在 15.2 节中，会找到对稳定性理论更为广泛的研究．在那里，我们分析了密度变化的流体的稳定性．如同人们所预期的那样，顶重摆和顶重流体之间存在着密切的相似关系．但后一种情况比起前一种情况要复杂得多，对它的描述要涉及偏微分方程组．

练　　习

1. 在生物学的应用中，有时假定有机体在时间 t 的总数 P 遵循**逻辑斯蹄**或 Verhulst-Pearl **方程**

$$\frac{dP}{dt} = aP(1 - PE^{-1}),\quad t = \text{时间}, E = \text{一个常数}. \tag{8}$$

(a) 确定平衡总数的大小.

(b) 检验其稳定性.

(c) 由从 (a) 和 (b)得到的知识,讨论总数的定性特性. 检验 P 分别在增加或减少时的大小以加强你的判断.

(d) 精确地求解(8)式,并把结果与 (a), (b) 和 (c) 加以比较.

2. 常用的另一种人口方程与 Gompertz 这个名字联系在一起，它的形式为

$$\frac{dP}{dt} = aP(\ln E - \ln P).$$

对于这个模型,请完成练习 1(a)、(b)、(c) 的工作.

3. 还有一种人口模型为

$$\frac{dP}{dt} = aP(E_1P^{-c} - E_2),$$

式中"竞争常数" c 满足 $0 < c \leqslant 1$. 对这个模型完成练习 1(a)、(b)、(c) 的工作.

11.2　多重尺度展开

11.1 节的稳定性分析揭示了各种平衡点之间的区别，而这种分析用线化理论是很容易完成的. 但是，我们所用方法的正确性是有限的. 在我们处理倒置单摆时，这种局限性十分明显. 解 (1.7) 预示了一个按指数规律连续增加的位移，但是,如果轻打一下倒置摆，我们并不指望它一直以增加着的速度旋转. 不过经过一定的时间以后,就不能指望 (1.7) 式适用了,因为在 θ' 的大的预测值和"小扰动理论"之间存在着矛盾. 与式 (1.5) 没有明显的矛

盾，但正如我们在 7.1 节中所讨论的那样．这个解同样具有随着时间推移而变得越来越明显的不足之处．在第二章中我们已指出弥补这种不足之处的一个方法，这就是庞卡莱引进的扰动自变量，这个自变量是试图用来考虑下列事实的：小振动有一个轻度依赖于振幅的周期．我们现在来考虑另一种方法．

在讨论奇异扰动时，我们曾指出，一些问题的解答不止一重尺度．例如，在例证性的边值问题（方程 9.2.1）中，

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0;\ y(0) = 0,$$

$$y(1) = 1,\ 0 < \varepsilon \ll 1,$$

在 $x = 0$ 附近的边界层中，解随尺度 $1/\varepsilon$ 迅速变化，尔后在其余的区域中，它随尺度 $O(1)$ 比较缓慢地变化．类似的变化出现在第十章的酶动力学中．我们在 7.1 节的摆问题中看到，正则扰动解是失败的，因为在长时间尺度 $O(1/a^2)$ 上摆的位置比起线性化理论所预测的值有很大的偏离，而与周期无关的振幅 $O(1)$ 也有微小的误差．

明确地正式承认存在着多重尺度，导致了幂次很高的近似方法，这一点近年来变得日益明显了．例如，考虑简单问题

$$\ddot{y} + 2\varepsilon\dot{y} + (1+\varepsilon^2)y = 0,\ y(0) = 0,$$

$$\dot{y}(0) = 1 \quad \left(\cdot = \frac{d}{dt}\right). \tag{1}$$

精确解为

$$y(\varepsilon, t) = \exp(-\varepsilon t)\sin t. \tag{2}$$

假设我们应用正则振动理论去得到 ε 的幂级数展开式，并假定

$$y(t, \varepsilon) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \cdots. \tag{3}$$

那末我们便得到(2)式的展式如下

$$y(t, \varepsilon) = \sin t - \varepsilon t\sin t + \frac{1}{2}\varepsilon^2 t^2 \sin t + \cdots. \tag{4}$$

如同我们所指望的那样包含 t 的幂次的级数项出现了，并且限制了展式的用途．另一方面，假定要寻找一个形如 $y = f(t, \varepsilon t, \varepsilon)$

的解,其中

$$f(t, \tau, \varepsilon) = f^{(0)}(t, \tau) + \varepsilon f^{(1)}(t, \tau) + \varepsilon^2 f^{(2)}(t, \tau) + \cdots, \quad (5)$$

这里显然认识到存在二重尺度. 与精确的答案相比，我们知道 $f^{(i)}(t, \tau) \equiv 0$，$i \geqslant 1$，并且

$$f^{(0)}(t, \tau) = e^{-\tau} \sin t, \text{ 因此 } f(t, \varepsilon t, \varepsilon) = e^{-\varepsilon t} \sin t. \quad (6)$$

在这个专门设计的问题中,展式的第一项给出了精确解.

现在我们用以尺度化形式(7.1.4)写出的单摆问题来说明多重尺度化方法:

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \frac{\sin(a\Theta)}{a} = 0;$$

$$t = 0 \text{ 时}, \Theta = 1, \quad \frac{d\Theta}{dt} = 0. \quad (7a)$$

我们将证明,如果取象(5)式那样的展式，那末就可以系统地得到级数中的各项. 这就形成了一个对逐步增长的时间间隔成立的近似.

(7a) 式的解 Θ 实际上是 a^2 的函数 (见 7.1 节). 为了阐明这一点，我们引进 $a^2 = \varepsilon$，并按泰勒级数展开 $\sin(a\Theta) = \sin(\varepsilon^{1/2}\Theta)$，于是方程 (7a) 为下式所代替

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \Theta - \frac{1}{6}\varepsilon\Theta^3 + \cdots = 0. \quad (7b)$$

把一个双尺度级数代入摆方程

为了得到 (7b) 的近似解，我们假定 $\Theta(t, \varepsilon) = f(t, \varepsilon t, \varepsilon)$，且在某种意义下形式(5)的展式成立. 在计算导数时，例如,如果 $f^{(0)}(t, \tau) \equiv \exp(-\tau)\sin t$，那末

$$\frac{d}{dt} f^{(0)}(t, \varepsilon t) = \frac{\partial}{\partial t}(e^{-\tau}\sin t)\bigg|_{\tau=\varepsilon t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial}{\partial \tau}(e^{-\tau}\sin t)\bigg|_{\tau=\varepsilon t} \frac{d\tau}{dt} = e^{-\varepsilon t}\cos t - \varepsilon e^{-\varepsilon t}\sin t.$$

更一般地可以方便地写出

$$\frac{d}{dt}f^{(0)}(t,\varepsilon t)=f_1^{(0)}\frac{dt}{dt}+f_2^{(0)}\frac{d\tau}{dt}=f_1^{(0)}+\varepsilon f_2^{(0)},$$

式中下标 i 表示对第 i 个变量的偏微商,因此,如果我们假定

$$f(t,\varepsilon t,\varepsilon)=f^{(0)}(t,\varepsilon t)+\varepsilon f^{(1)}(t,\varepsilon t)+\varepsilon^2 f^{(2)}(t,\varepsilon t)+\cdots,\quad(8)$$

那末

$$\frac{d}{dt}f(t,\varepsilon t,\varepsilon)=f_1^{(0)}+\varepsilon[f_2^{(0)}+f_1^{(1)}]+\varepsilon^2[f_2^{(1)}+f_1^{(2)}]+\cdots\quad(9)$$

和

$$\frac{d^2}{dt^2}f(t,\varepsilon t,\varepsilon)=f_{11}^{(0)}+\varepsilon[f_{12}^{(0)}+f_{21}^{(0)}+f_{11}^{(0)}]$$
$$+\varepsilon^2[f_{22}^{(0)}+f_{12}^{(1)}+f_{21}^{(1)}+f_{11}^{(2)}]+\cdots,\quad(10)$$

这里(9)和(10)式右边的所有函数都是在 $(t,\varepsilon t)$ 处计算的. 假定二阶偏导数连续,$f_{21}^{(i)}=f_{12}^{(i)}$,那末我们就可以把(10)式写作

$$\frac{d^2}{dt^2}f(t,\varepsilon t,\varepsilon)=f_{11}^{(0)}+\varepsilon[2f_{12}^{(0)}+f_{11}^{(1)}]$$
$$+\varepsilon^2[f_{22}^{(0)}+2f_{12}^{(1)}+f_{11}^{(2)}]+\cdots.\quad(11)$$

我们现在已准备好去进行把假定的级数代入基本方程这一标准步骤. 利用(10)式,我们因此而发现,如果 Θ 为级数(8)所给定,那末(7b) 便意味着

$$0=[f_{11}^{(0)}(t,\varepsilon t)+f^{(0)}(t,\varepsilon t)]+\varepsilon\Big[f_{11}^{(1)}(t,\varepsilon t)+f^{(1)}(t,\varepsilon t)$$
$$+2f_{12}^{(0)}(t,\varepsilon t)-\frac{1}{6}(f^{(0)}(t,\varepsilon t))^3\Big]+\cdots.$$

因为方括号中的各项都依赖于 ε,这样我们在这里就出现了其中幂级数并不恒等于零的情况. 令那些与 ε 的逐次幂相乘的因子都等于零是不必要的,然而这却是充分而方便的. 因而我们强加如下条件:

$$f_{11}^{(0)}+f^{(0)}=0,\quad(12)$$

$$f_{11}^{(1)}+f^{(1)}=\frac{1}{6}[f^{(0)}]^3-2f_{12}^{(0)}.\quad(13)$$

利用(9)式,初始条件(7)式要求

$$f^{(0)}(0, 0) = 1, \ f_1^{(0)}(0, 0) = 0; \tag{14}$$

$$f^{(1)}(0, 0) = 0, \ f_1^{(1)}(0, 0) = -f_2^{(0)}(0, 0). \tag{15}$$

求解最低阶方程

我们面临着偏微分方程(12). 如果把 f 看作变量 t 和 τ 的函数,那末这个方程可以写作

$$\frac{\partial^2 f^{(0)}}{\partial t^2} + f = 0.$$

我们看到 τ 只作为参数出现;因而,事实上,与用正则扰动理论求得摆问题近似解时所遇到的简单的常微分方程相比,该偏微分方程并不难. 因而

$$f^{(0)}(t,\tau) = A(\tau)\cos t + B(\tau)\sin t, \tag{16}$$

式中"任意常数"A 和 B 必须看作 τ 的函数. 初始条件(14)导致下列要求

$$A(0) = 1, \quad B(0) = 0. \tag{17}$$

眼下我们本质上达到了正则扰动计算中所得到的同样的结论,在正则扰动计算中,初级近似为

$$\Theta \approx 1 \cdot \cos t + 0 \cdot \sin t. \tag{18}$$

我们并不知道 $A(\tau)$ 和 $B(\tau)$ 是什么,但是我们却知道它们的初值分别为 1 和零. 我们也知道在解中出现的正是 $A(\varepsilon t)$ 和 $B(\varepsilon t)$,因此在 t 变到与 $1/\varepsilon$ 可以相比为止,这些量将保持接近于它们的初值. 方程(18)并不比(16)和(17)式给出更充分的信息,因为我们知道,只是当 $t = 0(1/\varepsilon)$ 时(18)式才变为劣质近似.

较高阶的近似,排除共振项

为了继续进行计算,我们把至此所得的结果代入(13)式得到

$$\frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial t^2} + f^{(1)} = \frac{1}{6}(A\cos t + B\sin t)^3$$
$$- 2(-A'\sin t + B'\cos t),$$

式中 $' = d/d\tau$, [如练习 2(a) 中那样]利用三角函数,我们把上面

的方程写为下述形式

$$\frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial t^2}+f^{(1)}=\left[2B'+\frac{1}{8}(A^3+AB^2)\right]\cos t$$
$$+\left[-2A'+\frac{1}{8}(B^3+A^2B)\right]\sin t$$
$$+\frac{1}{24}(A^3-3AB^2)\cos 3t$$
$$-\frac{1}{24}(B^3-3A^2B)\sin 3t, \tag{19}$$

因为(19)式“本质上”是一个常微分方程，我们可以利用待定系数法．按照这个方法．因为 $\cos t$ 和 $\sin t$ 是齐次方程的解,相应的特解将分别包含正比于 $t\cos t$ 和 $t\sin t$ 的项．

由于(19)式的右端中存在 $\cos t$ 和 $\sin t$，这将因此而迫使级数(18)中的项 $\varepsilon f^{(1)}$ 包含正比于 $\varepsilon t\cos t$ 和 $\varepsilon t\sin t$ 的项．然而 ε 是小量，与最低阶项近似 $f^{(0)}$ 相比，这些项最终将变得不再可以忽略．我们希望避免这一点．事实上,我们将要求逐次逼近 $\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i f^{(i)}$ 随时间恰好一致地为 ε^N 阶．为此，*我们要求每一个 $f^{(i)}(t,\varepsilon t)$ 对于 $0\leqslant t<\infty$ 是有界的．这种有界性条件的有规律的应用构成了多重尺度方法的核心．*

在现在这个例子中,有界性条件要求把(19)式中正比于 $\cos t$ 和 $\sin t$ 的“共振”强迫项去掉;因而我们必须有

$$2B'+\frac{1}{8}(A^3+AB^2)=0,$$
$$-2A'+\frac{1}{8}(B^3+A^2B)=0. \tag{20a, b}$$

起初这个非线性方程组看起来可能是很可怕的，但是不久我们就会注意到，因为至少在 $\tau=0$ 处[因为 $A(0)=1$] $A(\tau)\neq 0$，我们可以用(20)式得到 $A^2+B^2=-16B'/A$．于是代入(20 b)式后便得

$$-2A' - \frac{2BB'}{A} = 0, \text{ 或者 } (A^2 + B^2)' = 0.$$

利用初始条件(17)式,我们立即推得 $A^2 + B^2 = 1$. 代回(20)式,我们得到 $16B' + A = 0$, $-16A' + B = 0$. 再利用 (17) 式,我们得到 [练习 (2b)]

$$A(\tau) = \cos\frac{\tau}{16}, \quad B(\tau) = -\sin\frac{\tau}{16}. \tag{21}$$

我们利用(16)式,并回想起 $\varepsilon = a^2$,这样就得到结论:摆的振幅可以用下列最低阶表达式作为近似:

$$\begin{aligned} f^{(0)}(t, a^2t) &= \cos\frac{a^2t}{16}\cos t - \sin\frac{a^2t}{16}\sin t \\ &= \cos\frac{1+a^2}{16}t. \end{aligned} \tag{22}$$

这与(2.2.35)和(2.2.37)式的结果相一致.

由(20)式,(19)式变为 [练习 2(c)]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial t^2} + f^{(1)} &= \frac{1}{24}(A^3 - 3AB^2)\cos 3t \\ &\quad - \frac{1}{24}(B^3 - 3A^2B)\sin 3t. \end{aligned} \tag{23}$$

这个方程有解 [练习 2(d)]

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= C(\tau)\cos t + D(\tau)\sin t - \frac{1}{192}(A^3 - 3AB^2)\cos 3t \\ &\quad + \frac{1}{192}(B^3 - 3A^2B)\sin 3t + O(\varepsilon). \end{aligned} \tag{24}$$

至此,关于 C 和 D 所有已知的东西就是(15)式所要求的初始条件.原则上,计算是可以继续下去的,但是我们将不再继续做下去,这是因为主要的概念已示明了.

我们注意到在(24)式中出现的正比于 $\cos 3t$ 和 $\sin 3t$ 的频率较高的谐波.显然,如果继续进行计算将继续出现其它的谐波.这种谐波的产生是一种非线性现象的特征.

单摆的简单的线性理论在预测周期时产生了 $O(a^2)$ 的误差．如同我们已看到的那样，这意味着预测在 $t=O(a^{-2})$ 时就变得不可靠了．改进后的结果(22)式对周期作了 $O(a^2)$ 的修正，因而在 t 变为 $O(a^{-4})$ 为止可指望预测都是可靠的．练习 4 和 5 表明，下一级近似应能适用到 $t=O(a^{-6})$ 为止．对于在无界区域上的非线性问题，逐次逼近足以覆盖这些区域的越来越大的部分，这是这类问题的一种典型的解法．

提要和讨论

让我们来总结一下本方法的基本要点．考虑一个 $f(t,\varepsilon)$ 的常微分方程，其中 ε 是小参数．假定一致成立的正则扰动展开失效，或者因为其他的理由，导致了 f 按两种尺度变化的推测，一种尺度是 $O(1)$，另一种尺度是 $O(\varepsilon)$．那末可按下列步骤进行计算．

(a) 取展开式

$$f(t,\varepsilon)=f^{(0)}(t,\tau,\varepsilon)+\varepsilon f^{(1)}(t,\tau,\varepsilon)+\varepsilon^2 f^{(2)}(t,\tau,\varepsilon)+\cdots,\quad \tau\equiv\varepsilon t.$$

(b) 把展开式代入原方程，并让 ε 逐次增高的幂次的系数等于零，从而得到 $f^{(i)}$ 的一系列的方程．

(c) 要求 $f^{(i)}$ 在全部时间里保持有界，以排除不确定性．

(d) 逐次求解 $f^{(i)}$ 的方程．

注意．(i) 较高阶的近似往往需要用 $\tau_2\equiv\varepsilon^2 t$, $\tau_3\equiv\varepsilon^3 t$ 等来补充变量 t 和 $\tau\equiv\varepsilon t$．（参阅练习 5 和 6．）(ii) $f^{(i)}$ 的方程是偏微分方程，但它们仅在非齐次项中涉及这两个参数．因此在这点上就有点额外的困难，因为“额外”变量在很多方面所起的作用有点象参变数．

我们已为在一类问题中使用多重尺度技巧指出了方向．但这肯定不是一个普适的方法．照例，灵活的态度会帮助读者去扩大他所处理的那类问题．实践也是如此，这就犹如会受到练习的激励那样．

现在我们可以比以前更加精确而实用地表示出奇异扰动方法适用的问题．这些问题具有这样的性质：系数只与自变量有关的、合适的小参数的幂级数展开式，对自变量的全部有关值并不一致成立．我们已看到可以有利地用于这种问题的三种奇异扰动方法，这些方法包括 (i) 引进稍加改变的自变量(第二章)；(ii) 在不同区域中使用不同尺度化的变量，用匹配技术把这些分离的展式连接起来 (9.2 节)；(iii) 应用多重尺度假设 (本节)．对于一个已知的简单问题，往往可以决定这些方法中那一种是“最好的”．但是更经常的是即使是简单问题，这种决定也涉及到判断是否有价值的问题，例如，为了得到一种比较机械的方法，在计算中牺牲某些简洁性是否“比较好”的问题．

练　　习

1. 假定方程(1)的解为(5)式．试证明将 (5) 式代入 (1) 式就得到(6)式．

2. 证明 $f^{(1)}$ 满足(19)式．

证明(21)式．

证明(23)式．

证明(24)式．

3. 考虑

$$\ddot{y}+\varepsilon\dot{y}^3+y=0;\ y(0)=0,\ \dot{y}(0)=1.$$

假定

$$y(t,\varepsilon)=f^{(0)}(t,\tau)+\varepsilon f^{(1)}(t,\tau)+\cdots,\ \text{式中}\ \tau=\varepsilon t.$$

并得到近似解

$$y\approx\left(1+\frac{3\varepsilon t}{4}\right)^{-1/2}\sin t+O(\varepsilon).$$

试给出这个问题及其解答的物理解释．

4. 庞加莱注意到，引进一种稍有修改的时间尺度 τ，这里

$$t=\tau(1+h_2a^2+h_4a^4+\cdots),\tag{25}$$

将得到一种对单摆问题成立的小扰动解．(请不要把这个 τ 与

其他地方所用的 εt 的简写相混淆.)在 2.2 节中逐个系数选择得使各个微分方程中的"共振"项消除掉. M. Pritulo[1] 曾建议,在这种问题中,人们应该作正则扰动计算,然后引进一种新的时间尺度,这种尺度应以排除长期(增长着的)项的方式来选择.本练习把 Pritulo 的方法应用于单摆问题.

(a) 为了找出对摆问题周期的一阶修正,在(7.1.24)中用 $\tau(1+h_2a^2+\cdots)$ 代替 t,并证明当 $h=\frac{1}{16}$ 时,长期项不再存在.在这样做时,证明并利用近似 $\cos(\tau+h_2a^2)\approx\cos\tau-h_2\tau a^2\sin\tau$.

(b) 作为寻找系数 h_4 的开始,试证明,如果(25)式成立,那末

$$\cos t=\cos\tau-(h_2\tau\sin\tau)a^2-\frac{1}{2}(h_2^2\tau^2\cos\tau+2h_4\tau\sin\tau)a^4+\cdots.$$

(c) 给定(25)式,试证明(7.1.24)式和练习(7.1.3)的正则扰动解 $\Theta_0(t)+a^2\Theta_2(t)+a^4\Theta_4(t)$ 之中的长期项为

$$-\left(h_2-\frac{1}{16}\right)a^2\tau\sin\tau-\left(\frac{h_2^2}{2}-\frac{h_2}{16}+\frac{1}{512}\right)a^4\tau^2\cos\tau$$
$$-\left(h_4+\frac{h_2}{192}-\frac{h_2}{16}\right)a^4\tau\sin\tau+\left(\frac{h_2}{64}-\frac{1}{1024}\right)a^4\tau\sin 3\tau.$$

并证明若

$$t=\tau\left[1+\frac{1}{16}a^2+\frac{11}{3072}a^4+\cdots\right],$$

则上面的这些项为零.

(h_2 的一种选择使三个表达式为零,这一点起初似乎是不可思议的,但这却仅仅是下述事实的结果:我们已选择了解的正确形式,因此每一件事都必须证明是有效的.)

(d) 利用 (c),解

$$\cos\tau+\left(\frac{a^2}{192}\right)(\cos\tau-\cos 3\tau)+\cdots$$

1) *J. Appl. Math. Mech.* **26**, 661-67 (1962).

中 τ 的周期为 2π，而 t 的周期为

$$2\pi\left[1+\frac{1}{16}a^2+\frac{11}{3072}a^4+\cdots\right].$$

把(2.2.19)式的被积函数展为 a^2 的幂级数，试证明上述答案. **注意.** Pritulo 的方法给出了一级修正的一个简易的方法.然而在高阶近似时该方法似乎并没有优点. 于是，与庞卡莱的原始方法相反，人们实际上就必须计算长期项，而长期项是后来被抛弃的.

5. 很明显，根据练习 4 用多重尺度方法确定对单摆周期的高阶修正需要下列形式的假设:

$$\Theta = f^{(0)}(t, \varepsilon t, \varepsilon^2 t) + \varepsilon f^{(1)}(t, \varepsilon t, \varepsilon^2 t)$$
$$+ \varepsilon^2 f^{(2)}(t, \varepsilon t, \varepsilon^2 t) + O(\varepsilon^3) \quad (\varepsilon \equiv a^2).$$

原来计算是非常可怕的.

(a) 为了对事情是如何进行的得到一些概念，试证明如果取(8)式的假设，并把计算进行到 $O(\varepsilon^2)$，那末这个方法是失败的.

(b) 假定 $f^{(i)}$ 也是 $\varepsilon^2 t$ 的函数，至少把计算进行到 $O(\varepsilon)$.

6. 对一个涉及三重尺度的比较简单的计算，考虑

$$\ddot{y} + 2\varepsilon\dot{y} + y = 0; \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

假定

$$y = f^{(0)}(t, \tau_1, \tau_2) + \varepsilon f^{(1)}(t, \tau_1, \tau_2)$$
$$+ \varepsilon^2 f^{(2)}(t, \tau_1, \tau_2) + O(\varepsilon^3),$$

式中 $\tau = \varepsilon t$, $\tau_2 = \varepsilon^2 t$.

(a) 试证明

$$f^{(0)}_{00} + f^{(0)} = 0,$$
$$f^{(1)}_{00} + f^{(1)} = -2f^{(0)}_{01} - 2f^{(0)}_0,$$
$$f^{(2)}_{00} + f^{(2)} = -2f^{(0)}_{02} - f^{(0)}_{11} - 2f^{(0)}_1 - 2f^{(1)}_{01} - 2f^{(1)}_0,$$

式中下标 0, 1, 2 分别表示对 t, τ_1 和 τ_2 的偏导数. 初始条件是什么?

(b) 试证明 $f^{(0)} = A(\tau_1, \tau_2)\cos t + B(\tau_1, \tau_2)\sin t$

(c) 试证明

$$A(\tau_1, \tau_2) = e^{-\tau_1}\alpha(\tau_2), \quad B(\tau_1, \tau_2) = e^{-\tau_1}\beta(\tau_2),$$

$$f^{(1)} = C(\tau_1, \tau_2)\cos t + D(\tau_1, \tau_2)\sin t.$$

(d) 求 $\alpha(\tau_2)$ 和 $\beta(\tau_2)$ 并把 $f^{(0)}$ 与精确解相比较.

7. 为了证明边界层问题可以用多重尺度法加以处理，试再考虑下述例子[方程(9.2.1)]

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0;\ y(0) = 0,\ y(1) = 1,\ 0 < \varepsilon \leqslant 1.$$

假定

$$y = f^{(0)}(x, X) + \varepsilon f^{(1)}(x, X) + \cdots + \text{超越小项},$$

式中 $X = x/\varepsilon$.

(a) 试证明把级数代入微分方程,消去 $O(\varepsilon^{-1})$ 项得到

$$f^{(0)}(x, X) = C_1(x) + C_2(x)\exp(-2X).$$

†(b) 试证明 $O(1)$ 项为零的要求为

$$f_{xx}^{(1)} + 2f_x^{(1)} = -[2C' + C_1] + [2C_2' - C_2]\exp(-2X).$$

为什么我们必须要求 $2C_1' + C_1 = 0$?为什么不必要求 $2C_2' - C_2 = 0$? 试证明

$$C_1(x) = \exp\left[\frac{1}{2}(1 - x)\right],$$

而 $C_2(x)$ 除了 $C_2(0) = -e^{-1/2}$ 以外是并未具体规定的. 把你的解法与用其他方法得到的问题的解答相比较.

(c) 当 ε 是负的小数时会发生些什么?

11.3 相平面

我们以前对单摆的讨论，全都是单摆稍偏离平衡位置时所呈现出的情况,在很宽广的一类问题中,例如在那些遵循非线性偏微分方程的问题中,这些讨论所用的扰动方法都是有用的.(方法必须推广,但是原则却保持不变.)

事实上，单摆问题可以用椭圆积分以封闭的形式求出. 我们并未遵循这一条途径，因为解可以用已知函数的形式精确地表示

出来的情况是很少的，所以对精确解的讨论并不给出具有所希望的广泛适用的观念．我们现在采用介于这些扰动理论和精确解之间的观点．这就使我们能够说明关于非线性问题的重要的相平面方法．

我们希望考虑一下所有可能的初始条件；因此精确的尺度化是没有帮助的．无量纲化仅仅把所出现的参数的数目加以减少，因此我们从标准的量纲形式的摆方程[方程 (7.11)]出发：

$$\frac{d^2\theta^*}{d(t^*)^2} + \frac{g}{L}\sin\theta^* = 0, \quad \theta^*(0) = a,$$

$$\frac{d\theta^*}{dt^*}(0) = \Omega. \tag{1}$$

我们引进变量

$$\theta = \theta^*, \quad t = t^*\left(\frac{L}{g}\right)^{-1/2}. \tag{2}$$

这里时间参考尺度 $(L/g)^{1/2}$，角位移参考弧度．利用(2)式，问题变为

$$\ddot{\theta} + \sin\theta = 0, \ \theta(0) = 0, \ \dot{\theta} = \Omega\left(\frac{L}{g}\right)^{1/2} \equiv b. \tag{3}$$

(3)式是一个自变量并不明显出现的二阶偏微分方程，现在我们利用这一事实的好处．采用一个已成为微分方程基本文献一部分的一种"诀窍"(Boyce 和 DiPrima 1969，第 89 页)，我们用简写 $\omega \equiv \dot{\theta}$，并把 ω 看作是 θ 的函数．于是

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta},$$

上面的方程变为

$$\omega\omega' + \sin\theta = 0, \quad \omega' \equiv \frac{d\omega}{d\theta}. \tag{4}$$

把这个方程积分一次可以得到

$$\frac{1}{2}\omega^2 - \cos\theta = 常数 = \frac{1}{2}b^2 - \cos a, \tag{5}$$

或

$$\omega^2 = 2\cos\theta - 2\cos a + b^2. \tag{6}$$

当 $\theta = a$ 时，根据(3)式，$\omega = b$. 上式中我们已用到了这一点.

非阻尼单摆的位相图

在考虑 a 和 b 的所有的可能值时，我们画出(6)式所给出的曲线族. 为了做到这一点，让我们作如下的观察. (i) ω 和 θ 都可以用它们的负值来代替而不改变 (6) 式的值，因而曲线对于 θ 和 ω 轴都是对称的. 所以我们把注意力集中在第一象限就足够了. (ii) (6)式右端的 θ 周期为 2π，因而我们可以把注意力集中在下列带中：$\omega \geqslant 0, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. (iii) 如果 ω 是正的，那末从(4)式可知，在(水平切线) $\theta = 0$ 上，ω 是正的；而对于 $0<\theta<\pi$，$\omega' < 0$ (ω减少)，(水平切线) $\theta = \pi$ 时，$\omega' = 0$；对于 $\pi < \theta < 2\pi$，$\omega' > 0$ (ω增加). (iv) 如果 $\theta \neq 0, \pi$，那末当 $\omega \to 0$ 时，$|\omega'| \to \infty$ (在 θ 轴上垂直相切)，我们就导出了图 11.1 所示的定性性质.

特别有趣的是点 $(0, 0)$ 和 $(\pi, 0)$. 这里用(4)式并没有定出切线的斜率 ω' 来，但是在 θ 靠近零时，(4)式近似地给出了下式：

$$\omega d\omega + \theta d\theta = 0, \tag{7}$$

因而 $\omega^2 + \theta^2 =$ 常数. 在 $(0, 0)$ 附近，曲线是圆. 对于 π 附近的 θ，我们可写作 $\theta = \pi + \bar{\theta}$，并假定 $\bar{\theta}$ 很小，我们得到

$$\omega d\omega - \bar{\theta} d\bar{\theta} = 0, \quad \omega^2 - \theta^2 = \text{常数} \tag{8}$$

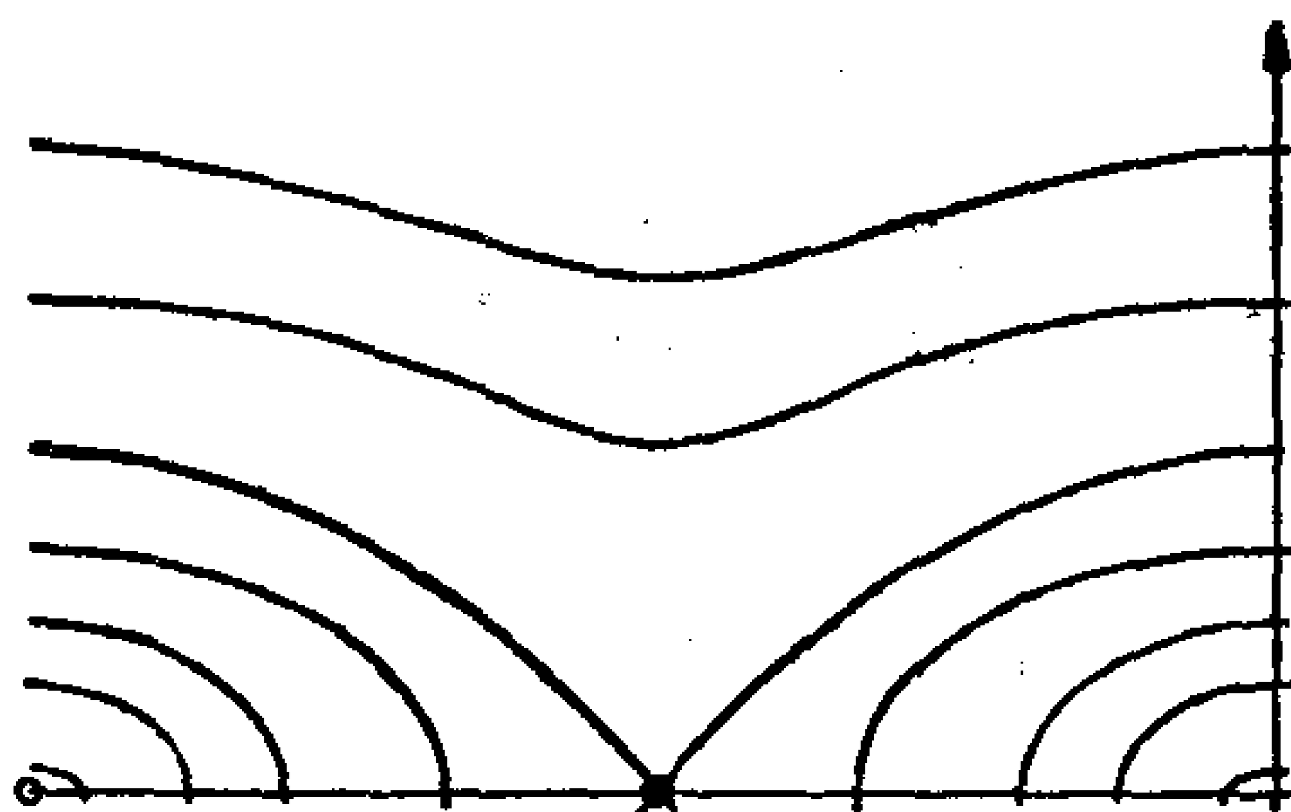


图 11.1 无阻尼单摆的位相图：示意图.

因此在 $(\pi, 0)$ 附近这些曲线是双曲线，而这些曲线的退化双曲线

$$\omega = \pm\bar{\theta}, \text{ 即 } \omega = \pm(\theta - \pi),$$

则经过 $(\pi, 0)$.

还有一个观察是很有用的，从 $\omega = \dot{\theta}$ 可知，当且仅当 ω 是正数时，θ 才随时间而增加．这就使我们能够用箭头指明随时间的增加曲线是怎样描绘出来的．把所有这些综合起来，我们得到图 11.2．

每个初始条件 $\theta(0) = a, \dot{\theta}(0) = b$ 对应于图 11.2 上的一个点 (a, b)．除了点 $(n\pi, 0)$，$n = 0, \pm 1, \cdots$ 以外，我们可以按照箭头的方向勾划出单摆随后的角位移 θ 和角速度 $\dot{\theta} \equiv \omega$ 的唯一曲线来．这些曲线称之为**轨道**．而这个平面本身称之为**相平面**．我们把相平面上轨道的集合恰当地称之为组成了系统的**位相图**，因为这种集合描述了系统的可能的性质．

必须记住，差 2π 的 θ 值相应于同一位置．考虑这个问题的一种方法是作这样的设想：相位平面上的窄条 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ 是按照 $\theta = 0$ 与 $\theta = 2\pi$ 重合的方式绕在一个直圆柱面上的．因此，所有的轨道都相应于周期运动．

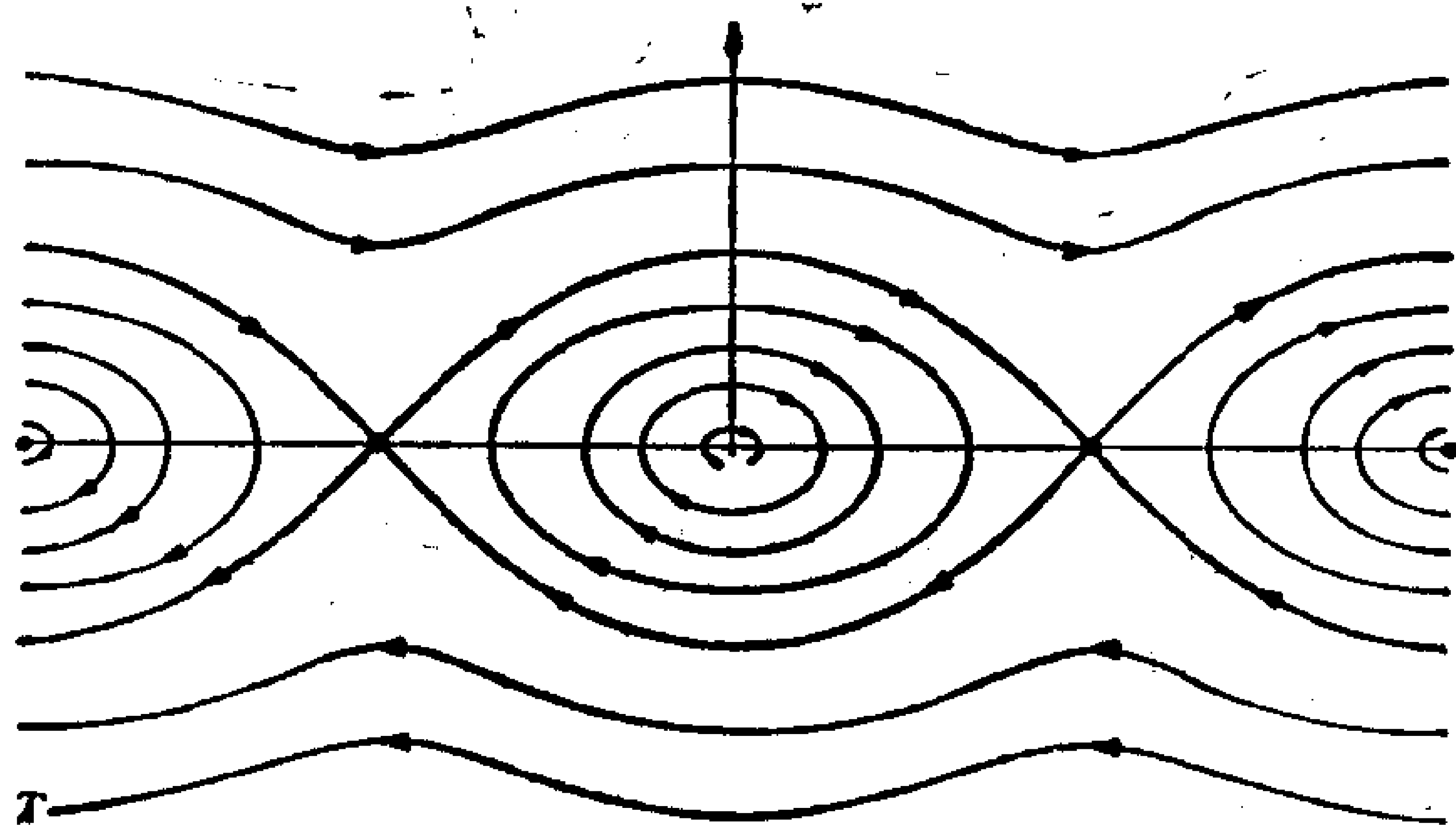


图 11.2　无阻尼摆的相位示意图．分离线 S_1 和 S_2（黑线）围出一个绕着中心 (0, 0) 的封闭轨道所组成的区域．这些轨道表示所包围范围（从不翻转的摆）的周期振动．象 T 这样的一个轨道表示一个连续翻转运动．

分离线

在 $(0, 0)$ 附近起始的轨道，满足 $|\theta| < \pi$（摆从不翻转）．相反，对于非零的 b，所有在 (π, b) 开始的轨道角 θ 周期地通过 π（具有非零初速的一个倒置摆，将继续围绕其支点运动．）

现在考虑通过 π 的奇整数倍的特殊轨道．这些轨道把那些相应于围绕支点作圆周运动的轨迹与相应于不翻转的轨道分离开来，这种把不同性质的区域区分开来的特殊曲线称之为**分离线**．

设通过$(\pi, 0)$点的分离线与 ω 轴交于$(0, b_0)$．于是按照(6)式，有 $\omega^2 = 2\cos\theta - 2 + b^2$．为了在 $\theta \to \pi$ 时使 $\omega \to 0$，我们必须有 $b_0^2 = 4$ 或 $b_0 = \pm 2$．因而当且仅当初始角速度的值大于2时，一个处于摆锤向下的平衡位置上的单摆才绕其支点转动．

例 对于刚才所得到的条件，试给出其物理解释．

解 由(3)式可知，初始无量纲角速度为2相当于初始有量纲角速度 $\Omega = 2(L/g)^{-1/2}$． 令摆锤的质量为 m，并把摆锤下垂位置的势能取为零．那末初始的能量都是动能，且其值为

$$\frac{1}{2} m(\Omega L)^2 = 2mLg.$$

因为如果摆长为 L，则摆锤所具有的线速度为 ΩL． 能量是守恒的，因此初始动能恰好足以把摆锤举高距离 $2L$．并达到倒置位置而不再转动，如果初始能量再多一点，那末摆锤将以非零速度达到倒置位置，并继续旋转．

临界点

考虑 $\omega = \dot{\theta} = 0$．按照(4)式，在这些点上，我们也有 $\sin\theta = 0$．这些点起着重要的双重作用．按照常微分方程(3)的观点，这些是**平衡点**，代表着可能持续存在而不改变的解．当问题化成(4)式的形式时，这些点代表**临界点**．

为了看一下临界点的作用，首先考虑一个不是这种点的 P 点．于是根据(4)式，我们有

$$\omega' = -\frac{\sin\theta}{\omega}, \quad \omega \neq 0.$$

这就给出了通过 P 的轨道 $\omega = \omega(\theta)$ 的斜率的唯一值．相反，当该点在临界点上时，上面的方程就不能再用．为了得到这样一个点处的斜率，唯一的办法是考虑

$$\lim_{\substack{\omega\to\omega_0\\ \theta\to\theta_0}} -\frac{\sin\theta}{\theta},$$

这个极限根据其趋向于 (ω_0, θ_0) 的不同方法而有不同的值.(参阅练习 1.)

因为除了临界点以外,轨道具有唯一的切线,由此可知,除了临界点以外,由轨道组成的曲线是不能穿越的.因此在临界点附近考察轨道是特别有启示的.但是,因为临界点和平衡点是等价的.这种考虑与研究平衡的稳定性是等价的.因此,(1.5)和(1.7)式所给出的小扰动解描述了正常平衡和倒置平衡附近的性质.而(7)和(8)式所提供的是等价描述.特别是衰减为零的倒置摆的例外的扰动,[见(1.7)下面的材料.]在相位面上是以沿着分离线的扰动为代表的.精确地沿着合适的分离线开始的解将按照这种轨道到$(\pi, 0)$处平衡.

如果我们认识到,对于其位置可以用一个坐标(譬如 x)来描述的任何动力学系统,牛顿第二运动定律采取 $\ddot{x}=g(x, \dot{x}, t)$ 的形式,那末我们就会意识到这个方法具有广泛的适用性.最重要的系统就是时间并不明显出现的**自律**系统,即 $g = g(x, \dot{x})$.对于这些系统,如果我们引进速度 $v \equiv \dot{x}$,就有 $v(dv/dx) = g(x, v)$,此时考虑 $v-x$ 相平面又是合适的.

更一般地讲,我们可以考虑 $y(x)$ 的一阶方程

$$f(x, y)\frac{dy}{dx} = g(x, y). \tag{9}$$

除了在临界点 $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ 处以外,斜率 dy/dx 都是唯一地确定了的.在 x-y(位相)平面上,设轨道可用 t 来加以参数化,因而 $dv/dx = (dv/dt)(dx/dt)$.那末通过 (x_0, y_0) 的轨道就可以用 $x = x(t)$, $y = y(t)$ 来描述,其中

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y),\quad \frac{dy}{dt} = g(x, y);$$
$$x(t_0) = x_0,\quad y(t_0) = y_0. \tag{10}$$

极限环

按照有关的存在性和唯一性定理（假定足够光滑——参阅第二章），精确地说，一个轨道通过每一点．除了临界点以外，斜率都是唯一地确定的，这似乎可以进一步使我们对在点 (x_0, y_0) 处出现的轨道作出如下的分类：[1]

(i) 通过 (x_0, y_0) 的轨道就是由点 (x_0, y_0) 的全体组成的．那末这种点是一个平衡点(即一个临界点)．

(ii) 通过 (x_0, y_0) 的轨道回到 (x_0, y_0)． 所形成的简单封闭曲线称为**极限环**，它就是周期解在位相平面上的轨迹．

(iii) 通过 (x_0, y_0) 的轨道既不停留在这点也不回到这点，但或者通向无穷远处，或者接近于一些其他的平衡点，或者趋近于一条封闭的曲线．虽然该封闭曲线可能通过几个临界点，但事实上它通常是一个极限环．(因此不通过临界点)．极限环的位置一般不是一件简单的事情，我们并不作进一步的讨论．不过确定临界点附近的性质往往很容易，也很有价值．

轨道在临界点附近的性质

如果 (X, Y) 是(9)或(10)式的一个临界点，那末按照定义

$$f(X, Y) = 0, \quad g(X, Y) = 0. \tag{11}$$

用下式引进对于平衡位置的偏离 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$:

$$x(t) = X + \bar{x}(t), \quad y(t) = Y + \bar{y}(t),$$

应用两个变量的泰勒公式，我们有

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = a\bar{x} + b\bar{y}, \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = c\bar{x} + d\bar{y}, \tag{12}$$

式中常数 a, b, c 和 d 由下式给出

$$a = f_x(X, Y), \quad b = f_y(X, Y),$$
$$c = g_x(X, Y), \quad d = g_y(X, Y),$$

1) 参阅 S. Lefschetz, *Differential Equation: Geometric Theory*. (New York: Wiley-Interscience, 1957), Chap. 10.

而其余的项已被忽略。如果

$$\begin{bmatrix} a-m & b \\ c & d-m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

那末线性方程组(12)具有如下形式的解

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} e^{mt}.$$

对于非平庸解，系数矩阵的行列式必须为零，因而

$$m^2+\beta m+\gamma=0,\ \text{式中}\ \beta=-(a+d),\ \gamma=ad-bc. \quad (13)$$

我们假设 $\gamma \neq 0$，且 $\beta^2-4\gamma \neq 0$。于是有下列几种可能性。

I: $\beta^2-4\gamma>0$.

方程(13)具有实根

$$m_1=-\beta+\sqrt{\beta^2-4\gamma},\quad m_2=-\beta-\sqrt{\beta^2-4\gamma}$$

I(a): $\nu<0$. 因而 $m_1>0$，$m_2<0$。平衡是不稳定的，而 (X, Y) 附近的轨道象山关附近的水平线。因此，(X, Y) 称之为一个**鞍点**或**坳口**.图 11.2 中的平衡点$(\pi, 0)$就是一例.

I(b): $\gamma>0$. 如果 β 是负的（正的），那末两个根都是正的（负的），平衡就不稳定(渐近稳定)。可以证明，轨道形成了一个图 11.3 所示明的节点.

II: $\beta^2-4\gamma<0$.

现在(13)式具有两个共轭复根 $-\beta \pm i\sqrt{4\gamma-\beta^2}$ 而(12)所具有的解正比于

$$e^{-\beta t}\cos(t\sqrt{4\gamma-\beta^2}),\quad e^{-\beta t}\sin(t\sqrt{4\gamma-\beta^2}).$$

II(a): $\beta=0$. 扰动是周期性的，因此平衡点附近的轨道是封闭的。这种平衡点称之为一个**中心**。平衡是李雅普诺夫稳定和随遇稳定。图 11.2 中的点 (0, 0) 就是中心的一个例子.

II(b): $\beta \neq 0$. 平衡点是螺旋线的**焦点**。如果 $\beta<0$，随着时间的推移，位相点螺旋上升得离开焦点越来越远，那末焦点是不稳定的。相反，如果 $\beta>0$，焦点则是渐

近地稳定的。

在各种情况下(12)式的解所呈现的各种不同类型的定性特征

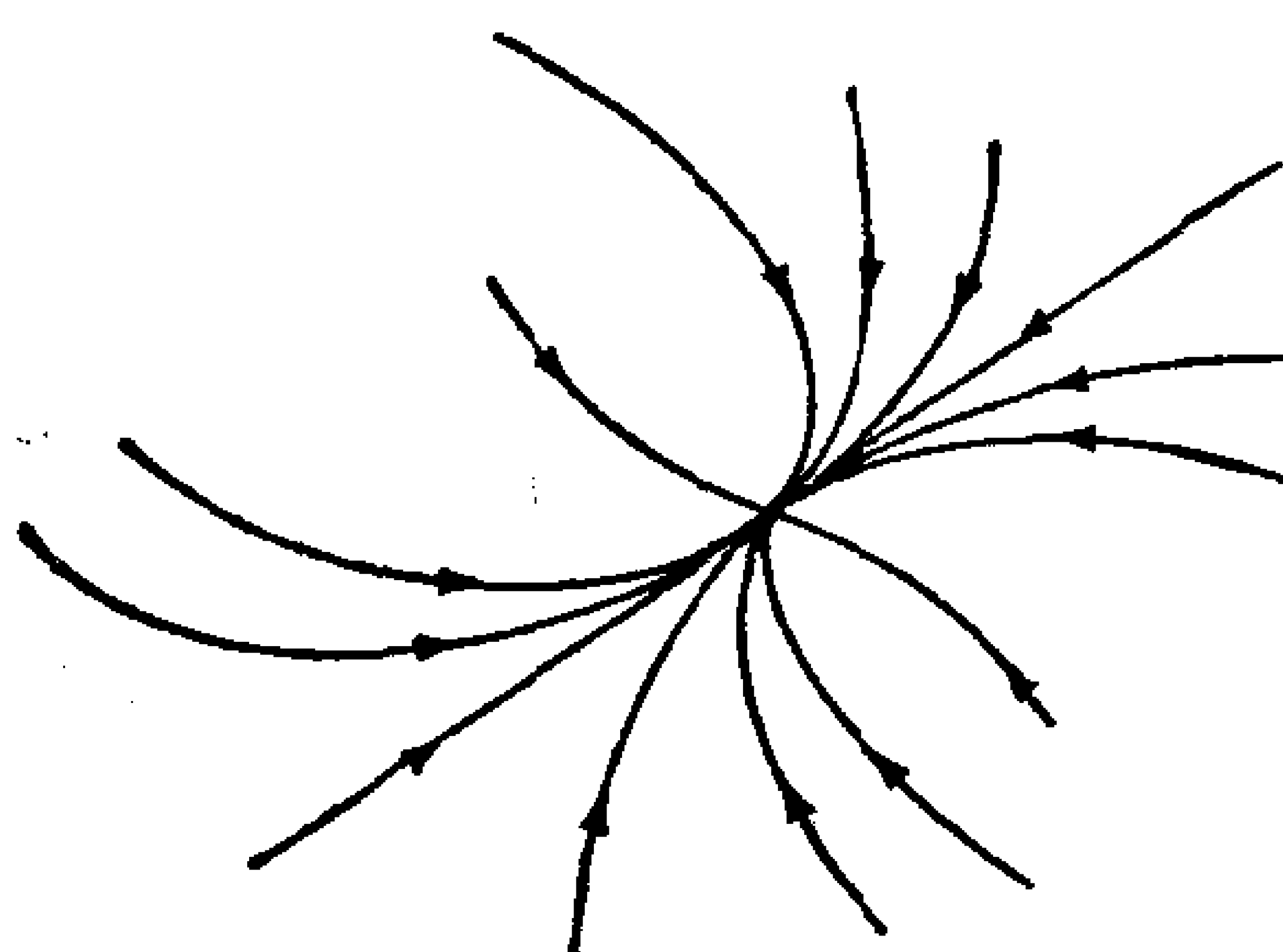


图 11.3 典型的稳定节点附近的轨道．当节点不稳定时，箭头是反向的．

可以很快地从图 11.4 得到确定．但是这种性质对于平衡点(X，Y)附近的非线性方程(10)是否也适用呢？这就是说，能否证明线性化会导致(12)式呢？原来作肯定回答的充分条件是 F 和 G 以及它们的一阶导数在(X，Y)附近具有连续性．并不惊奇，中心是

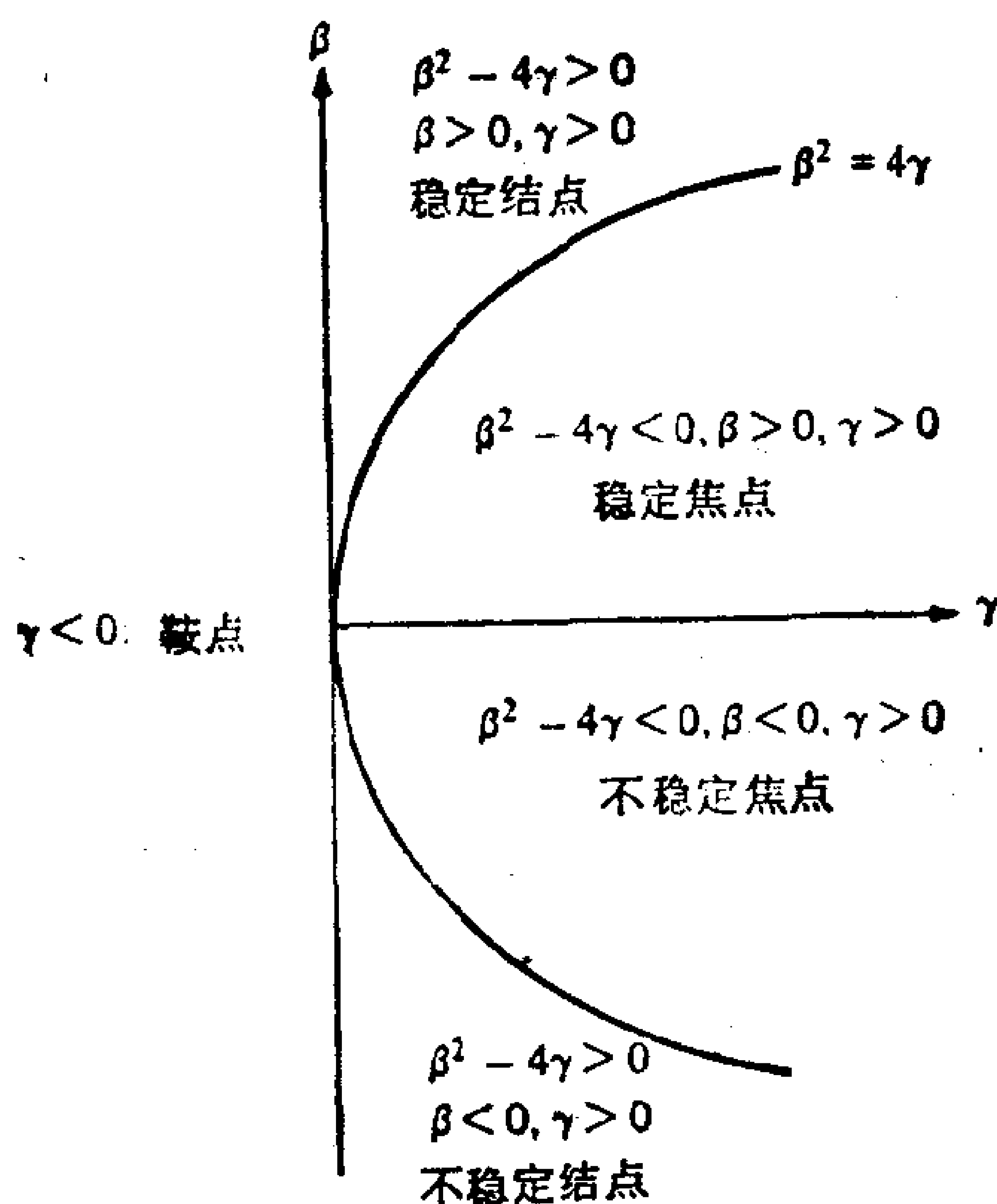


图 11.4 (12)式解的定性特征：$d\bar{x}/dt = a\bar{x} + b\bar{y}$，$d\bar{y}/dt = c\bar{x} + d\bar{y}$．简写：$\beta = -(a + d)$，$\gamma = ad - bc$．

一个例外情况.

因为最微小的不准确性就可以阻止状态点完全回到周期解所要求给定位置上去.

中心的情况，以及 $\nu = 0$，$\beta^2 - 4\gamma = 0$ 的情况，(这些并未包含在上面讨论的可能性中.)肯定需要更多的讨论. 这里没有把中心情况包括在我们讨论的范围之内.

作为一个已解过的例子，我们现在来考虑阻尼摆. 上面得到轨道显式所用的方法不再可用了. 因此在这种情况下，一般的相平面方法是不可缺少的.

例 阻尼摆所遵循的方程为

$$\ddot{\theta} + \nu\dot{\theta} + \sin\theta = 0, \tag{14}$$

试分析其相平面的性质.

解 我们写出

$$x = \theta, \quad \dot{x} = y,$$

因而

$$\dot{x} = y, \ \dot{y} = -\nu y - \sin x.$$

绕平衡点 (0, 0) 作线性化，我们得到

$$\dot{x} = y, \ \dot{y} = -\nu y - x,$$

因而从(12)和(13)式得到

$$a = 0, \ b = 1, \ c = -1, \ d = -\nu;$$

$$\beta = \nu, \ \gamma = 1, \ \beta^2 - 4\gamma = \gamma^2 - 4.$$

因此，如果 $\nu^2 - 4 > 0$，那末 (0, 0) 是一个稳定节点，如果 $\nu^2 - 4 < 0$，就是一个稳定焦点. 这两种可能性与在(线性化的)单摆问题的基本研究中所碰到的过阻尼和欠阻尼相等同.

考虑平衡点 $x = \pi$，$y = 0$. 用下式引进扰动 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$:

$$x = \pi + \bar{x}, \quad y = \bar{y},$$

并加以线性化，我们得到

$$\dot{\bar{x}} = \bar{y}, \quad \dot{\bar{y}} = -\nu\bar{y} + \bar{x}.$$

因此，$\beta = \nu$，$\gamma = -1$，$\beta^2 - 4\gamma = \gamma^2 + 4$，因而 $(\pi, 0)$ 是一个鞍点(这与无阻尼摆是相同的). 物理上的直觉排除了极限环，因

为不供给能量去补充阻尼过程中所消耗的能量，就不可能有周期的运动．只要稍有点阻尼，如图 11.2 中象 T 那样的轨道，现在就缓慢地盘旋到代表摆锤向下无运动摆的平衡点上去．可以看到在欠阻尼的情况 $0<\nu<2$ 下，位相图如图 11.5 所示．

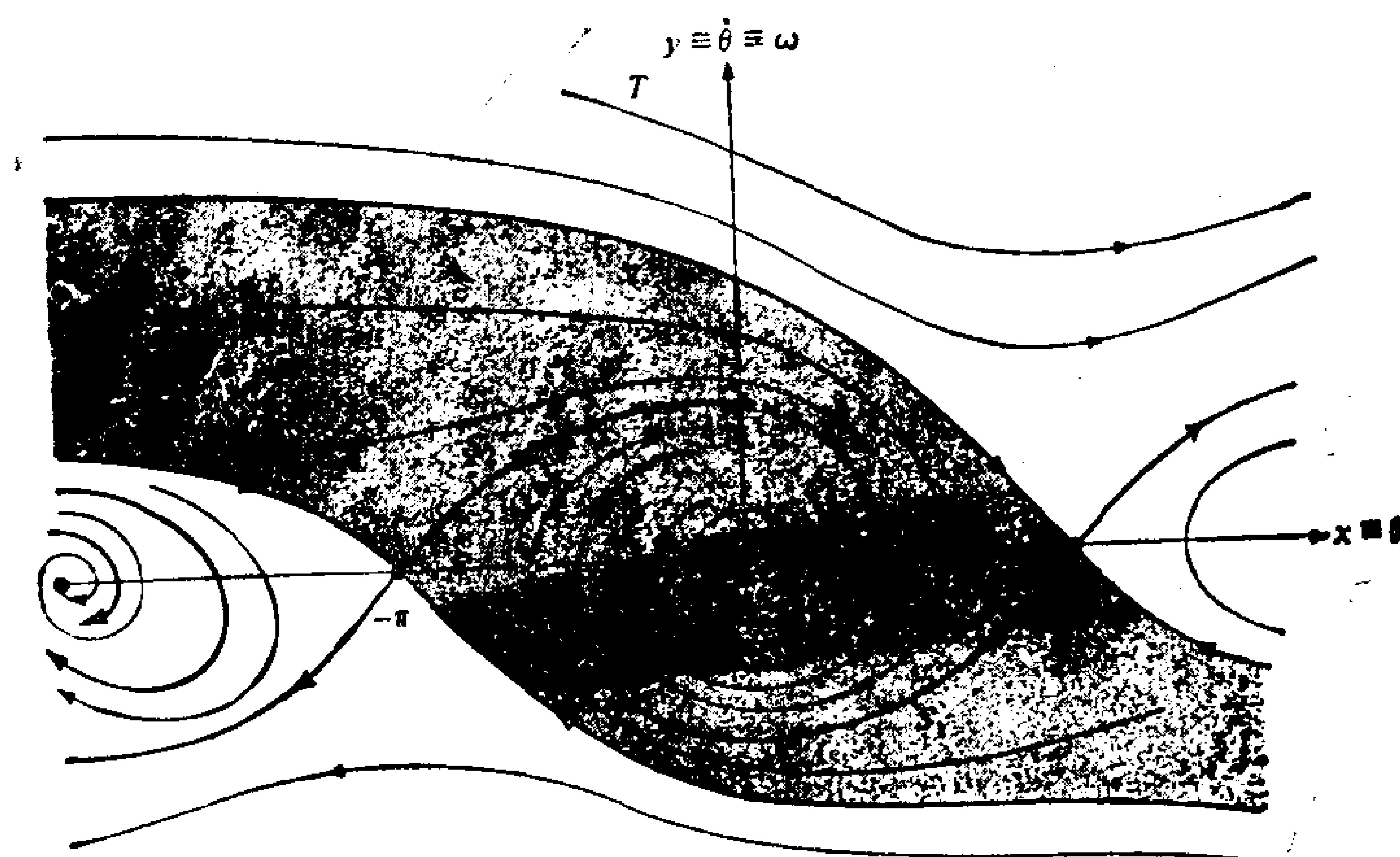


图 11.5 微小阻尼摆的位相图．(0, 0) 的"吸引区"被涂上了黑色．黑线条代表分离线．在轨道最终接近于渐近稳定焦点之前，角度沿轨道 T 增加了 2π 的几倍（几次倾复）．恰好在分离线 S_2 之上，这种"倾复"轨道对于在 (0, 0) 处的稳定焦点是在进向的．恰好在 S_2 点下面，轨道代表有界范围的衰减振动．读者应该设法使他自己相信，这里所描述的定性特征是从奇点的性质(鞍点和焦点交替)、从没有极限环和轨道不相交但在奇点终止的事实、从某些物理考虑而来的，试把本图与图 11.2 相比较．

对于相平面的讨论为我们提供了得到一些有用结果的方法．仍然，它仅是触及了问题的一些皮毛．如若想有一个初步而简要但却比这里所给出的较为详细的解释，读者可参阅 Boyce 和 DiPrima (1969) 的书的第九章．至于着眼于应用的更为丰富的研究，(例如)可以在 J. Stoker[1] 和 A. Andronov、A. Vitt 和 S. Khaikin[2] 的书中找到．关于理论结果．读者可以从阅读 Coddington 和 Levinson(1955) 的经典教科书着手．

1) *Nonlinear Vibrations* (New York: Wiley-Interscience, 1950).
2) *Theory of Oscillations* (Elmsford, N. Y.: Pergamon, 1966).

相平面概念可以大加推广．例如考虑N个质点的系统．初始条件要求规定每个质点的三个位置分量和三个速度分量．不用位相平面我们必须考虑$6N$维的相空间，一半是位置坐标，一半是速度坐标．我们涉及到**6N 个自由度的系统**．在连续介质力学中，质点失去了它们的个性，但已证明，引进无限维位相空间是有用的，其中每一维都是与某个变量的傅里叶分量相等同的．

我们观察到，相平面分析中感到兴趣的是轨道的定性性质而并非轨道的精确过程．微分方程的近代研究大部分集中在阐明这个定性的性质，而这正是应用数学家所关心的东西．

练　　习

1. (a) 利用(7)式证明，如果沿线 $\omega=K\theta$ 接近于原点，那末我们经过的轨道的斜率为 $-K^{-1}$．(因此极限斜率依赖于趋近的方式.)试用图解释．

(b) 使(1.5)和(1.7)式与(7)和(8)式相一致．

2. (a) 从(10.13)式消去 e^* 和 c^* 得到 s^* 和 p^* 的两个方程．

(b) 证明只有一个物理上有意义的平衡点，并确定它的稳定性．

(c) 在 s^*-p^* 平面的第一象限里找出 ds^*/dt^* 和 dp^*/dt^* 都是正的、都是负的，或具有反号的两种组合的四个区域．利用这种知识画出可能的轨道．

(d) 把现在的方法与第十章中关于这个问题的方法加以比较．[参阅 I. G. Darvey 和 R. F. Matlak "An Investigation of a Basic Assumation in Enzyme Kinetics Using Results of Geometric Theory of Differential Equations", *Bull. Math. Biophys.* **29**, 335-41 (1967).]

3. (a) 方程组

$$\frac{dx}{dt}=(a-bx-cy)x,\quad \frac{dy}{dt}=(e-fx-gy)y$$

是两种生物之间竞争的一种简单模型．(这里 a, b, c, e, f 和 g 都是常数.)写出一篇论文，阐述这个模型中假定了

些什么，以及可预料到该模型的局限性是什么。

(b) 考虑相平面，试证明如果$(a/c)>(e/g)$和$(a/b)>(e/f)$，那末种类 x 获胜，这合理吗？

(c) 讨论情况 $(a/c)<(e/g)$，$(e/f)<(a/b)$。（参阅 J. M. Smith *Mathematical Ideas in Biology*, Cambridge: Cambridge U. P., 1968)

4. 利用相平面方法求解练习 15.2.7（这个问题是自洽的）。

第 III 部 分

连续介质场理论引论

第十二章　杆的纵向运动

现在我们开始本卷的第三部分，这一部分用来研究基本的连续介质力学．本章讨论杆的一维纵向运动，这个物理问题在很多情况下都会出现．我们将会看到，利用比较初等的数学技巧就可以阐明所涉及问题的若干有意义的方面．举一个例子来说，一人射弹性波作用在反射平面上的力要加倍(练习 12.2.9)．如果预先没有估计到这种现象，那末就可能会产生可怕的后果．

我们推导基本方程所依据的方法是与推导三维连续介质中类似的结果所用的方法相同的．我们感到，如果这个普遍的方法不是在复杂的三维几何形状下首先提出来，那可能会比较清楚些．因此，我们向大家建议，在阅读第十三章以后的一般材料之前至少应该先学习 12.1 节．(另一方面，有些人则欢喜把本章看作连续介质一般理论的一个具体的示例，这肯定是一个可行的方法．)这里考虑的许多特殊问题都是以后要解决的几何形状更复杂的类似问题的范例．象波的传播、反射和透射、色散，间断的传播，自由振动，这些论题都是以自然的方式出现的．虽然有时有些困难，但在研究这些论题时所用的数学技巧都可加以推广，以使它们适用于二维和三维情况．

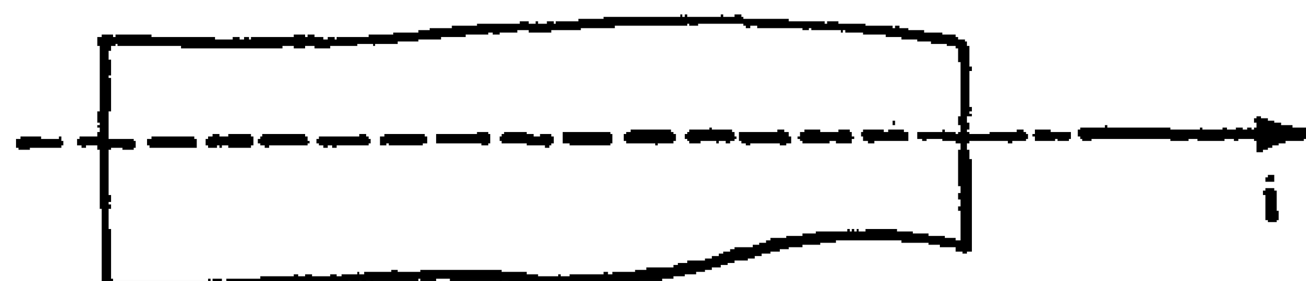


图 12.1　可以看作"细长"的一根杆．假定垂直于单位矢量 **i** 的横截面在其运动过程中仍然是平面并保持着它们的形状．

我们总的教学策略是采用最有利的态度去表述简单而又有意义的一维弹性[1]运动．在这里我们并未处理某些需要作深入讨论

1) "恢复原始体积和形状的性质就称之为弹性" (Love, 1944).

的细微的区别.

12.1 基本方程的推导

几何形状

假定图 12.1 所示的杆是细长的. 这就是说，它的横截面的平均直径必须比它的长度小.虽然横截面可能有变化,但我们仍要求这种变化沿杆的纵向是小的. 由于对几何形状作了这些限制，采用下述假设就不是不合理的了: *在运动过程中，每个横截面保持平面在纵向作无扭转的运动*. 正是这个假设使得杆的仅有的变化是纵向的,这就使问题具有一维的性质.

在整个这一章中，我们都假设可以把杆看成是由作光滑运动(除了可能的一些特殊位置以外)的连续分布的物质组成的. 作这个假设是十分自然的. 但是连续介质假设具有更深刻的含意，这一点读者可在 13.1 节中找到.

我们将交替使用两个自变量. **空间坐标** x 代表空间中的某个特定的位置,而**物质坐标** A 代表杆的某个特定的横截面,我们总是用一个横截面离开一个参考点 (原点) 的距离 A 来确定这个截面. 这种测量是在某个固定的参考时间(通常是 $t=0$)做的. 通常把原点右(左)边的距离取作正(负)的.

在一维问题中，关于杆运动的完整的数据要求我们始终知道各截面的位置. 我们将把所需描述的**横截面轨迹**的函数写作如下的式子:

$$x=x(A,t),\quad x(A,0)=A, \qquad (1a,b)$$

这就是说,这些方程说的是"x 是原先(时间为零时)位于 A 的截面在现在 (时间 t 时) 的位置; A 是原先在时间为零时位于 A 的截面的位置".

我们将假定(1)式是唯一地可逆的,因此可以写出

$$A=A(x,t) \quad [\text{有 } A(A,0)=A]. \qquad (2)$$

这就是说，"A 是现在 x 处的质点的初始位置". 用通常的语言来说,(2)式是由求解(1)式用 x 表示 A 而得到的. 按照定义,这意味

着下列等式成立:

$$x[A(x,t),t]=x,\quad A[x(A,t),t]=A. \qquad (3a,b)$$

例 1 如果 $x=A+t$, 那末 $A=x-t$, 事实上,$(x-t)+t=x$, $(A+t)-t=A$.

如上所述,有时我们用 A 作为自变量[在(1)式中],有时则用 x 作为自变量[在(2)式中]. 但请注意,我们有时也用 A 作为**应**变量[在(2)式中],而有时则用 x 作应变量[在(1)式中].

通常,我们用**小写**字母代表**空间**变量的函数,而用**大写**字母代表**物质**变量的函数. 因此我们将写出

$$f[x(A,t),t]=F(A,t),\quad f(x,t)=F[A(x,t),t]. \qquad (4a,b)$$

例 2 令 $\theta(x,t)$ 代表时刻 t 时位置 x 处的温度. 令 $\Theta(A,t)$ 表示原来位于 A 处的截面在时刻 t 时的温度. 于是

$$\theta[x(A,t),t]=\Theta(A,t),\quad \theta(x,t)=\Theta[A(x,t),t]. \qquad (5a,b)$$

注意,若用 x 和 t 替代 A, 再利用 3(a) 式,(5a)式就变成了(5b)式, 类似地用(3b)式可以把(5b)式变成(5a)式.

我们必须经常把空间变量变成物质变量, 有时我们将采用简写符号而不用多少有点复杂的符号(4a)式或者甚至更复杂的符号

$$f(x,t)\big|_{x=x(A,t)},$$

我们有时作如下的简写

$$f[x(A,t),t]\equiv f(x,t)/A \text{ 或 } f[x(A,t),t]\equiv f/A \qquad (6)$$

(6)式应该读作"在 A 处计算 f". 类似地,我们写出

$$F[A(x,t),t]\equiv F|_x. \qquad (7)$$

为了弄清楚在一些常用公式中出现的这个符号, 让我们用连锁法来考虑(4a)式的导数[1]. 我们得到[练习 1(a)]

1) 在附录 13.1 中可找到关于连锁法则的详细讨论. 这里我们仅注意到把 x 和 t 看作空间变量而把 A 和 t' 看作是物质变量是有帮助的,其中 $t'=t$. 于是适用于(4a)式的连锁法则为

$$\frac{\partial F}{\partial A}=\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_A\frac{\partial x}{\partial A}+\frac{\partial f}{\partial t}\bigg|_A\frac{\partial t}{\partial A},$$

$$\frac{\partial F}{\partial t'}=\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_A\frac{\partial x}{\partial t'}+\frac{\partial f}{\partial t}\bigg|_A\frac{\partial t}{\partial t'}.$$

当把 t' 与 t 看作相同时,这两个方程简化为(8)式

$$\frac{\partial F}{\partial A}=\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_A\frac{\partial x}{\partial A},\qquad \frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_A\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial t}\bigg|_A. \tag{8a,b}$$

把注意力集中在起初位于A、现在(即时间t时)一定在x处的一个截面．把初始位置与现时位置连接起来的矢量称之为**位移矢量**,并写作

$$\mathbf{U}(A,t)=U(A,t)\mathbf{i},$$

这里$\mathbf{i}$是指向A的正方向的单位矢量． 分量函数 $U(A,t)$ 将看作(物质坐标上的)**位移**．从图 12.2 我们看到

$$x(A,t)=A+U(A,t) \tag{9}$$

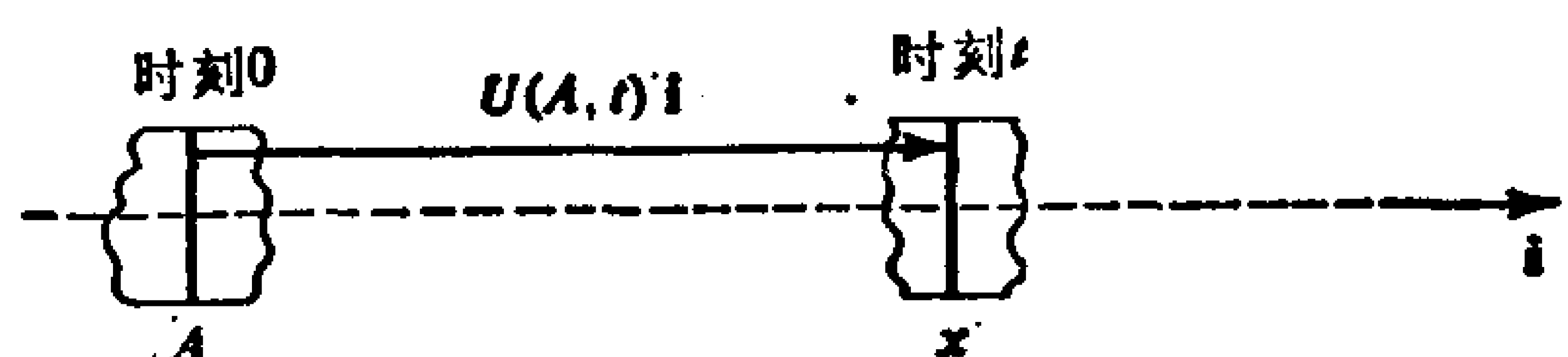


图 12.2 当一个截面从初始位置A运动到最终位置 $x(A,t)=A+U(A,t)$ 时发生的位移.

我们把空间坐标的位移 $u(x,t)$ 定义为

$$u(x,t)=U[A(x,t),t]. \tag{10}$$

如果我们用x代替A,从(9)式得到

$$x=A(x,t)+u(x,t), \tag{11}$$

这个式子可解释为“现在在x处的截面的初始位置加上这个截面的位移等于它现在的位置．”

截面的纵向速度分量,或简言之**速度**,可用物质坐标定义为

$$V(A,t)=\frac{\partial x(A,t)}{\partial t}. \tag{12}$$

从(9)式我们也有

$$V(A,t)=\frac{\partial U(A,t)}{\partial t}. \tag{13}$$

空间速度分量v由下式与V相关联

$$v(x,t)=V[A(x,t),t],$$
$$v[x(A,t),t]=V(A,t). \tag{14a,b}$$

于是用空间和物质坐标可分别把速度矢量表示为

$$v(x,t)\mathbf{i}=\mathbf{v}(x,t) \text{ 和 } V(A,t)\mathbf{i}=\mathbf{V}(A,t).$$

物质导数和雅可比

用现在的符号,连锁法则(8b)可写作

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{A}+V\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{A}. \tag{15}$$

我们将把下述重要方程定义为函数 $f(x,t)$ 的**物质导数** Df/Dt

$$\boxed{\frac{Df(x,t)}{Dt}=\left.\frac{\partial F(A,t)}{\partial t}\right|_{A=A(x,t)}}. \tag{16}$$

在(15)式中作替换 $A=A(x,t)$,我们就立即得到

$$\boxed{\frac{Df(x,t)}{Dt}=\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}+v(x,t)\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}}. \tag{17}$$

物质导数 $Df(x,t)/Dt$ 代表跟随物质截面的函数 f 的改变率。它可以看作乘坐在现在位于 x 的截面上的观察者所看到的 f 随时间的改变。

例 3 考虑一根温度 $\theta(x,t)$ 不均匀的静止杆 $(v\equiv 0)$. 这时

$$\frac{D\theta(x,t)}{Dt}=\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t},$$

x 处的温度可能改变的唯一的原因是因为在该点处出现的加热过程或冷却过程. 但如果杆是运动的,我们就有

$$\frac{D\theta}{Dt}=\frac{\partial\theta}{\partial t}+v\frac{\partial\theta}{\partial x}, \tag{18}$$

出现了一个附加的项,这是因为物质被整体地以速度 v 携带或运送过位置 x 的缘故.

例 4 考虑一根无限长的杆定常地通过一个把它压薄的滚子. (见图12.3)把某个时刻指定为 $t=0$,并在远离滚子左侧的某个截面上标上坐标 A. 这个截面的速度在它到达滚子之前近似地保持常数. 然后再加速到较薄的杆不致成为运动障碍所需的较快的速度. 因此 $V(A,t)$ 的曲线如图12.4所

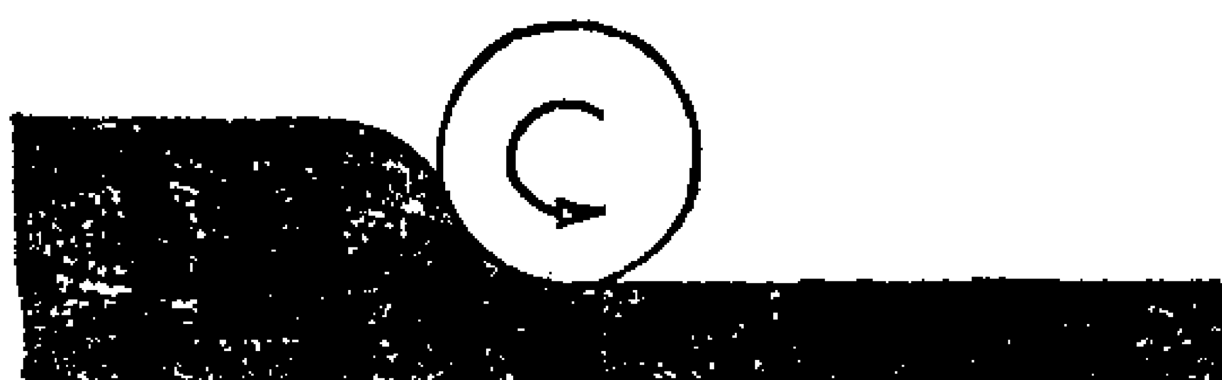


图 12.3 一根非常长的杆定常地经过一个滚子.
较薄的物质运动得比较厚的物质快.

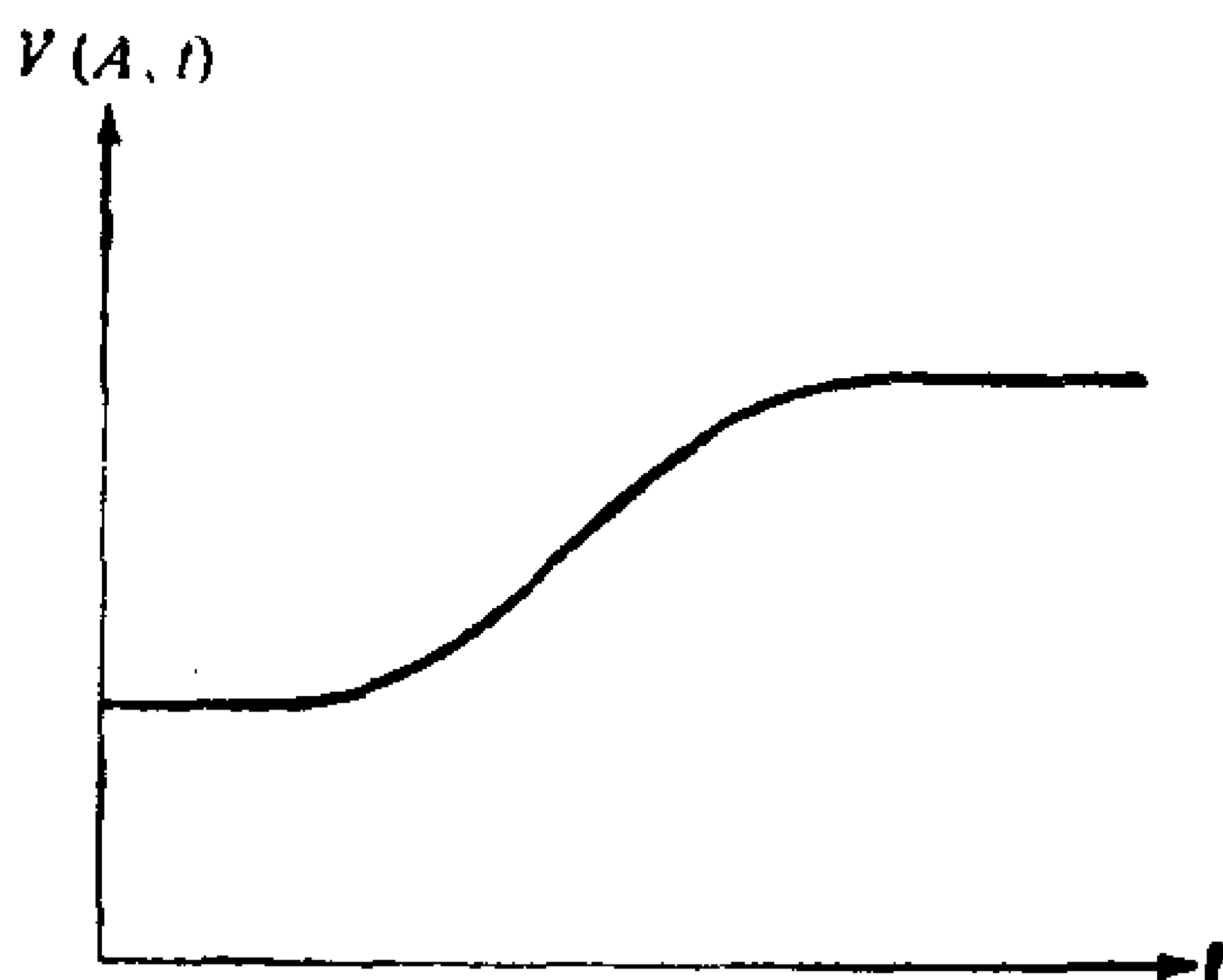


图 12.4 因为经过滚子,图 12.3 中杆的某个指定
截面的速度,在杆被延伸时增加了.

示. 另一方面,如果我们盯着某个具体点 x, 那末这里的速度是决不会改变的. 因为这个过程已被假定为定常地进行的. 因此, 在任何固定的 x 处, $v(x, t)$ 是常量;即 $\partial v/\partial t = 0$.

对于这一速度,(17)式一般采取下述形式

$$\frac{Dv(x,t)}{Dt} = \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + v(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \tag{19}$$

这个方程的左端是现在位于 x 的某截面的速度随时间的改变率. 换言之, (19)式是现在位于 x 处的横截面的加速度的表达式. 正如我们已经看到的那样,在目前这个例子中,(19)式右端的第一项为零,因为在某个给定位置上的速度总是不变的. 但根据图 12.4 我们预期任何给定截面的加速度并不为零. 事实上,(19)式的第二项对加速度的贡献是不为零的. 这是由下列事实引起的: 时刻 t 位于 x 处的截面已不是时刻$(t - \Delta t)$位于 x 处的截面了.

对于某些人来说, 要他们相信 $\partial v(x, t)/\partial t$ 不是位于 x 处截面的加速度是很难的. 但请注意

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(x, t+\Delta t) - v(x,t)}{\Delta t}.$$

分子给出了位于 x 处的截面分别在时刻 $t + \Delta t$ 和 t 的速度之差. 一般地, 这是**两个不同的截面**, 但为了得到加速度, 我们必须计算单个截面速度的

时间改变率.

通过对(8b)式作运算,我们已推得了某些极其有用的结果.稍为不太有用的公式,但仍然很有价值的结果,则可以从(8a)式推导出来.

事实上,(8a)和(9)式意味着

$$\frac{\partial F}{\partial A}=\left(1+\frac{\partial U}{\partial A}\right)\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_A$$

或

$$\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_A=\frac{\partial F/\partial A}{1+\partial U/\partial A}. \tag{20}$$

此外[练习1(b)],人们可以证明

$$\frac{\partial F}{\partial A}\bigg|_x=\frac{\partial f/\partial x}{1-\partial u/\partial x}. \tag{21}$$

在上述计算中出现的导数是 x 坐标和 A 坐标之间的一维变换的雅可比. 考虑到这一点,让我们写出 $\partial x/\partial A=J(A,t)$. 不久,我们还将需要 $\partial J/\partial t$ 的简单的表达式. 应用连锁法则,我们看到

$$\frac{\partial J}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial A}\right)=\frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)$$

$$=\frac{\partial V}{\partial A}=\frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_A\frac{\partial x}{\partial A}.$$

于是,我们得到了用物质坐标表示的**欧拉膨胀公式**

$$\boxed{\frac{\partial J(A,t)}{\partial t}=J(A,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\bigg|_A.} \tag{22}$$

用空间坐标,(22)式变成

$$\frac{DJ[A(x,t),t]}{Dt}=J[A(x,t),t]\cdot\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}. \tag{23}$$

在13.4节中,我们可找到这个膨胀公式在较高维数情况下的推广. 从那里将看到,所得的结果在本质上是与(22)和(23)式相同的. 但计算更复杂些.

质量守恒

象三维连续介质的情况一样，我们把研究质点系力学时作为出发点的各种基本定律的推广取作基本的假定.

我们首先考虑**质量守恒**,所谓质量守恒,我们指的是在整个运动过程中，杆的任何部分的物质的质量是不变的. 为了弄明白这种说法的解析含意. 让我们用 $\rho(x, t)$ 来表示时间 t 时位于 x 截面处单位体积的杆的质量. 因而,在物质坐标下**质量密度**,或简单地称为**密度** $\delta(A, t)$ 则为

$$\delta(A, t)=\rho[x(A, t), t]. \tag{24}$$

类似地，我们将用 $\sigma(x, t)$ 来表示时间 t 时位于 x 处的**横截面面积**. 在物质坐标下,这个横截面面积将用 S 来表示,这里

$$S(A, t)=\sigma[x(A, t), t]. \tag{25}$$

读者记得，我们已假设每个横截面仅在纵向作为一个整体运动. 因此,给定横截面的面积将不随时间改变,即

$$S(A, t)=S(A, 0). \tag{26}$$

因此

$$\sigma(x, t)=S[A(x, t), 0]. \tag{27}$$

而且,因为 $A(x, t)=x-u(x, t)$,我们可以写出

$$\sigma(x, t)=S[x-u(x, t), 0]. \tag{28}$$

因为在 $t=0$ 时面积的分布 $S(A, 0)$ 假定是已知的,因此,虽然位移 $u(x, t)$ 本身仍必须加以确定,但我们却看到 $\sigma(x, t)$ 就是 $x-u(x, t)$ 的一个已知函数.

我们将及时跟踪杆的任选的某一部位. 在 $t=0$ 时，该部位被定为区间

$$M \leqslant A \leqslant N,$$

而在 t 时它由下式给出

$$m(t) \leqslant x \leqslant n(t),$$

其中

$$x(M, t)=m(t), \quad x(N, t)=n(t). \tag{29}$$

现在可把质量守恒的假设写成如下的形式

$$\frac{d}{dt}\int_{m(t)}^{n(t)} \rho(x, t)\sigma(x, t)dx = 0. \tag{30}$$

为了避免微分积分限，我们把积分变量改为物质坐标，结果得到

$$\frac{d}{dt}\int_{m}^{n} \rho(x, t)\sigma(x, t)dx$$
$$= \frac{d}{dt}\int_{M}^{N} \delta(A, t)S(A, t)\frac{\partial x}{\partial A}dA.$$

对被积函数取导数，并且用 J 代替 $\partial x/\partial A$，我们得到

$$\int_{M}^{N}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\delta S)J + \delta S\frac{\partial}{\partial t}J\right]dA. \tag{31}$$

利用欧拉膨胀公式(22)，我们可以把最后一个积分写作

$$\int_{M}^{N}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\delta S) + \delta S\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{A}\right]JdA.$$

把这个最后结果化回空间坐标，我们发现，质量守恒要求取如下的形式：

$$\int_{m}^{n}\left[\frac{D(\rho\sigma)}{Dt} + \rho\sigma\frac{\partial v}{\partial x}\right]dx = 0. \tag{32}$$

因为区间 $m \leqslant x \leqslant n$ 是在杆的任意部位取出的，因而，如果杆(如同我们所假设的那样)是连续的话，上述方程中的被积函数本身便等于零[1]. 因此，我们得到**质量守恒的微分方程**.

$$\boxed{\frac{D(\rho\sigma)}{Dt} + \rho\sigma\frac{\partial v}{\partial x} = 0.} \tag{33}$$

这个方程常常称之为**连续方程**. 如果我们把单位长度的质量定义为$\bar{\rho} = \rho\sigma$，那末就可以写出一种在某些人看来更为熟悉的形式，由此(33)式便变为

---

1) 形式上，我们已用了 Dubois-Reymond 引理. [见方程(4.1.15)后面的注释.] 在做这个到空间坐标的最终的改变之前使用这个引理可能更可取些. 因为那时积分区间的任意性更清楚些.

$$\frac{D\bar{\rho}}{Dt}+\bar{\rho}\frac{\partial v}{\partial x}=0. \tag{34}$$

在我们一直在考虑的一维情况下，连续方程还可加以简化．为了弄清楚这个问题，我们还记得 $S(A,t)=S(A,0)$．于是

$$\frac{\partial S}{\partial t}=0,\quad 因而\quad \frac{D\sigma}{Dt}=0. \tag{35}$$

因而(33)式便变成

$$\sigma\frac{D\rho}{Dt}+\rho\sigma\frac{\partial v}{\partial x}=0. \tag{36}$$

在物质是**不可压缩**的情况下，

$$\delta(A,t)=\delta(A,0). \tag{37}$$

这意味着

$$\frac{\partial\delta}{\partial t}=0,\ 因而\ \frac{D\rho}{Dt}=0, \tag{38}$$

连续方程则简化为

$$\frac{\partial v}{\partial x}=0. \tag{39}$$

因此，杆在运动时不再变形(练习 11)．

力和应力

为了考虑一维线动量平衡的假设，我们必须对所要考虑的力来说一、两句话．这些力将分成两类：体力和表面（曳）力．**体力**(象重力)定义为在杆的某部分上作用着的力，其大小为该部分杆的体积或质量的函数．**表面力**则为通过杆的横截面从杆的一部分传递到另一部分的力，并假定它们只与截面的位置以及所研究的杆的这一部分是在截面的左边还是右边有关．（有关三维情况下的相应的分析，读者可以参考 14.2 节．）

我们正在考虑的力和其他矢量都平行于 $\mathbf{i}$ 方向，因此矢量及其一个分量之间的区分是不太有意义的．尽管如此，至少现在保留这种差别仍然是有用的，**单位质量的体力**将用空间坐标 $\mathbf{f}(x,t)$ 来表示，物质坐标下体力为 $\mathbf{F}(A,t)$，这里

$$\mathbf{F}[A(x, t), t] = \mathbf{f}(x, t).$$

我们也写作

$$\mathbf{f}(x, t) = f(x, t)\mathbf{i}.$$

表面曳力或**应力矢量**将用 $\mathbf{t}(x, t; +)$ 来表示. 这表示时间 t 时位于 x 处单位横截面积上的力. 这个力表示正端的物质作用在负端物质上的力[1]. 类似地, $\mathbf{t}(x, t; -)$是时间 t 时位于 x 处单位横截面上负端的物质作用在正端物质上的力.

我们强调, 如果我们来考虑时间 t 时位于 x 处的一个面积为 σ 的横截面积[图 12.5(a)],那末只有在约定考虑杆的哪一部分作用应力之后,我们才能确定曳力. 因此,在图 12.5(b)中,我们来考

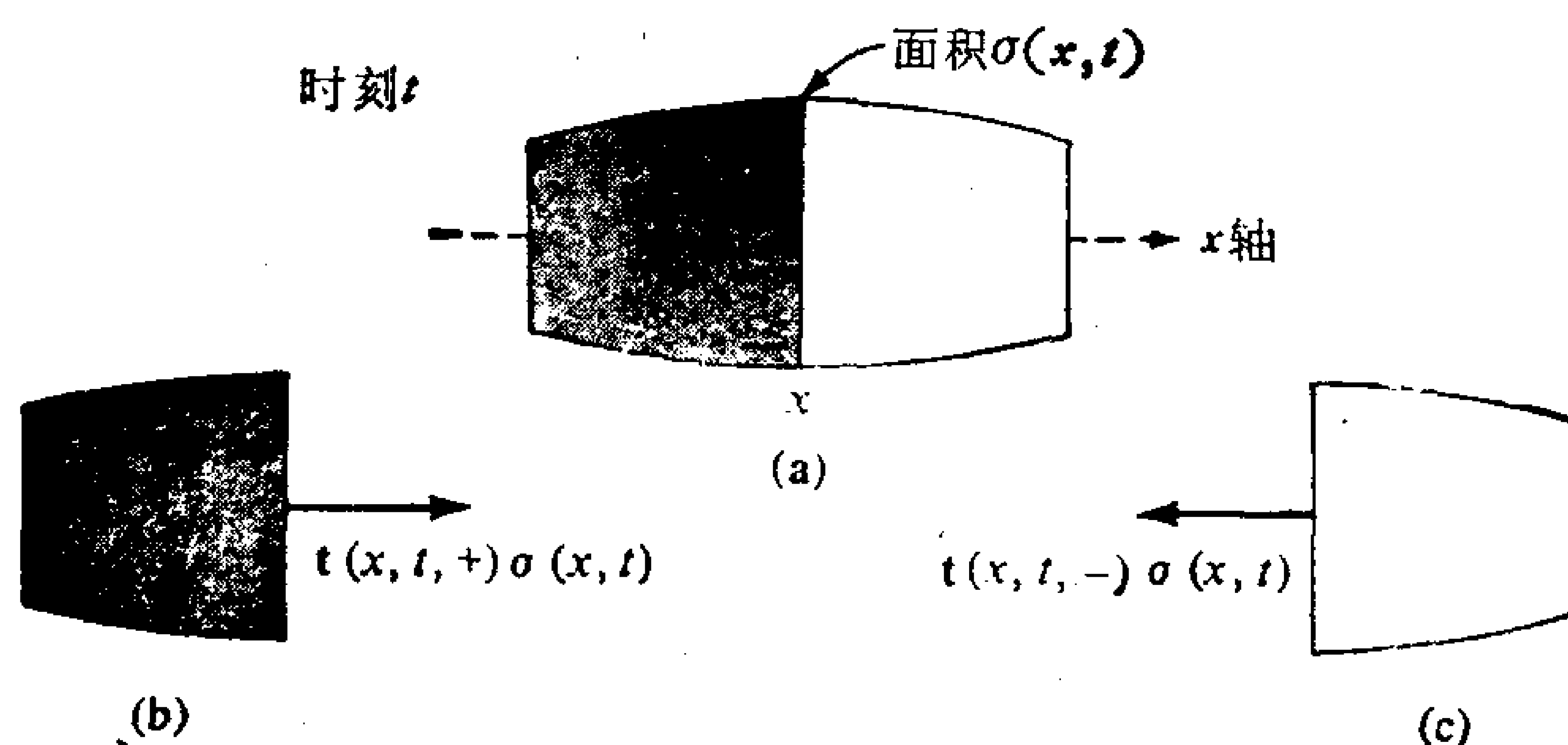


图 12.5 (a) 杆的横截面 x 处的应力是不明确的. (b) 应力矢量 $\mathbf{t}(x, t; -)$ 与横截面 $\sigma(x, t)$ 的乘积表示杆的无阴影部分作用在有阴影部分上的表面力. (c) 与 (b) 相反, 这里表面力表示杆的阴影部分作用在无阴影部分上的力

虑截面右边的物质所产生的应力,这样产生的力为 $\sigma(x, t)\mathbf{t}(x, t; +)$. 类似地, 在图 12.5(c)中, 我们示出了杆左端物质作用在右端物质上产生的力 $\sigma(x, t)\mathbf{t}(x, t, -)$,由于预料到有某种类型的"作用和反作用"定律存在,我们已把矢量 $\mathbf{t}(x, t; +)$ 和 $\mathbf{t}(x, t; -)$ 画作方向相反的矢量. 这样的一个定律我们将在下面来证明.

---

1) 记住,按照惯例,正端就是右端. 另一种表示方法虽然比较冗长但在 14.2 节中却要使用,它用 $\mathbf{t}(x, t; \mathbf{i})$代替 $\mathbf{t}(x, t; +)$. 这里 $\mathbf{i}$ 是单位正法向量,从应力所作用的物质指向外面. 类似地, $\mathbf{t}(x, t; -\mathbf{i})$ 用来代替 $\mathbf{t}(x, t; -)$. 而所示的矢量(在这种情况下是$-\mathbf{i}$)仍从应力所作用的物质指向外面.

我们必须指出，暂时我们还不知道图 12.5(b) 中的力是（如图中所示的那样）指向右边还是左边，也就是说还不知道该截面右边的物质对杆的左边是拉还是推。当对问题作了完全的分析以后，这个问题就可以解决．在没有这种分析的时候，箭头的方向是任意选择的，而箭头的这个方向没有意义是决不能忽视的．

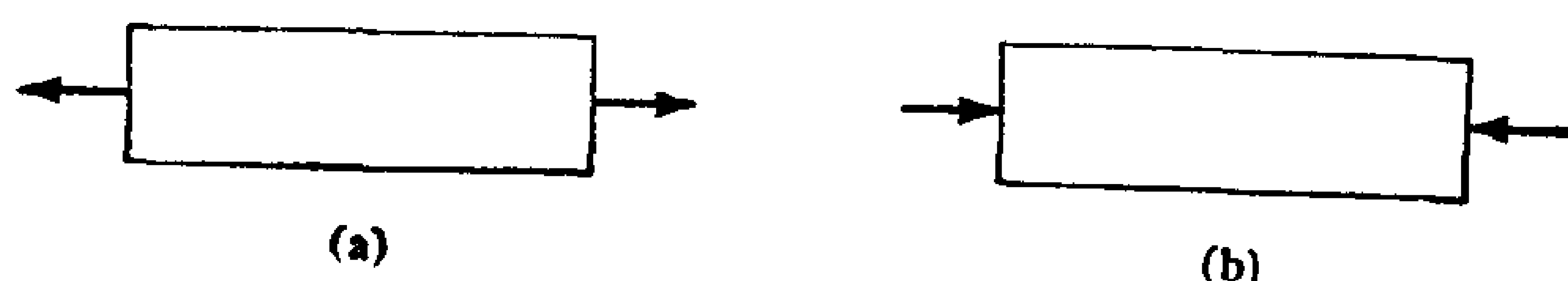


图 12.6 (a) 处于拉伸状态的杆（正应力）．
(b) 处于压缩的杆（负应力）

相反，如果我们知道杆的一部分处于拉伸状态，那末作用于端截面的力将如图 12.6(a) 所示，如果杆的截面处于压缩状态，那末力就如图 12.6(b) 所示．

拉伸状态称之为一种“正”应力，而压缩状态则看作是一种“负”应力．如果我们使用这种术语，我们就会明白习惯上有两种符号可以用．把拉伸看作是正的，就意味着我们用一种符号习惯把相对于物体本身指向外部的应力叫正应力，而把负应力看作是指向物内部的．另一方面，还有一种符号习惯，用 A 轴的方向来指示分量的正负．因而，我们从图 12.6(a) 可以看到，在具有“正”应力的拉伸状态下，应力 $\mathbf{t}(m, t; -)$具有负分量，而 $\mathbf{t}(m, t; +)$具有正分量．当然其反面对于压缩状态也是成立的．只要人们对所用的情形加以小心，那末两类符号习惯都是有用而且是等效的．

线动量的平衡

象在我们关于质量守恒的讨论中一样，让我们跟踪用空间坐标 $m(t) \leqslant x \leqslant n(t)$ 描述的杆的任一部分．在力学上，（线）动量是质量和速度的乘积．因此，这一节把**线动量**定义为积分

$$\int_{m(t)}^{n(t)} \rho\sigma\mathbf{v}\,dx. \tag{40}$$

线动量平衡的假设指出，杆任意部分线动量[1)]的时间改变率等于作用在上面的外力之和．因此

$$\frac{d}{dt}\int_m^n \rho\sigma\mathbf{v}\,dx$$
$$=\int_m^n \rho\sigma\mathbf{f}\,dx+\mathbf{t}(m,t;-)\sigma(m,t)+\mathbf{t}(m,t;+)\sigma(n,t). \tag{41}$$

我们采用与我们在讨论质量守恒时完全相同的方式来讨论(41)式左端的计算．先变换成物质坐标系，利用欧拉膨胀公式进行微商，然后再回到空间坐标．某些项因为质量守恒公式(33)而消去，在这以后，我们便得到[练习1(c)]如下的结果

$$\frac{d}{dt}\int_m^n \rho\sigma\mathbf{v}\,dx=\int_m^n \rho\sigma\frac{D\mathbf{v}}{Dt}\,dx. \tag{42}$$

由此，关于线动量平衡的表达式(41)便变成

$$\int_m^n\left[\rho\sigma\left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt}-\mathbf{f}\right)\right]dx$$
$$=\mathbf{t}(m,t;-)\sigma(m,t)+\mathbf{t}(n,t;+)\sigma(n,t). \tag{43}$$

(43)式的右端的形式有点棘手，因为它并不以积分形式出现，也就不可能使用 Dubois-Reymond 引理． 我们可以采用下面的方法来减轻这个困难，让我们考虑杆的任意部分的一个一般的截面 $x=x_0$，把杆的上述区间分成两部分 I 和 II，满足

$$\text{I}:\ m\leqslant x\leqslant x_0,\quad \text{II}:\ x_0\leqslant x\leqslant n.$$

(见图 12.7)我们现在把公式(43)应用于每一部分，结果得到

$$\int_m^{x_0}\rho\sigma\left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt}-\mathbf{f}\right)dx$$
$$=\mathbf{t}(x_0,t;+)\sigma(x_0,t)+\mathbf{t}(m,t;-)\sigma(m,t), \tag{44a}$$
$$\int_{x_0}^n\rho\sigma\left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt}-\mathbf{f}\right)dx$$
$$=\mathbf{t}(x_0,t;-)\sigma(x_0,t)+\mathbf{t}(n,t;+)\sigma(n,t). \tag{44b}$$

---

1) 如果杆的线动量确实是守恒的．那末(40)式对时间的导数就是零．

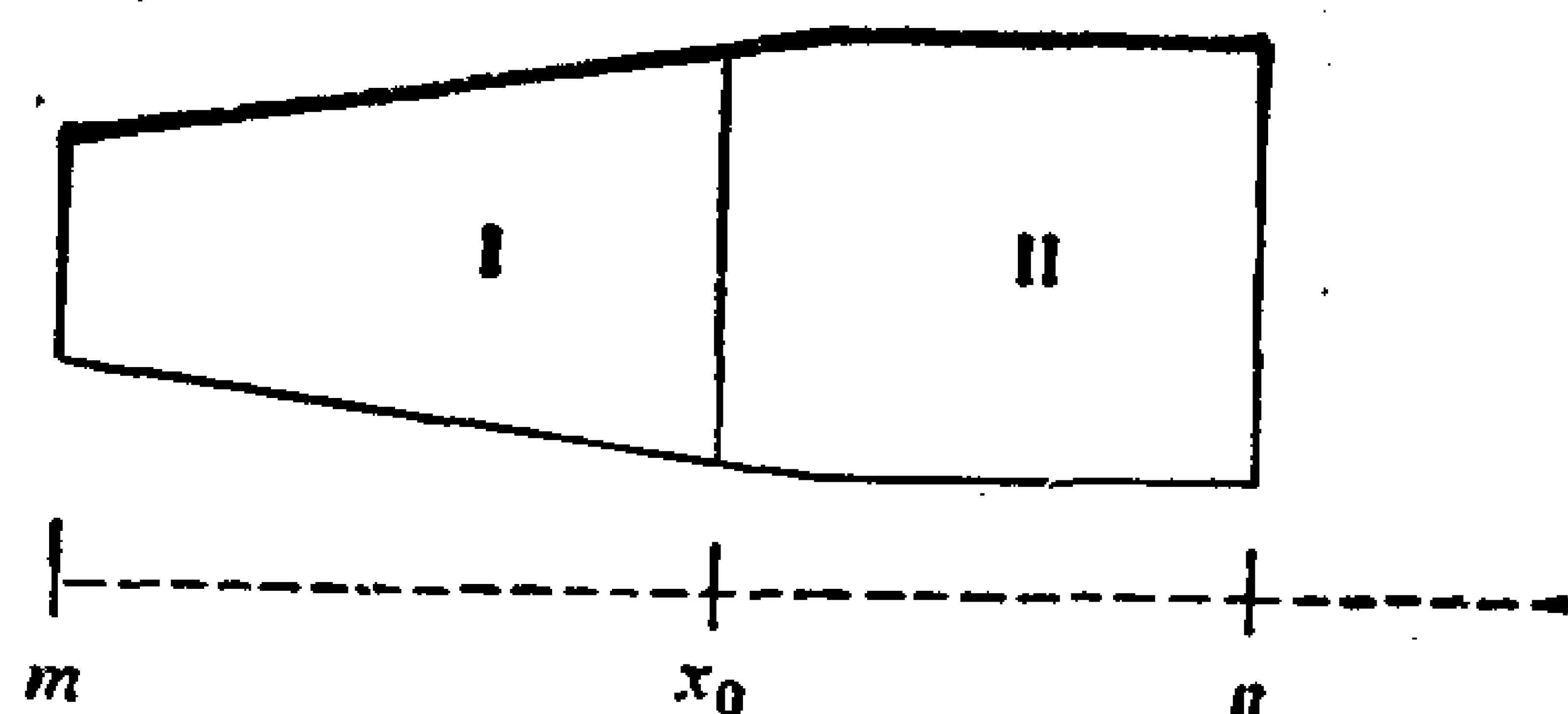


图 12.7 截面 $x = x_0$ 把杆分成两部分 I 和 II.

把(44a)与(44b)式相加,并减去(43)式,我们得到

$$\mathbf{t}(x_0, t; +)\sigma(x_0, t) + \mathbf{t}(x_0, t; -)\sigma(x_0, t) = 0.$$

因为 $x = x_0$ 是一个一般的截面,所以对任何截面,我们得到结论[1)]

$$\boxed{\mathbf{t}(x, t; -) = -\mathbf{t}(x, t; +).} \tag{45}$$

应该注意,在(45)式中所得出的结果可以看作是在普通的质点力系中牛顿第三运动定律(作用等于反作用)的一种形式,尽管在现在它是作为线动量守恒的一个结果而得到. 方程(45)也告诉我们在画出图 12.5 (b) 和 12.5 (c) 中方向相反的矢量 $\mathbf{t}(x, t, +)$ 和 $\mathbf{t}(x, t, -)$ 时,我们的预测是正确的.

我们现在可以利用作用-反作用的结果(45)式去把(43)式加以简化. 为了达到这一目的,我们引进如下的定义,应力分量 $T(x, t)$ 定义为[2)]

$$\boxed{\mathbf{t}(x, t; +) = T(x, t)\mathbf{i}.} \tag{46}$$

因此,从这个定义及(45)式,我们看到

$$\mathbf{t}(x, t; -) = -T(x, t)\mathbf{i}. \tag{47}$$

在一些例子中,我们要想在物质坐标下表示应力分量,并且将为此

---

1) 刚才完成的推导,除了符号以外,完全与适用于三维情况的推导相同(见练习 14.21).

2) 读者会注意到,在用大写字母表示在空间坐标中计算的量的这一方面,我们已经不一致了. 但是,我们将会发现,这种偏离会更密切地与习惯上在三维情况下所用的符号体系相匹配.

而使用符号 $\Gamma(A,t)$；这就是说，

$$\Gamma(A,t)=T[x(A,t),t] \text{ 或 } T(x,t)=\Gamma[A(x,t),t].$$

现在我们可以把(43)式的右端写成一个积分的形式

$$\begin{aligned}&\mathbf{t}(m,t;-)\sigma(m,t)+\mathbf{t}(n,t;+)\sigma(n,t)\\&=\mathbf{i}[T(n,t)\sigma(n,t)-T(m,t)\sigma(m,t)]\\&=\mathbf{i}\int_m^n\frac{\partial(T\sigma)}{\partial x}dx.\end{aligned}\tag{48}$$

因为只有一个分量存在，去掉(43)式的矢量形式，那末我们可以把线动量平衡写作

$$\int_m^n\left[\rho\sigma\left(\frac{Dv}{Dt}-f\right)-\frac{\partial(T\sigma)}{\partial x}\right]dx=0.\tag{49}$$

因为这部分杆是任选的，因而如果上面的积分连续的话，那末我们从 Dubois-Reymond 引理可以得到如下的结论：线动量平衡定律的最终形式为

$$\boxed{\rho\sigma\frac{Dv}{Dt}=\rho\sigma f+\frac{\partial(T\sigma)}{\partial x}.}\tag{50}$$

应变和应力-应变关系

在分析杆的运动时，通常我们把如下几点都看作已知的：(i)横截面积 σ；(ii)体力 f；(iii)所有其它变量的合适的初值．我们有三个未知函数：密度 ρ，速度 v [或者位移 $u(v=Du/Dt)$ 也行]，应力分量 T．但另一方面，我们仅得出了两个基本的常微分方程：(33)和(50)．因此，看来运动的数学描述是不完全的．

同时，我们对物理情况的讨论也是不足的，我们已导出了描述质量守恒和动量平衡这些*普适的物理要求*的**场方程**．但我们并未把组成杆的具体材料的性质包括进去．日常的经验表明，两根几何形状和载荷相同的杆，如果由不同的材料组成，则它们随后的运动可能会大不相同．我们分析中的这一不足之处可以通过引进**本构关系**得到弥补，而在我们的情况下这一关系可以通过把杆的变

形大小与产生这种形变所需的应力的大小关联起来去描述材料的这一特性。

首先我们必须给出"形变"这个概念的一个确切的涵意。为此，让我们考虑位于互相靠近的A和 $A+dA$ 处的两个截面。 在时间t时，这两个截面分别占据着位置 $x(A,t)$ 和 $x(A+\Delta A,t)$。所考虑的这两个截面间原先是长度为 ΔA 的该材料的微元。在时间t时，这部分材料的新长度为

$$x(A+\Delta A,t)-x(A,t),$$

它可用下式来加以近似

$$\frac{\partial x}{\partial A}\Delta A=\left(1+\frac{\partial u}{\partial A}\right)\Delta A$$

[我们已用了关系式(9) $x(A,t)=A+U(A,t)$.]

形变的合理的量度为

$$\frac{\text{新长度}-\text{原长度}}{\text{原长度}}. \tag{51}$$

在现在的例子里，就最低级的近似来说，这个量度为

$$\varepsilon(A,t)=\frac{(1+\partial U/\partial A)\Delta A-\Delta A}{\Delta A}=\frac{\partial U(A,t)}{\partial A}. \tag{52}$$

因此轴向应变，或简单地讲**应变**(人们就是这样称呼ε的)为

$$\varepsilon(A,t)=\frac{\partial U(A,t)}{\partial A}. \tag{53}$$

因为我们在对形变的量度作近似时，已忽略了ΔA的高次幂，因而人们常常把应变说成是单位初始微元长度的微元长度变化。以后将会看到，在三维情况下，给应变定义一个合适的量度，这是一个更为复杂的任务。

在建立本构方程时，我们将假定应力分量 $\Gamma(A,t)$ 是应变 $\varepsilon(A,t)$ 的一个函数。这就使得我们的感觉具体化：要使杆伸得越长，就必须把它拉得越起劲。我们将限于杆的初始状态不受应力的情况。因此，应力分量与应变的关系就会出现如图 12.8 中粗黑线所示的样子。特别是该曲线必然通过原点。

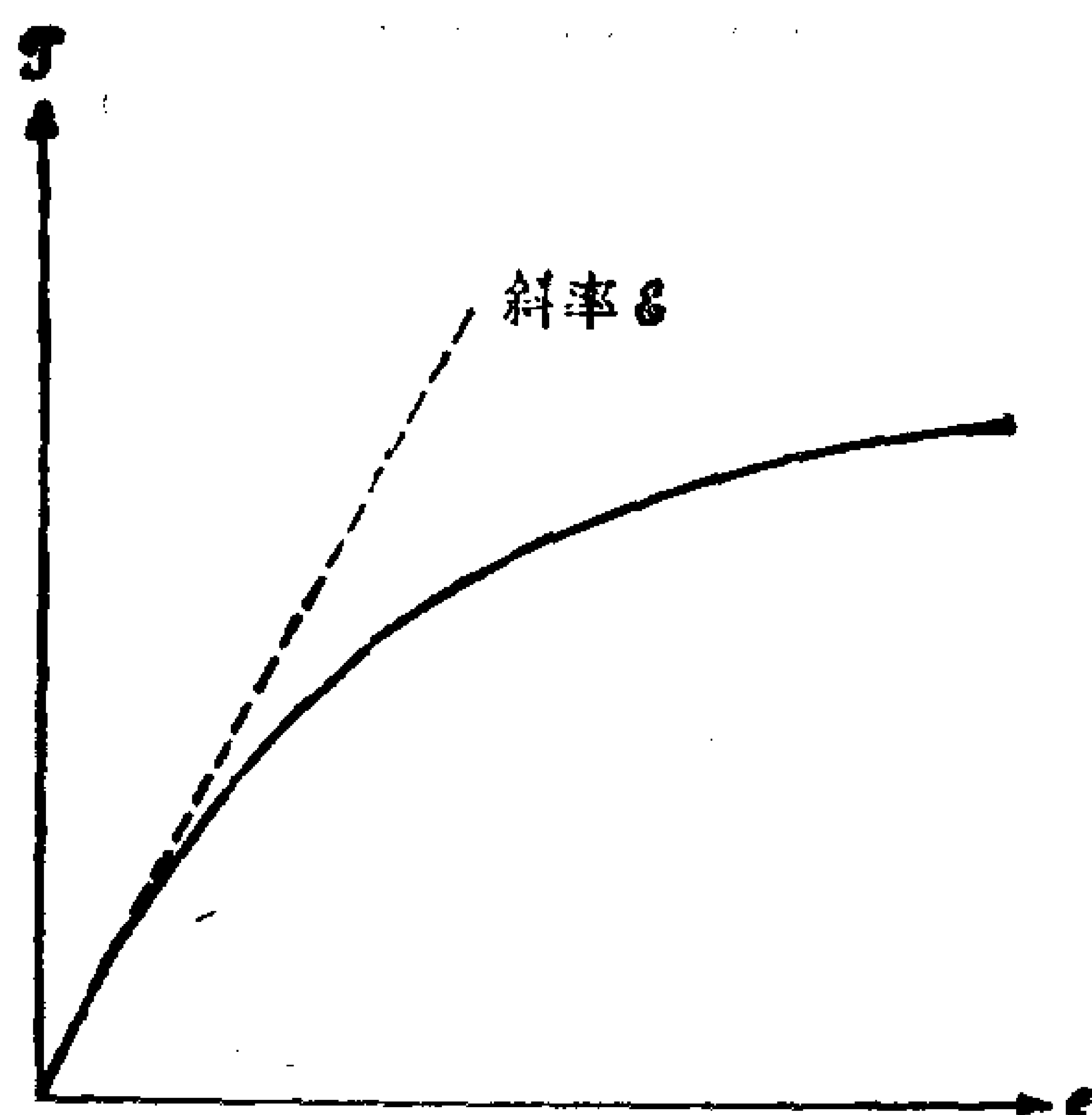


图 12.8 应力Γ和应变ε之间"典型"的关系曲线.

我们不根据实验就可以取得一些进展[1]. 我们断定,对于充分小的应变ε,图 12.8 中的曲线可以用其在原点处的切线去近似. 如果这切线的斜率用$\mathscr{E}$来表示,我们因此就可假设

$$\Gamma(A, t)=\mathscr{E}(A, t)\cdot\varepsilon(A, t) \tag{53a}$$

更简单地,我们得到

$$\Gamma=\mathscr{E}\varepsilon=\mathscr{E}\frac{\partial U}{\partial A}. \tag{53b}$$

在虎克定律(53b)中,比例因子$\mathscr{E}$称之为杨氏模量. 顺便说一下,虎克(Robert Hooke)(十七世纪的一个与牛顿同时代的人)假设应力与应变的正比关系仅适用于大尺度的或总体的情形. 在虎克定律的逐点或局部形式中,杨氏模量可以是A和t的函数,因为杆的性质可以随这些参数而变化. 但我们将假定

$$\mathscr{E}(A, t)=\mathscr{E}(A, 0), \tag{54}$$

这里杆的原始组成,因此刚度系数$\mathscr{E}$的初始分布是已知的[2].

在空间变量中,杨氏模量用E来表示. 这就是说 $E(x, t)=$

1) 这是一个很危险的步骤,但有时却是必要的一步. 也许只有经过推测一个合理的本构方程,然后再作一些偶然而有意义的理论推论,人们才能使实验工作者相信去研究某种物理现象是值得的.

2) 老化效应可以让$\mathscr{E}$作为t以及A的已知函数而包括进来.

$\mathscr{E}[A(x,t),t]$. 典型的例子如钢的 $E=3\times10^7$ 磅/英寸²(2×10^{11} 达因/厘米²),铝的 $E=10^8$ 磅/英寸²(1×10^{12}达因/厘米²).

我们注意到,按照(21)式及 $F\equiv U$ 和 $f\equiv u$, 用空间坐标来表示,我们的本构假设为

$$T(x,t)=E(x,t)\frac{\partial u/\partial x}{1-\partial u/\partial x}. \tag{55}$$

毫无疑问,如果应变足够小的话,那末用在原点处的切线代替实际的应力-应变曲线是一种好近似. 问题在于: 是否其中可找到这种小应变的有意义问题存在? 原来有一大类这样的问题. 为了示明这一点,让我们来考虑标准的39英尺长的铁路导轨的变化,在从冬天到夏天的温度变化过程中,很容易出现 1/4 英寸的膨胀. 相应的应变则为 0.00053. [如果铁轨之间没有用间隙作为预防措施以允许这种膨胀,最终的轴向应力(大约为 16000 磅/英寸)会足以使铁轨从笔直的位置上弄弯.]

上述论点应该足以激励我们去寻求本构假设的结果. 利用胡克定律,我们可以把动量平衡要求(50)式写作

$$\rho\sigma\frac{Dv}{Dt}=\rho\sigma f+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathscr{E}S\left.\frac{\partial U}{\partial A}\right|_{x}\right). \tag{56}$$

另一方面,利用(55)式和结果 $v=Du/Dt$, 我们得到

$$\boxed{\rho\sigma\frac{D^2u}{Dt^2}=\rho\sigma f+\frac{\partial}{\partial x}\frac{E\sigma\partial u/\partial x}{1-\partial u/\partial x}.} \tag{57}$$

这里,在基本方程中,我们没有明显地遗留掉东西. 因此,让我们来把本情形考查一下,看看所出现的方程数是否足够.

在动量方程(57)中,我们把 σ、E 和 f 看作已知的, 而 u 和 ρ 是未知的. 因此,从初始的面积分布我们可以由 (28) 式把 σ 当作 u 的函数来确定. 类似地,按照(54)式,杨氏模量也是一个从初始分布 $\mathscr{E}$ 来确定的 u 的函数:

$$E(x,t)=\mathscr{E}[x-u(x,t),0]. \tag{58}$$

最后,体力 $F(A,t)$ (典型的例子是重力)将看作是与给定的初始

分布 $F(A,0)$ 相等的,因此

$$f(x,t)=F[x-u(x,t);\,0],\tag{59}$$

可看作是已知的.

我们又记得 $v=Du/Dt$,我们看到,质量守恒方程(33)

$$\frac{D(\rho\sigma)}{Dt}+\rho\sigma\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

也含有两个未知数 u 和 ρ. 因此，我们面临的是与未知数个数相同的两个方程. 即使对于线性代数方程，我们也不能从方程数与未知数相等这一事实得到肯定的结论. 尽管如此,我们仍能得到倾向性的结论，即我们在表述基本微分方程方面做了一件令人满意的工作.

初始条件和边界条件

我们指望,一个恰当地表述的问题将具有唯一的解. 但是,在最简单的力学问题中(这里也一样),除非规定了初始条件,是不能指望有唯一性的. 肯定地讲,从具有不同初始形状的杆,必然可以指望得到不同的位移和密度变化. 因此,我们作如下的规定

$$u(x,0)=u_0(x),\quad v(x,0)=v_0(x),$$
$$\rho(x,0)=\rho_0(x),\tag{60}$$

式中 u_0, v_0 和 ρ_0 是已知函数.

关于杆两端出现的情况，我们也必须作一点说明. 在有限长度的杆和半无限长杆的有限端的情况下，这无疑是合适的. 也许情况没有无限杆时那么清楚,但是，我们将具有一种直觉，即如果对“无限”远处的情况一点也没有说到，那么要试图找到此时的唯一解就可能有严重的困难. 我们将以物质坐标来阐述边界条件,并让读者去完成转换到空间坐标中去的任务.

我们假设杆在 $A=L$ 处有有限的端点. 首先考虑杆在一端砌入因而不再能移动的情况. 在这种情况下，我们把边界条件称之为**固定端**. 于是边界条件可写作

$$u(L,t)=0.\tag{61}$$

[不用说，(61)式必须适用于所有的正 t] 与刚才所论述的情况相反，我们可以有没有约束即**自由端**的情况. 在这些条件下，末端不再有限止运动的力作用着. 在端点 $A=L$ 处，利用胡克定律 (53)式可以把这个要求写作

$$\mathscr{E}(L,t)S(L,t)U_A(L,t)=0, \qquad (62a)$$

式中我们已用下标 A 表示偏导数.

大多数情况下，在 $A=L$ 处 $\mathscr{E}$ 和 S 都不等于零，因而 (62a) 式可用较简单的形式

$$U_A(L,t)=0 \qquad (62b)$$

代替. 但是如果杆在达到 $A=L$ 处是一点，那末 S 将等于零. 然而在这种情况下却一定不要得出式 (62a) 没有意义的结论. 当 S 在 $A=L$ 处为零时我们经常发现，运动方程的可能解可以在这一点具有奇异性. 于是(62a)式告诉我们，奇异性不可能强到使所示出的乘积不等于零. 例如，如果 S 的性质在 $A=L$ 处与在 $(A-L)$ 附近一样，那末性质象 $\log(A-L)$、而且被称之为解的 U，就为(62a)式所排除.

固定端和自由端是实际中遇到的最最常见的端点条件. 但是，还有许多确实出现的其他种类的端点条件，我们将考虑其中的两种. 这两种边界条件在推导中有点微妙. 主要是因为我们必须小心代数符号.

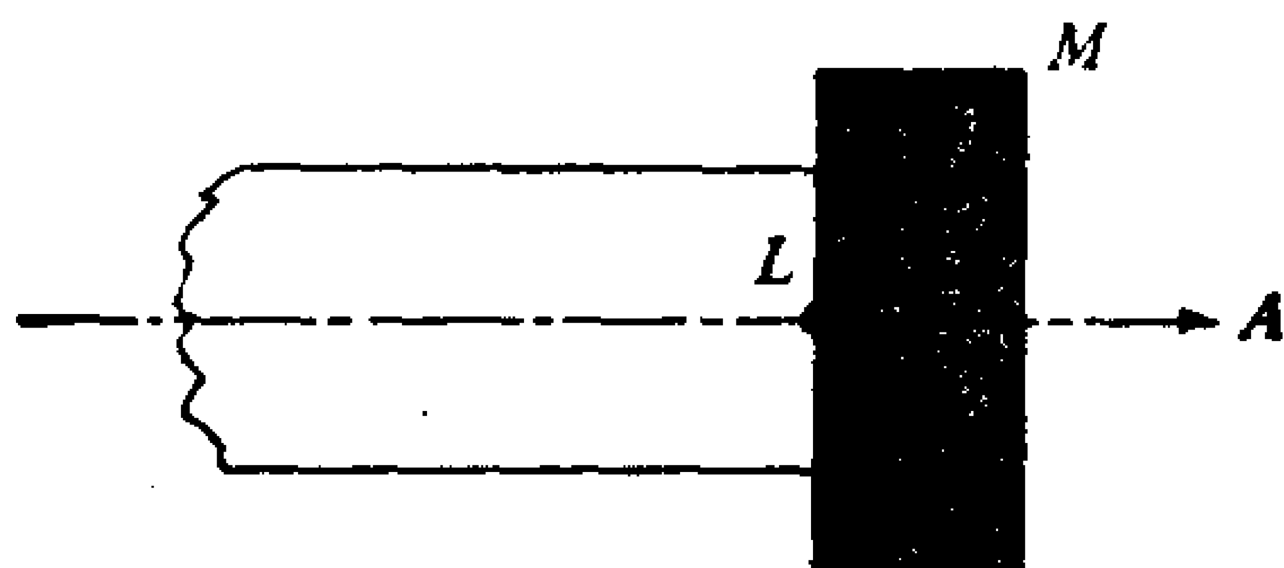


图 12.9 与质量 M 相连接的半无穷杆

让我考虑一个固定在杆的自由端 $A=L$ 处的刚性质量，如图 12.9 所示. 质量 M 将与杆的这一端经受同样的位移 $U(L,t)$. 现在让我们把这块质量本身孤立起来. 如果我们忽略重力的影响，

由于作用在该质量上的力为 $S(L, t)\mathbf{t}[x(L, t), t; -]$,用应力分量来表示,则

$$\mathbf{t}[x(L, t), t; -] = -\mathbf{i}T[x(L, t), t].$$

对质量 M 应用牛顿定律,并利用胡克定律代替应力分量,我们便得到下列边界条件:

$$-S(L, t)\mathscr{E}(L, t)U_A(L, t) = MU_{tt}(L, t). \qquad (63)$$

在 $M \to 0$ 的极限下,上式回到了(62a)式,这是应该的.

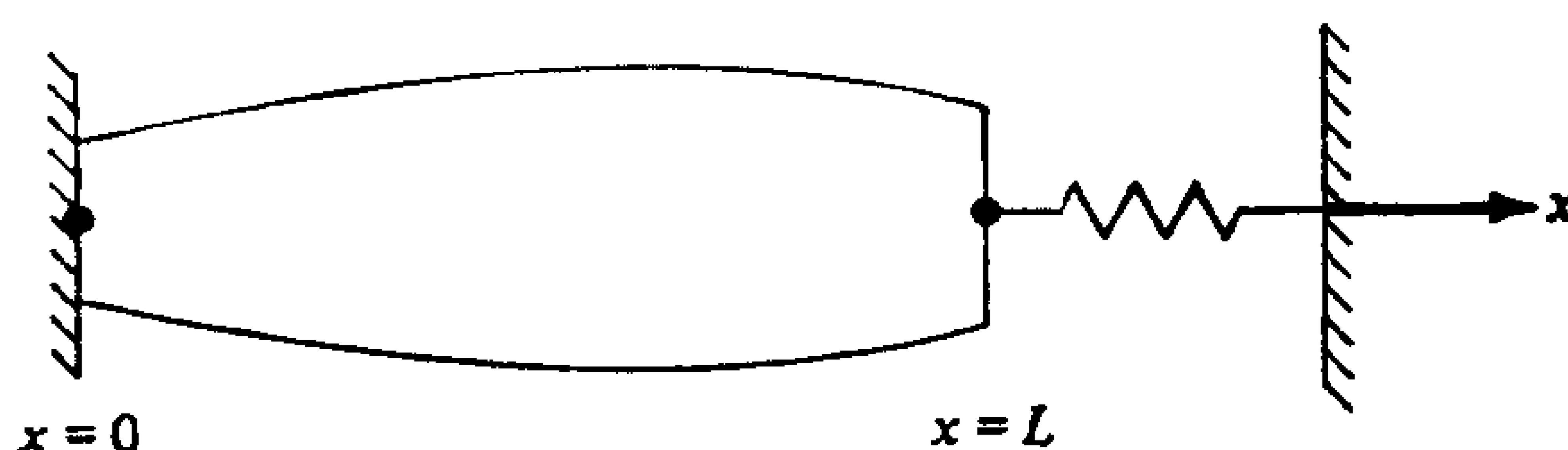


图 12.10 一端砌入另一端为线性弹簧所约束的杆

作为我们的最后一个例子,我们考虑一根直线弹簧,其一端附着于上述杆的自由端,另一端则被刚性地固定起来(图 12.10). 当杆经受各种位移时, 弹簧也跟着位移. 但是由于弹簧的惯性便存在着迟后现象. 一般地讲,我们面临着一个分离的、困难的、与这根弹簧有关的问题. 我们必须寻找一个在杆-弹簧连接处与杆的解相匹配的解. 为了避免这一困难,我们将假定弹簧很轻,它的惯性可以忽略. 在这些情况下. 杆的位移将立即引起弹簧的相应的均匀拉伸.

考虑杆端头处的一薄片, 其初始位置在 $L-\Delta$ 和 L 之间. 这一薄片的左表面有一个表面应力 $\mathbf{t}[x(L-\Delta, t); t]$ 作用着. 当求作用在右表面上的力时, 我们假定弹簧最初处在未伸长的位置. 我们用 k^2 表示弹性常数, 那末, 弹力的大小为 $|k^2U \times (L, t)|$ 我们断定,由于弹簧而作用在杆上的实际力为 $-k^2U(L, t)\mathbf{i}$. 事实上,如果 $U(L, t)$ 是正的,这个力便向左,这就是由于压缩的弹簧所引起的力的恰当方向. 另一方面,如果 $U(L, t)$ 是负的,作用在杆端的力向右,这就是当弹簧伸长时引起的力的恰当方

向.

最后一步是把薄片动量改变的速率与刚才所讨论的表面力以及体力的和相等. 取极限 $\Delta \to 0$,我们便看到, 惯性项和体力可加以忽略. 因此边界条件

$$S(L,t)\mathscr{E}(L,t)U_A(L,t) = -k^2U(L,t) \tag{64}$$

就作为表面力和弹力之间所要求的平衡出现(练习 15). 象(64)式那样包括未知函数及其一阶导数的线性组合的边界条件经常称为**阻抗边界条件**

线性化

一个表述得很好的问题似乎是由基本方程(57)和(33)、初始条件(60)以及一对我们刚才所推导的边界条件所给出的. 但是方程是非线性的,因此,一般来说, 需要用数值方法或高等的解析方法去得到有用的精确解或近似解. 把这些方法放在本章是不合适的,本章应该是连续介质力学的比较简单的引论. 因此,我们干脆把方程组及其边界条件加以线性化.

值得做线性化的基本事实是,在金属材料中,甚至很大的应力下也只产生很小的应变. 因此, 我们将在位移 u 及其导数与 1 相比很小的假设下对所有的表达式作系统的简化. 我们也将假设某个具体位置 x 处的密度与它的初值相比,其变化不大.

考虑现在(时间 t)位于 x 处的横截面积 $\sigma(x,t)$. 我们记得,我们假定过任何给定截面的面积不随时间而变,即$S(A,t)=S(A,0)$. 由此我们从(28)式导出

$$\sigma(x,t) = S[x - u(x,t), 0].$$

因为已假设 u 很小,我们应该能作如下的近似:

$$\sigma(x,t) \approx S(x,0). \tag{65}$$

这个近似的作用是用原来离开原点 x 单位的截面积去代替现在离开原点 x 单位的截面积. 当位移很小时, 这种近似事实上似乎是合理的.

看一下精确的和近似的横截面积之间的差异就可弄清楚我们所作的近似的性质．按照中值定理，我们可以写出

$$|S(x,0)-S(x-u,0)|=|uS_x(\xi,0)|, \tag{66}$$

式中ξ位于$x-u$和x之间．假定导数S_x在x的附近是有界的，那末，把u取得足够小就可以把(66)式的右端取成所希望的那样子．为了得到一定程度的近似，导数越大，我们就必须把u取得越小．这正是我们所要预期的；截面积改变得越迅速，那末在估计测得这个面积的正确位置时所造成的误差也就越大．

在同一量的精确值和近似值同时存在时，就会碰到一些符号上的困难．似乎最好用一个单变量的函数$\sigma(x)$去表示我们对$\sigma(x,t)$的近似．并用一个"尖角"号去表示精确值和近似值之差．因此，我们将写出

$$\sigma(x)\equiv S(x,0),\quad \hat{\sigma}(x,t)\equiv\sigma(x,t)-\sigma(x). \tag{67a,b}$$

有了这种符号，我们的近似式(65)便可写作

$$\sigma(x,t)\approx\sigma(x)\ [\text{即}\ |\hat{\sigma}(x,t)\ll|\sigma(x)|]. \tag{68}$$

记住，$\sigma(x)$是一个已知函数，它是离开原点x单位的一个截面积的初始面积

在(58)和(59)式中，我们有了(28)式的精确的类比，因此，我们可以按照与处理$\sigma(x,t)$完全相同的方法来讨论杨氏模量$E(x,t)$和体力$f(x,t)$．我们用每个量在x处的已知初始值来近似地表示这个量现在在x处的值[1]．因此，我们定义

$$E(x)\equiv\mathscr{E}(x,0),\quad \hat{E}(x,t)\equiv E(x,t)-E(x); \tag{69}$$

$$f(x)\equiv F(x,0),\quad \hat{f}(x,t)\equiv f(x,t)-f(x). \tag{70}$$

我们假定

$$|\hat{E}(x,t)|\ll E(x,t),\quad |\hat{f}(x,t)|\ll|f(x,t)|, \tag{71}$$

因此

$$E(x,t)\approx E(x),\quad f(x,t)\approx f(x). \tag{72}$$

1）粗略地讲，我们忽略了物质和空间坐标之间的差异．

我们已一再说过，$\sigma(x,t)$，$E(x,t)$ 和 $f(x,t)$ 都看作是已知函数，尽管(在近似之前)这些函数的宗量中包含着未知位移 u. 以前 $\rho(x,t)$ 是看作未知的，但是这个函数也必须用它的已知的初值加以近似.否则，动量方程 (57) 中的项 $\rho(x,t)\sigma(x,t)D^2u/Dt^2$ 将仍为非线性的,对密度作近似要特别细心,因为假设

$$\delta(A,t)=\delta(A,0)$$

是不合适的. 如果这个假设成立,物质就是不可压缩的了,因此对于刚体运动,仅有一维运动是人们不感兴趣的 (练习 11).

虽然 $\delta(A,t)\neq\delta(A,0)$，但我们仍然写作

$$\rho(x)\equiv\delta(x,0),\ \hat{\rho}(x,t)\equiv\rho(x,t)-\rho(x). \tag{73}$$

并假设

$$|\hat{\rho}(x,t)|\ll|\rho(x)|,\ \text{因而}\ \rho(x,t)\approx\rho(x). \tag{74}$$

如果我们以适当的泰勒级数的最低阶项去近似差分 $\hat{\rho}$，那末我们就得到 [练习 18(*a*)]

$$|\hat{\rho}(x,t)|\approx|u\delta_x+t\delta_t|. \tag{75}$$

知道位移 u 很小,这一点并不足以保证 $|\hat{\rho}|$ 很小，小位移的作用有可能产生连续的压缩或稀疏，这些最终导致某个截面上的密度显著地偏离它的初始值. 从(75)式我们看到，如果运动仅进行了一个足够短的时间(t 足够小),那末这种情况是出现不了的.

作为我们一系列近似的最后一环,我们记得速度 v 为

$$v=\frac{Du}{Dt}=u_t+vu_x.$$

求解 v,我们得到

$$v=\frac{u_t}{1-u_x}. \tag{76}$$

因为我们假设 u 及其导数比 1 小,所以我们可以作如下的近似

$$v(x,t)\approx\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}. \tag{77}$$

请注意假设 u_t 很小意味着

$$|v(x,t)|\ll 1. \tag{78}$$

很容易证明（练习 19），如果我们只保留最低阶项，那末我们就得到动量平衡方程(57)的线性化形式如下:

$$\rho(x)\sigma(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\rho(x)\sigma(x)f(x)+\frac{\partial}{\partial x}\left[E(x)\sigma(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]. \tag{79}$$

连续方程(33)可写成下列形式

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho(x,t)\sigma(x,t)]+v\frac{\partial}{\partial x}[\rho(x,t)\sigma(x,t)]+\rho(x,t)\sigma(x,t)\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

头一项可改写如下:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho(x,t)\sigma(x,t)]=\frac{\partial}{\partial t}\{[\rho(x)+\hat{\rho}(x,t)][\sigma(x)+\hat{\sigma}(x,t)]\},$$

再次保留最低阶项，我们便得到连续方程的线性化形式如下

$$\frac{\partial}{\partial t}[\sigma(x)\hat{\rho}(x,t)+\rho(x)\hat{\sigma}(x,t)]+v\frac{\partial}{\partial x}[\rho(x)\sigma(x)]+\rho(x)\sigma(x)\frac{\partial v}{\partial x}=0. \tag{80}$$

方程(79)仅包含一个未知函数位移 $u(x,t)$. 合适的边界条件为式(61)—(64)的线性化形式. 其形式如下[练习 16(b)]:

固定端:	$u=0.$	(81a)
自由端:	$\sigma E u_x=0.$	(81b)
质量负荷端:	$Mu_{tt}+\sigma E u_x=0.$	(81c)
轻弹簧约束端:	$\sigma E u_x+k^2 u=0.$	(81d)

每个边界条件都要加到在相应端点处的(已知)初始位置上.

注释，在上述方程和本章其余的方程中，如果在写 σ、E 和 f

时不带宗量，就隐含着 $\sigma(x)$，$E(x)$，$f(x)$ 是已知函数.

看来一维杆弯曲的自洽线性化数学模型是由微分方程 (79)、在杆的每一端象式(81)那样的边界条件和下列初始条件组成的:

$$\boxed{u(x, 0) = u_0(x), \ u_t(x, 0) = v_0(x)} \tag{82}$$

那末连续方程(80)起什么作用呢? 如果我们引进单位长度的质量 $\bar{\rho}(x, t)$ 及其近似 $\rho(x)$:

$$\bar{\rho}(x, t) \equiv \rho(x, t)\sigma(x, t), \ \bar{\rho}(x) \equiv \rho(x)\sigma(x). \tag{83}$$

那末我们就有点容易看到这个问题的解答. 在最低阶范围内,

$$\begin{aligned}\bar{\rho}(x, t) - \rho(x) &\equiv [\rho(x) + \hat{\rho}(x, t)][\sigma(x) + \hat{\sigma}(x, t)] \\ &\quad - \rho(x)\sigma(x) \\ &\approx \rho(x)\hat{\sigma}(x, t) + \hat{\rho}(x, t)\sigma(x).\end{aligned}$$

因此，线性化连续方程(81)可看作是

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}[\bar{\rho}(x, t) - \bar{\rho}(x)] \\ &\approx -\frac{\partial}{\partial x}[v(x, t)\rho(x)\sigma(x)]\end{aligned} \tag{84}$$

于是，我们看到，在线性理论中，连续方程给出了单位长度质量的实际值和初始值之差的一级修正. 一旦得到了速度 $v = u_t$，这种修正是很容易计算的. 然而，在大多数应用中人们对这种修正并不是很有兴趣的，从而往往在线化理论中忽略连续方程. 尽管如此，一个仔细的工作人员至少要作出校核，看看预测的修正是否真正很小，以使近似分析看起来是自洽的.

练　　习

1. (a) 试证明(8)式.

(b) 试证明(21)式.

(c) 试证明(42)式.

2. 考虑下式所描述的运动

$$x = A + t\left(A - \frac{1}{2}\right), \ 0 \leqslant A \leqslant 1, \ 0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

(a) 用定性的语言描述运动.

(b) 求 $U(a,t)$,从公式 $u=x-A$ 求 $u(x,t)$. 试证明 $u|_A=U$.

(c) 求

$$V(A,t),\ v(x,t),\ \frac{\partial V(A,t)}{\partial t},\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}.$$

(d) 在上述第二和第四个表达式中作替代 $x=x(A,t)$, 比较第一对表达式、第二对表达式. 完全用物质导数来讨论.

3. 考虑下式所描述的运动

$$x=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}Ae^t,\ 0\leqslant t\leqslant t_1.$$

(a) 求作为 x 和 t 的函数的物质变量 A;

(b) 计算 $U(A,t)$ 和 $u(x,t)$;

(c) 求物质坐标下的速度 $V(A,t)$ 和空间坐标下的速度 $v(x,t)$;

(d) 用直接计算校核这种情况下的欧拉膨胀公式:

4. 建立下列导数公式

(a) $D(f\pm g)/Dt=Df/Dt\pm Dg/Dt$.

(b) $D(fg)/Dt=f(Dg/Dt)+g(Df/Dt)$.

(c) 通常的商的导数公式的类比是否成立?

5. 考虑一根截头正圆锥式的杆,长度为 L,一端半径为 r_1, 另一端为 r_2,假定杆经受练习 2 所描述的运动.

(a) 求时间 $t=0$ 时的横截面 $S(A,0)$;

(b) 令 $\sigma(x,t)$ 表示时间 t 时位置 x 处的横截面积,求 $\sigma(x,t)$ 并计算 $D\sigma/Dt$. 这与 $\partial S(A,t)/\partial t$ 相比较如何?

6. 直接求解方程

$$\frac{d}{dt}\int_{x(M,t)}^{x(N,t)}\bar{\rho}(x,t)dt,\quad \bar{\rho}\equiv\rho\sigma.$$

推导质量守恒方程.

7. (a) 利用课文中关于质量守恒的讨论中所用的步骤和符号

证明

$$\frac{d}{dt}\int_{m(t)}^{n(t)} G dx = \int_{m(t)}^{n(t)} \left[\frac{DG}{Dt} + G\frac{\partial v}{\partial x}\right] dx.$$

(b) 利用分部积分推导一维形式的**雷诺输运定理**:

$$\frac{d}{dt}\int_{m(t)}^{n(t)} G dx = \int_{m(t)}^{n(t)} \frac{\partial G}{\partial t} dx + Gv\Big|_{m(t)}^{n(t)}.$$

(c) 解释(b)的结果.(在三维情况下解释相同;见 14.1 节)

8. 如果 $v(x, t)$ 与 t 无关,则运动是定常的.

(a) 如果你熟悉一阶偏微分方程,试证明最普遍的定常运动的位移可用某函数 F 和 g 写作形式

$$u(x,t) = x - F[t - g(x)]$$

(b) 关于其他感兴趣的量,可说些什么?

9. 证明物质坐标下的质量守恒方程可以很快地从下式得到

$$\frac{\partial}{\partial t}[\delta(A, t)S(A, t)J(A, t)] = 0.$$

试推导另一种形式:

$$\delta(A, t)S(A, t)J(A, t) = \delta(A, 0)S(A, 0).$$

[因为 $S(A, t) \equiv S(A, 0)$,所以横截面积因子可以消去.]

10. 在课文中关于质量守恒的讨论中,任意的是 M 和 N,而不是 $m(t)$ 和 $n(t)$. 尽管如此,(33)式仍可直接从(32)式得到. 试证明这一点.

11. 证明式(39)意味着对某些函数 f 有 $x(A,t) = A + f(t)$ 解释这一结果,它合理吗?

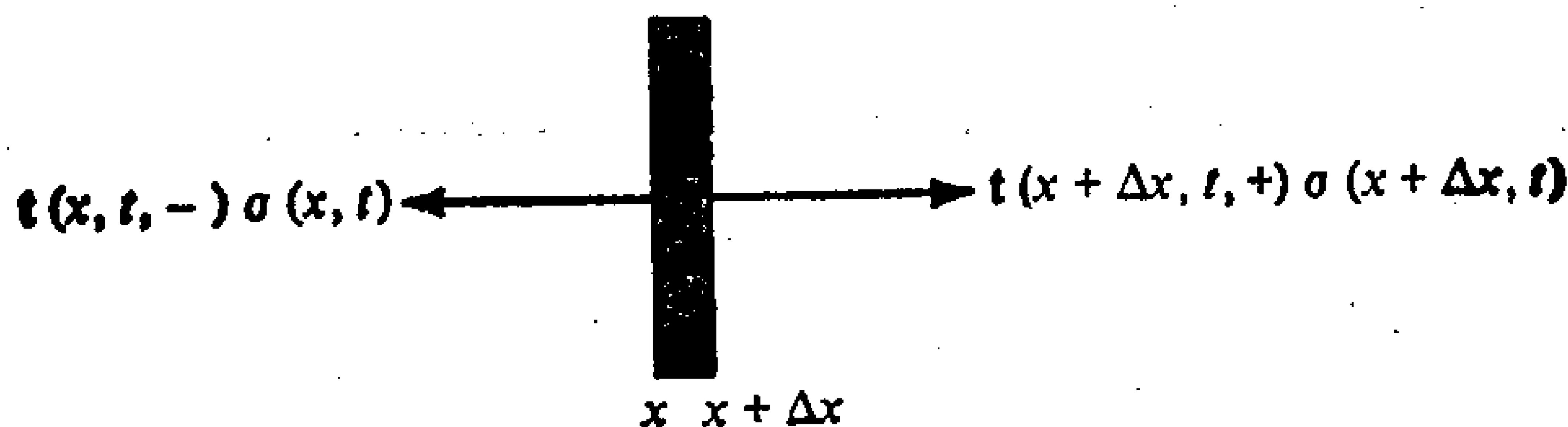


图 12.11 作用在截面积为 σ 的一根杆上的薄片上的表面力.

12. 用"薄片"法得到"作用-反作用"方程. 考虑宽度为 Δx 两端受

力如图 12.11 所示的杆的一个横截面．应用动量守恒方程，然后让 $\Delta x \to 0$。

13. 如果我们希望自如地推导近似运动方程(79)，那末我们可以用“薄片”方法，并在进行过程中作线性化．请以下列方式完成这一步骤．图 12.12 示出了作用在杆的宽度为 Δx 的小薄片上的力．

(a) 把牛顿第二运动定律应用于薄片；

(b) 求当 $\Delta x \to 0$ 时方程的极限形式；

(c) 利用虎克定律．

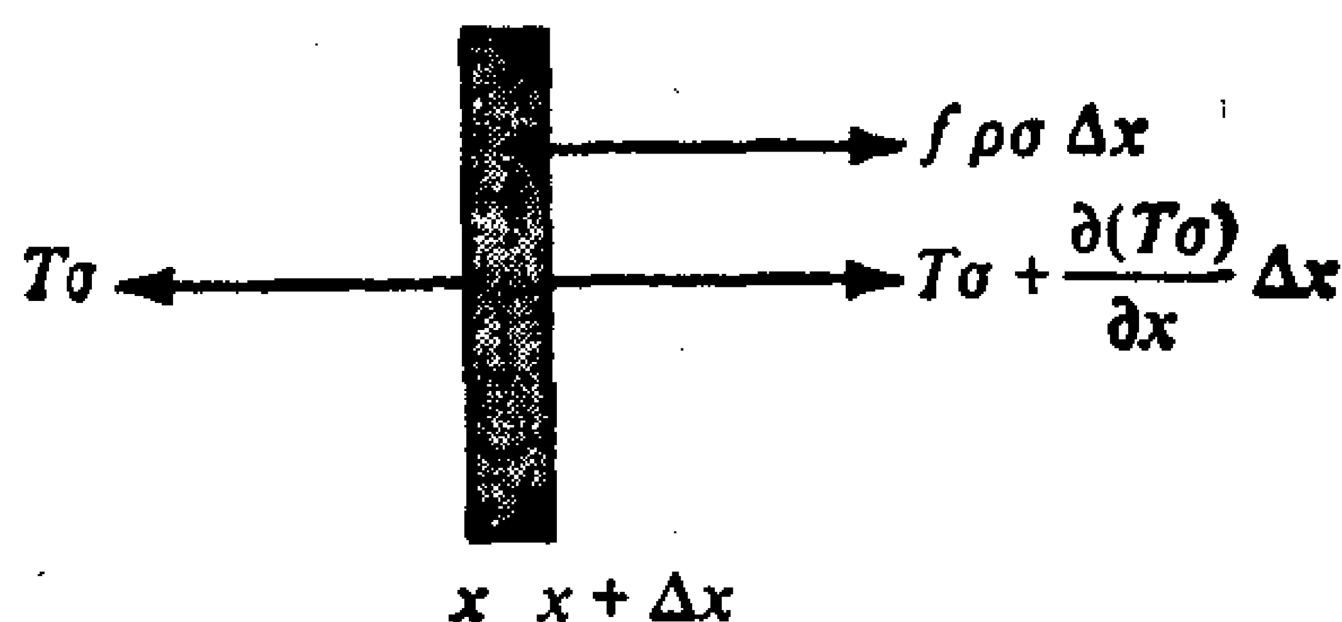


图 12.12　作用在杆的薄片上的体力和表面力

14. **欧拉应变**[1]的定义为对下面的商的最低阶近似：

$$\frac{\text{现在的长度}-\text{原来的长度}}{\text{现在的长度}}$$

求空间坐标下欧拉应变的表达式．用两种不同的方法．

(a) 考虑现在（时间 t）位于 x 和 $x+\Delta x$ 之间的杆的一个截面；

(b) 考虑起初位于 A 和 $A+\Delta A$ 之间的杆的一个截面．

15. 完成(64)式的推导．

16. (a) 把边界条件(62a)、(63)和(64)式改成关于 u 的边界条件；

(b) 作线性化，从而得到式(81b—d)．

1）欧拉的名字与空间坐标联系在一起，而拉格朗日则与物质坐标有关．因此，当长度的改变是与现在的长度相比较时就用欧拉的名字，而与原来的长度作比较时就用拉格朗日的名字．

17. 在得到边界条件 (63) 式时忽略了重力. 这在什么情况下是合理的?

18. (a) 试证明(75)式;

(b) (60)式的函数 $\rho_0(x)$ 和(73)式的函数 $\rho(x)$ 之间的关系是什么?

19. 试证明我们的各种假设使(79)式成为动量平衡方程 (57) 的一级近似.

20. 试证明式 (84) 有一种非常合理的物理解释. 如果你在固定极限 $x=a$ 和 $x=b$ 之间积分,那末你就能比较容易地得到这种解释.

21. 试证明一根 39 英尺的钢轨伸长 $\frac{1}{4}$ 英寸相当于 0.00053 的应变. 证明相应的应力约为 16000 磅/英寸^2(这就证实了课文中的一个论点).

22. 对于某个空间区域,在某一时间间隔$(0,t)$中,一根杆的一维运动可用 $x=(A-t)/(1+At)$ 来加以描述.

(a) 求 $A(x,t)$ 并证明 $A[x(A,t),t]=A$.

(b) 求起初位于原点右边 3 个单位的横截面的速度作为时间的函数.

(c) 在物质坐标下的密度由公式 $\delta(A,t)=A^2$ 给出. 试求从位于原点右边一单位的固定点量起的密度的表达式.

23. 让我们分别用 $J(A,t)$ 和 $j(x,t)$ 表示在物质坐标和空间坐标下的雅可比. 我们记得

$$\frac{\partial J(A,t)}{\partial t}=J\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]_A,\ \frac{Dj}{Dt}=j\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

这里的目的是求 D^2j/Dt^2 的公式. 用两种方法去做,并证明答案是相同的.

(a) 用空间坐标去做并利用一个物质导数乘积的"自然"公式.

(b) 求物质坐标下的 $\partial^2J/\partial t^2$, 然后最终转到空间坐标. 使用非常谨慎和非常明确的符号.

12.2 一维弹性波的传播

在本节及下文中，我们只讨论线化后的动量平衡方程(1.79)．我们将主要考虑物理性质为常数的情况．因此，基本方程为一维波动方程．我们关于这个特殊问题的许多结论将在整个课程中推广到更为复杂的情况．我们应该记得，线性化过程从本质上告诉我们，在已经保留的量级范围内，物质坐标和空间坐标之间不存在差别． 而且，密度 ρ、横截面积 σ 和杨氏模量 E 可以取作仅是位置的已知函数．为了查考起见，我们重新写一下线化后的动量方程(1.79)：

$$[\sigma(x)E(x)u_x(x,t)]_x-\rho(x)\sigma(x)u_{tt}(x,t)+\rho(x)\sigma(x)f(x,t)=0. \tag{1}$$

波动方程

我们首先来考虑当物质和几何属性 A，E 和 ρ 与 x 无关而体力 F 为零时出现的重要情况．此时方程(1)简化为

$$u_{xx}-\frac{\rho}{E}u_{tt}=0. \tag{2a}$$

往往宜于引进下式给出的**声速**常数 c

$$c^2=\frac{E}{\rho}.$$

于是，方程(2a)可写作

$$u_{xx}-c^{-2}u_{tt}=0 \text{ 或 } u_{tt}=c^2u_{xx}, \tag{2b}$$

这个微分方程通常称为波动方程．不久我们将会明白 c 和(2a)或(2b)式的写法确实是合适的．

波动方程的通解

为了求(2b)式的解，我们试图确定一种恰当的变量变换．让我们来考究一下，对于诸如 x 和 t 的线性变换也许是最简单的变换，我们能做些什么，我们令

$$\xi = \alpha x + \beta t \text{ 和 } \eta = \gamma x + \delta t,$$

式中常数 α, β, γ 和 δ 将确定得使最终的微分方程得以简化. 直接利用偏导数的连锁法则便得到(练习 1)

$$(\alpha^2 - \beta^2 c^{-2}) u_{\xi\xi} + 2(\alpha\gamma - \delta\beta c^{-2}) u_{\xi\eta} + (\gamma^2 - \delta^2 c^{-2}) u_{\eta\eta} = 0. \tag{3}$$

我们将看到，在线性变换中，最有帮助的常数选择是使包含 $u_{\xi\xi}$ 和 $u_{\eta\eta}$ 的系数等于零的选择. 这样的一种选择就是令

$$\alpha = \beta c^{-1} \text{ 和 } \eta = \nu(x - ct).$$

(还有达到同一结果的其他的选法,但对这些方法的考究将留作练习.) 变量的变换现在变为

$$\xi = \alpha(x + ct), \quad \eta = \gamma(x - ct).$$

我们注意到如果变换要是非简并的, 那末 α 和 γ 都不能等于零. 现在可把 $u_{\xi\eta}$ 项的系数加以简化,因为

$$\alpha\gamma - \delta\beta c^{-2} = \alpha\gamma + \frac{\alpha\gamma c^2}{c^2} = 2\alpha\gamma.$$

因此可以把(3)式简化为

$$4\alpha\gamma u_{\xi\eta} = 0,$$

或更进一步简化为[1)]

$$u_{\xi\eta} = 0. \tag{4}$$

(4)式的通解现在很容易得到, 因为该方程表明 u_ξ 与 η 无关. 因此,我们可直接对 η 积分,结果为

$$u_\xi = F(\xi),$$

这里 F 是一个任意函数. 再积分一次我们便得到

$$u = \int F(\xi) d\xi + G(\eta),$$

式中 G 是任意函数.

我们已默认 F 是可积的. 事实上,为了以后的目的,出现在解中的函数应该是两次可微的, 而在其它方面则是任意的. 因为 F

---

1) 对偏微分方程理论有点熟悉的读者将认识到,在引进特征座标 ξ 和 η 把原来的方程简化为标准形式的过程中,我们做了些什么.

在这些限制下可以自由选择，因此同样地，我们可以写出

$$u = H(\xi) + G(\eta). \tag{5}$$

用原始变量 x 和 t 表示，则(5)式变为

$$u(x, t) = H[\alpha(x + ct)] + G[\gamma(x - ct)].$$

因为 H 和 G 是任意的，我们最终可写出

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct), \tag{6}$$

这里 f 和 g 是任意函数. (6)式是方程(2b)的通解.

解的物理意义

在考虑 f 和 g 的具体形式之前，让我们把注意力集中在(6)式的第一项来考虑该式的物理意义. 图 12.13 把 t 考虑为参数画出了 $f(x - ct)$ 作为 x 的函数的典型曲线. 实线相应于 $t = t_0$，虚线则相应于 $t = t_1$. (只画出了两条曲线的一部分.) 我们看到，第二条曲线是简单地把第一条曲线向右平移一段距离 $c(t_1 - t_0)$ 而得到的. 因此 f 可看作是在时间间隔 $t_1 - t_0$ 内向右运动了一段距离 $c_1(t_1 - t_0)$ 的固定图形或波动. 换句话说，波动以固定速度 c 向右运动.

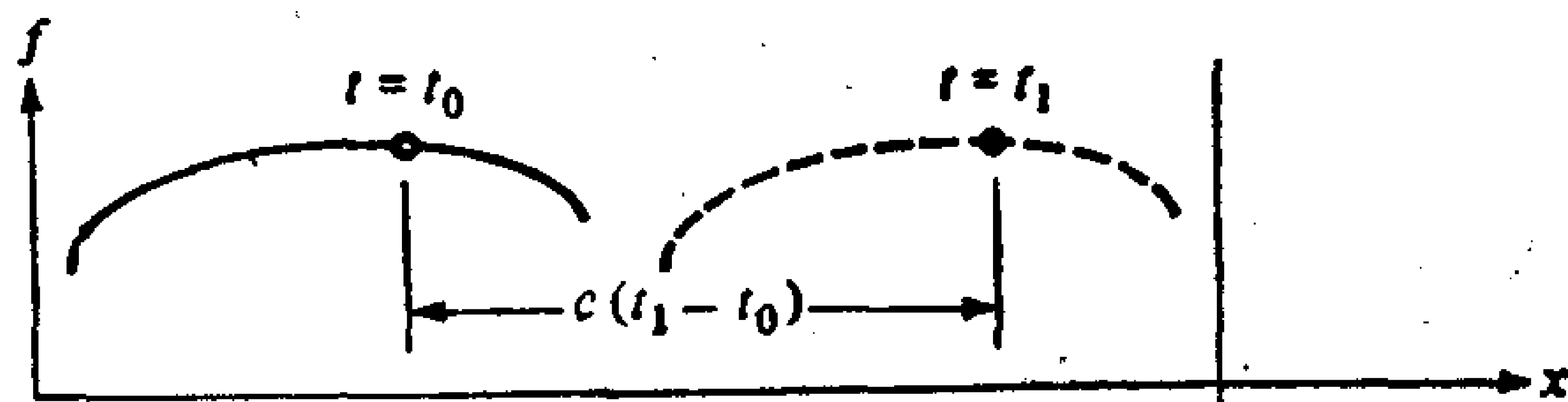


图 12.13　一个以速度 c 向右运动的波.

当函数 f 和 g 取作正弦和余弦函数时，出现了一种重要而有用的情况. 作了这种选择，解可写成如下的形式

$$u(x,t) = A\sin\alpha(x - ct) + B\cos\alpha(x - ct) + E\sin\alpha(x + ct) + F\cos\alpha(x + ct). \tag{7}$$

解的复数形式

利用下列关系式

$$\exp(i\tau) = \cos\tau + i\sin\tau,$$

用复指数表达式代替三角表达式往往更方便些，这里 $i=(-1)^{1/2}$. 于是(7)式可改写作

$$u(x, t) = \mathscr{A}\exp[i\alpha(x - ct)] + \mathscr{B}\exp[i\alpha(x + ct)], \quad (8)$$

式中，系数$\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$通常是复数(练习 4).

我们暂时离开正题来讨论一下复数解. 首先，请注意任何 x 和 t 的偏微分方程，譬如说

$$L(u) = a_0 + a_1\frac{\partial u}{\partial x} + a_2\frac{\partial u}{\partial t} + a_3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cdots = 0$$

(a_i 是实常数)

具有如下形式的解

$$u = f(x, t),\ f(x, t) \equiv \mathscr{A}\exp(\alpha x)\exp(\beta t).$$

(这里常数 $\mathscr{A}$、α 和 β 中任何一个都可以是复数)因为

$$L\{f\} = \mathscr{A}\exp(\alpha x)\exp(\beta t) \times [a_0 + a_1\alpha + a_2\beta + a_3\alpha^2 + \cdots],$$

所以如果方括号中的多项式等于零，就得到一个解. 其次，因为 L 是线性的，并且具有实系数，故

$$L(\mathrm{Re}f) = \mathrm{Re}L(f) = 0, \quad L(\mathrm{Im}f) = \mathrm{Im}L(f) = 0.$$

(像往常一样，上述方程中的 Re 表示“实部”，而 Im 表示“虚部”.) 因此，我们看到，Ref 和 Imf 都给出了 $L(u) = 0$ 的实值解.

并不是所有的常系数线性方程都具有单纯的正弦解或单纯的余弦解，但是却都具有指数形式的解. 我们可以总是与正弦和余弦(或双曲正弦和余弦)的线性组合打交道，而不跟指数发生关系，但是后者往往给出更为紧凑的计算.

正弦波分析

让我们稍详细地来考虑解(7)中的一项. 特别是，令

$$u(x, t) = a\cos\frac{2\pi(x - ct)}{\lambda}, \qquad a > 0 \qquad (9)$$

因为余弦在 $+1$ 和 -1 之间变化，系数 a 是 u 的绝对值的最大值，

并称之为**振幅**. 而且

$$u(x+\lambda, t) = a\cos\frac{2\pi(x+\lambda-ct)}{\lambda}$$

$$= a\cos\left\{\frac{2\pi(x-ct)}{\lambda}+2\pi\right\}$$

$$= a\cos\frac{2\pi(x-ct)}{\lambda} = u(x, t).$$

我们可以由如下的方式解释这个结果. 如果我们把 t 看作固定的, 那末 $u(x, t)$ 作为 x 的函数而按距离 λ 重复自己, 换言之, $u(x, t)$ 是周期为 λ 的 x 的周期函数. 这个"空间周期" λ 称之为**波长**,而它的倒数 $k=\lambda^{-1}$ 量出了单位距离内波动的数目, 并称之为**波数**.

类似地,我们可把 x 看作固定的,而要求波动在时间 τ 内重复自己. 这就要求

$$u(x, t+\tau) = a\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)-\frac{2\pi c\tau}{\lambda}\right] = u(x, t);$$

由此可得

$$\frac{2\pi c\tau}{\lambda} = 2\pi$$

或

$$\tau = \frac{\lambda}{c}. \tag{10}$$

我们把 τ 称为**周期**,而把它的倒数 $n(n=c/\lambda)$ 称为**频率**. 因此频率度量单位时间通过给定点 x 的波数.

现在让我们考虑由下式给出的两个解 u_1 和 u_2

$$u_1 = a\cos 2\pi(kx - nt)$$

$$u_2 = a\cos[2\pi(kx-nt)+\varepsilon]$$

$$= a\cos 2\pi\left[k\left(x+\frac{\varepsilon}{2\pi k}\right)-nt\right].$$

我们看到,除了 x 有一个大小为 $\varepsilon/2\pi k = \varepsilon\lambda/2\pi$ 的位移以外, u_2 和 u_1 是相同的. 参数 ε 称之为 u_2 **相对于** u_1 的**相位**. 在 $\varepsilon=\pi$,

$u_2 = -u_1$ 的特殊情况下，我们把这种情况称作为 u_1 和 u_2 **异相 π** 弧度(或 180 度)。

最后，我们想要指出，形为

$$u(x,t) = \exp[2\pi i(kx - nt)]$$
$$= \exp(2\pi ikx)\exp(-2\pi int)$$

的解并不象它第一次出现那样特殊。更一般的时间依赖关系可通过傅里叶方法合并成为级数或积分。例如，考虑两道全同但却朝反向运动的正弦波的和

$$\sin 2\pi(kx - nt) + \sin 2\pi(kx + nt)$$
$$= 2\sin(2\pi kx)\cos(2\pi nt).$$

结果是一种在固定节点 $x = n/k$，$n = 0, \pm 1, \cdots$ 之间上升或下降的图形。这是一种**驻波**。x 的相当一般的函数可类似地用复指数函数来表示。虽然求解的一般思路是相当简单的，但是却存在着许多情况，其中所得的数学问题既可以是引人入胜却又是挑战性的，参阅第四章。

一个属性间断面的影响

现在让我们考虑一个非常简单的例子，它仅利用指数型的解，但却具有某些有意义的结论。我们把两根半无限长的杆取作所考虑的外形：I$(-\infty < x < 0)$和II$(0 < x < \infty)$。两者都具有不变的杨氏模量和密度，第一根的值为 E_1 和 ρ_1，第二根的值为 E_2 和 ρ_2。两部分都具有相同的形状和横截面积。杆 I 的声速将用 c_1 表示，杆 II 则用 c_2 表示。两根半无限的杆假定在 $x = 0$ 处焊接在一起(见图 12.14)。

考虑一道在杆 I 中向右运动的**入射波**

$$\exp[i(x - c_1 t)].$$

我们将试图确定在杆 II 中随后的**透射波**和由于交界面的存在而产生的任何额外的**反射波**。

为了完成所需的计算，我们必须首先将交界面上的条件翻译成解析的术语。用 $u_1(x,t)$ 表示杆 I 中的位移，用 $u_2(x,t)$ 表

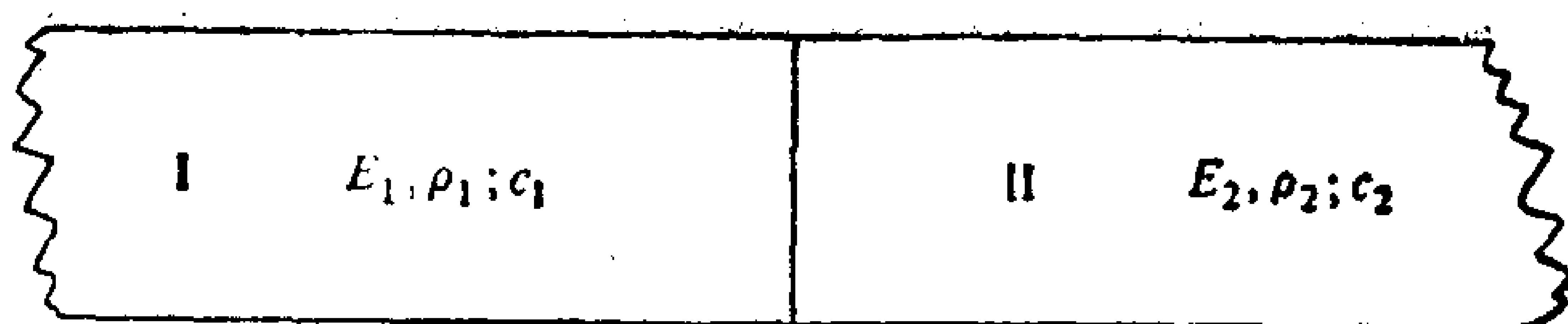


图 12.14 焊接在一起的两根杆．两杆的杨氏模量 E 和密度 ρ 不同，因而其声速 $c=(E/\rho)^{1/2}$ 也不同．

示杆 II 中的位移，因为两根杆是焊接在一起的，因此经过 $x=0$ 的位移必须连续．于是

$$u_1(0-, t) = u_2(0+, t), \tag{11}$$

式中 0－表示 x 趋向于原点但总保持在原点左边的极限，而 0＋则表示 x 趋向于原点但总保持在原点右边的极限．

此外，经过交界面的力必须是连续的（练习 13）．注意两部分的横截面积是相同的，这个条件意味着

$$E_1\left[\frac{\partial u_1(0-, t)}{\partial x}\right] = E_2\left[\frac{\partial u_2(0+, t)}{\partial x}\right]. \tag{12}$$

我们将寻找一个解，其中 u_1 由入射波与向左运动的反射波组成，u_2 则为一道向右运动的波[1]．换句话说，我们用解

$$u_1 = \exp[i(x - c_1t)] + A\exp[i\alpha(x + c_1t)],$$
$$u_2 = B\exp[i\beta(x - c_2t)]$$

来试探．现在常数 A、B、α、和 β 将由交界面的条件 (11)式和(12)式来确定．

从式(11)我们导出下列要求，对所有的 t 值

$$\exp(-ic_1t) + A\exp(i\alpha c_1t) = B\exp(-i\beta c_2t),$$

为了使这个式子成立，所有指数的宗量都必须相同．因此

$$\alpha = -1 \text{ 和 } \beta = c_1/c_2.$$

此外，系数还应该满足

$$1 + A = B. \tag{13a}$$

考虑到有关指数的条件，我们可以写出

1）象这里所做的那样，求解这些简单问题的一个有效办法是猜测解的形式，象其他解法一样，这种解法的经验来自实践

$$u_1 = \exp[i(x - c_1t)] + A\exp[-i(x + c_1t)],$$
$$u_2 = B\exp\left[\frac{ic_1(x - c_2t)}{c_2}\right].$$

把这些结果引进边界条件(12)式，我们得到

$$E_1 - E_1A = \frac{E_2c_1B}{c_2}. \tag{13b}$$

现在就(13a)和(13b)式求解振幅，结果[练习 5(a)]为

$$A = \frac{1 - R}{1 + R}, \qquad B = \frac{2}{1 + R},$$
$$R \equiv \frac{E_2c_1}{E_1c_2} = \left(\frac{\rho_2E_2}{\rho_1E_1}\right)^{1/2}. \tag{14}$$

反射波波幅 A 的表达式向我们表明，如果 R 大于 1，在这道波上便有一个相位移 π[1)]. 当 $R = 1$ 时(均匀杆)，透射波与入射波相同，没有反射.

对极限情况的仔细推敲，几乎总是增加我们对一个解的含意的理解. 人们常常可以把一般情况看作比较容易理解的极端情况之间的某种折衷.

在目前的情况下，我们首先注意到，当 $R \to \infty$ 时，$A \to -1$，$B \to 0$，对于 $R \gg 1$，这时的情况便相应于：当一根较轻的柔性杆碰在一根较重的刚性杆上时在柔性杆上产生的波动. 在极限情况下，刚性杆保持不动. 取下列极限入射解的实部

$$u_1 = \exp[i(x - c_1t)] - \exp[-i(x + c_1t)], \tag{15}$$

我们得到

$$\cos(x - c_1t) - \cos(x + c_1t) = 2\sin x \sin c_1t, \tag{16}$$

这是一种驻波. 位移在间断点 $x = 0$ 处消失，这就犹如轻的柔性杆在这一点是刚性地固定了似的. 事实上，$x < 0$ 的极限解与一端砌入的半无限杆上的波动解是一样的. 至少在回想起来时，这一点是毫不足奇的.

---

1) 因为 A 和 B 总是实数，用复数符号并无好处. 其实从一开始就可假定正弦解或余弦解. 当情况非如此时，作为一个例子请参看练习 16.

注意(15)式的虚部为

$$\sin(x - c_1t) + \sin(x + c_1t) = 2\sin x\cos c_1t. \qquad (17)$$

它与(16)式仅在相位上有不同.

在另一种极限情况 $R \to 0$ 下,反射波与 $x < 0$ 的杆在 $x = 0$ 处具有自由端时得到的情况相同. 透射波具有可能的最大振幅. 这一讨论的细节留给读者去做[练习7(c)].

考虑这个问题中的能量分布是很有启发的. 12.4节中给出了从质点力学得到的所需的能量概念的推广. 利用这些概念, 我们可以计算各种波在单位长度上的能量. 因为没有耗散机制存在, 便可以指望, 入射波的能量正好与透射波和反射波的能量之和相平衡. 事实上,情况确系如此(练习4、6).

需要再作一次观察. 12.1节中我们几次提到过一个数学问题, 其中基本方程(或方程组)补充有合适的(时间 $t = 0$ 时的)初始条件和(杆两端的)边界条件. 但是, 我们刚才求解的问题并不属于这种初边值问题的类型. 它宁肯是属于**散射**型的, 在波动问题中这是经常碰到的. 这里是对全部时间来描述一个入射波信号, 寻找出最终的影响,为了弄明白是不是仅仅是所描述的入射信号"引起"的现象,就(象这里一样)需要一个**辐射条件**,粗略地讲,这就是

总解减去已给的入射解完全是出射解. (18)

练　　习

1. 完成推导(3)式所需的详细计算.

2. 在(3)式以下的讨论中,我们对参数 α 和 ν 作了一种选择. 考虑所有会使(3)式中合适的系数等于零的其他选择,并确定哪一种选择能得到有意义的解. 这些额外的选择是否能在本质上给出新解?

3. 在课文中,我们分析了解 $f(x - ct)$ 的几何意义. 对 $g(x + ct)$ 进行类似的分析. 如果我们选择了解 $f(ct - x)$,那末会发生些什么?

4. (a) 令 $\mathscr{A} = M + iN$, $\mathscr{B} = P + iQ$, 确定用 A, B, C 和 D

表示的 M，N，P 和 Q 使(7)式和(8)式等价。

(b) 同样证明形为

$$u(x,t)=A\sin\alpha(x-ct)+B\cos\alpha(x-ct)$$

的一个解可以写成如下形式

$$u(x,t)=H\sin\alpha(x-ct+\varepsilon)$$

以及

$$u(x,t)=K\cos\alpha(x-ct+\delta).$$

相应的指数形式是什么？

5. (a) 推导(14)式中所给的系数 A 和 B 的表达式.

(b) 试在一开始就用无量纲变量来再解这个问题.

6. 加上位移连续条件(11)式，我们断定，如果适当的方程要对所有的 t 都成立的话，那末所有的指数都必须具有相同的幅角，给这一论断以正式的证明.

7. (a) 假定一个位于 $-\infty<x\leqslant 0$ 的半无穷均匀杆经受一道入射波 $\exp[i(x-ct)]$. 试求杆在 $x=0$ 处具有固定端时的反射波.

(b) 当杆在 $x=0$ 处具有自由端时，重复(a)的工作.

(c) 当 $R\ll 1$ 时，给出有关(14)式所给出的解的完整的讨论.

8. 在杆由两种介质组成的情况下，假定入射波由已知函数

$$f(c_1t-\lambda)$$

给定. 试求反射波 $g(c_1t+x)$ 和透射波 $h(c_2t-x)$. 这个性质如何依赖于参数 R？

9. 考虑一根位于 $-\infty<x\leqslant 0$ 处的半无限均匀杆，其有限端 $x=0$ 处附以质量 M. 它受到一道向右运动的入射波 $f(ct-x)$ 的作用，后者具有下列性质：

只要 $z\leqslant 0$ 便有 $f(z)=0$.

把位移写成下列形式

$$u(x,t)=f(ct-x)+g(ct+x),$$

并求出反射波 $g(ct+x)$. 在得到通解以后，考察让 M 接近于零和接近于无限时出现的这两种特殊情况. 在后一种情况下，

计算由入射波 $f(ct-x)$ 单独在 $x=0$ 处所产生的力，并把它与完整解在这个位置上所产生的力加以比较.（你将会发现，力被加倍. 不能预测这一效应可能导致结构的破坏.）

10. 如果一根均匀杆浸泡在一种粘性介质中，而这种介质所施的阻力正比于 u_t，那末杆的纵向运动方程为

$$u_{xx}=\frac{1}{c^2}(u_{tt}+ku_t). \tag{19}$$

利用练习 1.13 的方法推导(19)式. 试解释常数 k，并确定它的单位.

11. 试证明，如果我们寻找(19)式的形为

$$u(x,t)=\exp\left(-\frac{1}{2}kt\right)v(x,t)$$

的解，那末，$v(x,t)$ 将满足

$$v_{xx}=\frac{1}{c^2}\left(v_{tt}-\frac{1}{4}k^2v\right). \tag{20}$$

而且，如果(20)式中 $k^2\ll 1$，那末舍去最后一项可得到近似解. 试证明这种近似解可写成如下的形式

$$u(x,t)=\exp\left(-\frac{1}{2}kt\right)[f(x-ct)+g(x+ct)]. \tag{21}$$

解(21)称之为**稀疏波**.

12. 首先利用(20)式本身，然后用(20)式的近似

$$u_{xx}=\frac{1}{c^2}v_{tt}. \tag{22}$$

求解下列具体初值的问题：

$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=\cos\frac{x}{c},$$

从而由此研究练习 11 所给出的近似的适用性. 如何把这两个解加以比较？利用分离变量法(4.1 节和 15.4 节)进行；即写下

$$v(x,t)=b(x)m(t),$$

由此得到

$$\frac{c^2h''}{h} = \frac{m'' - \frac{1}{4}k^2m}{m} = -\lambda^2,$$

式中 λ 是常数. 对式(22)使用同一技巧.

13. 边界条件(12)式的推导省略了. 试根据与练习1.12所用的"薄片"分析相类似的论据, 为这个条件补一个论证.

14. 考虑由下列方程所制约的均匀杆的纵向运动

$$u_{tt} - c^2u_{xx} = 0,$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \qquad 0 < x < L,$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad t > 0.$$

(a) 描述这些初始和边界条件的物理意义.

†(b) 推导这些边界条件下波动方程的解

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \left(\frac{1}{2c}\right)\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds.$$

(c) 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 仅在 $0 < x < L$ 上有定义, 然而利用上述解中的 f 和 g 时却要求 f 和 g 对它们的宗量的所有值都有定义. 利用边界条件证明 f 和 g 应该延拓成周期为 $2L$ 的奇函数.

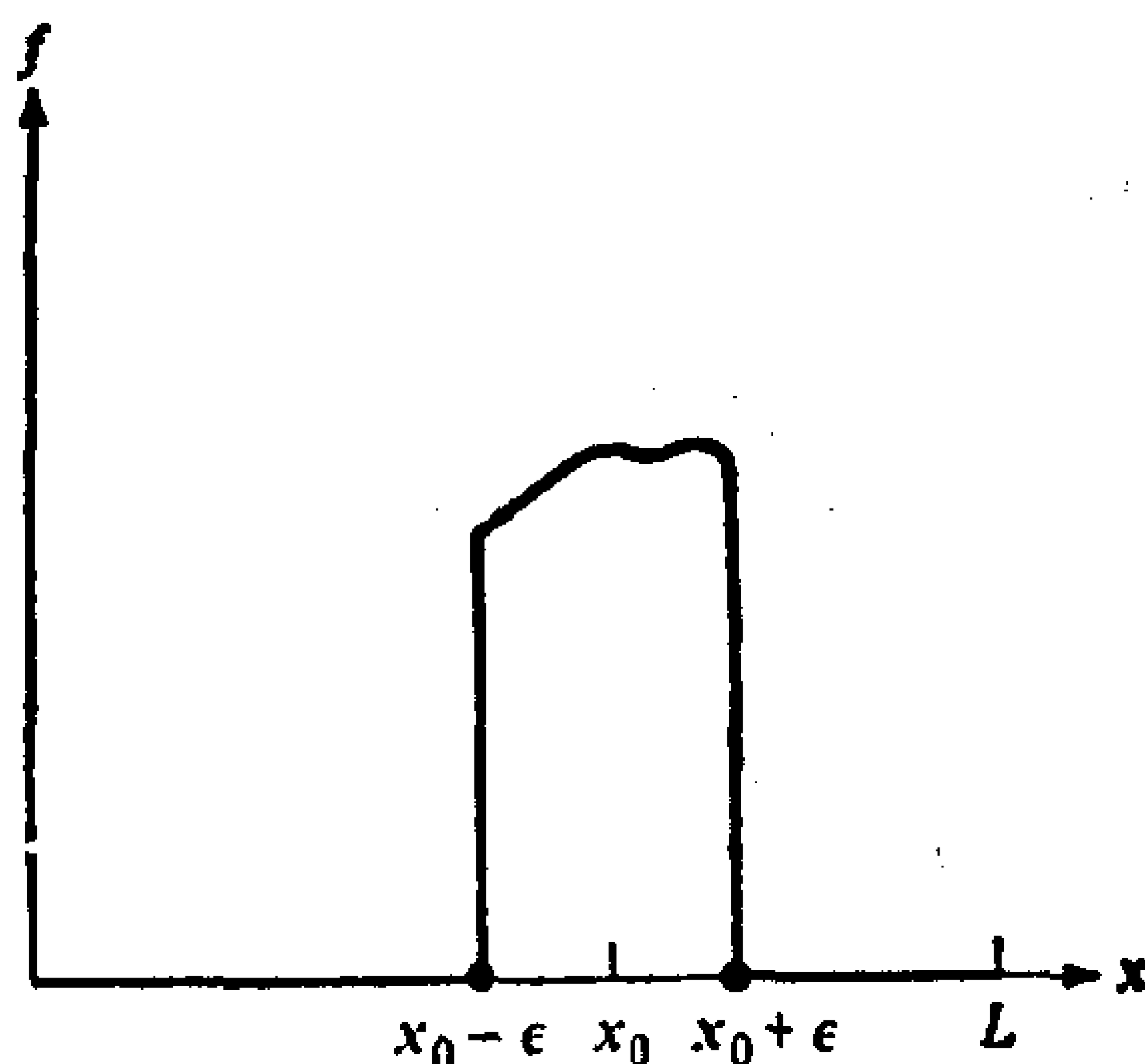


图12.15 鼓包位移的示意图.

15. (a) 利用练习 14 的结果考察如下情形.

初始速度 $g(x)=0$，初始位移由图 12.15 示出的曲线所给定. 这就是说，除了 x_0 附近的一个小邻域外，$f=0$. 考察这个"鼓包"如何传播. 在(x,t)平面上画出 f 的鼓包起作用的区域. 例如，直线 $x-ct=x_0$ 的意义是什么?

(b) 当围绕某点 x_0 的一个小区域中的物质都给一初始速度，但杆上各点却都没有初始位移时，试进行类似的分析.

16. 考虑一根位于 $-\infty<x\leqslant 0$ 处的半无限均匀杆，假定一根弹性常数为 k^2 的轻弹簧在 $x=0$ 处与杆相连. 我们希望考察一道入射正弦波的反射，并因此而探讨复数符号的可能的好处. 我们注意问题在于确定满足下列条件的波动方程的解.

在 $x=0$ 处，$u'+\kappa u=0$，$\quad \kappa=\dfrac{k^2}{\sigma E}$.

†(a) 寻找下列形式的一个解

$$u=e^{-i(ct-x)}+Qe^{i(ct+x)},$$

并确定 Q，取最终解答的实数部分，再用如下两种方法写出这一部分:

$$u=\cos(ct-x)+\alpha\cos(ct+x)+\beta\sin(ct+x) \qquad (23)$$

和

$$u=\cos(ct-x)+B\cos(ct+x+\delta).$$

(b) 求形如式(23)的解，并把工作量与在(a)中直接得到这样一个解的工作量加以比较.

17. 证明强迫波动方程

$$u_{xx}-\left(\frac{1}{c^2}\right)u_{tt}=F(x,t)$$

的一个特解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-\bar{t})}^{x+c(t+\bar{t})}F(\bar{x},\bar{t})d\bar{x}d\bar{t}.$$

18. (a) 利用第六章中所讨论的概念更加认真地讨论练习 11.

(b) 利用扰动引论计算由练习 11 得到的近似解的修正.

12.3 间断解[1)]

在讨论上节的一些特例时，我们已暗中假定所研究的解具有人们所希望的各种解析性质——连续性、可微性等等．现在我们来考虑如果去掉其中的一些限制可能发生些什么问题．特别是我们来看一下"轻微"间断的情况，这种间断将在讨论过程中更明确地加以表征．一开头就应该注意到位移 $u(x,t)$ 将假设是连续的，因为我们将排除表征材料撕裂或折叠的运动．然而，在推导中某些类型的间断却是允许的．

在研究杆的运动时，自然会对不连续解进行研究．例如，人们可能要问当杆的一端突然受到打击时会发生些什么．这种打击无疑会使杆的应力产生一个突跃，而且可能会使速度产生一个突跃．在杆的某个截面上加上的冲击会在整个杆长上感受到吗？如果是这样的话，那末这将是同时出现还是要经过有限长的时间才能在某特定位置的截面上"听到"这种扰动呢？扰动能以任意速度传播吗？杆的性质在扰动运动时又是如何影响扰动的呢？我们将看到可以用相当初等的方法去回答这种问题中的一些问题．

熟悉二阶偏微分方程基本理论的读者会认识到，我们将要做的就是以不容易识别的形式按照理论去分析这些方程的性质．然而，要用到的语言与纯粹数学讨论中通常所用的多少要有点不同．

应该注意到我们已经研究了可以认为具有某一种形式的间断解的一个例子． 在 12.2 节中我们已讨论过具有不同属性并在固定位置 $x=0$ 处焊接在一起的两根半无限长的杆．这种情况也可看作在 $x=0$ 处截面属性有跳跃的一根无限长的杆． 边界条件(22)式表明，在给定的材料间断面上，应力是连续的．因为经过截面 $x=0$ 时，E 从 E_1 跳跃到 E_2，由此可知，位移 $u(x,t)$ 的导数 $u_x(x,t)$ 就有跳跃．因此，这可以看作是其解呈现某种形式间

---

1) 12.3 节和 12.4 节可以任何一种次序阅读．

断的一个问题．然而，下面我们将研究多少比较更加一般的情况，其中间断的位置在空间并不固定，而且材料的属性也逐点变化．

在进行具体的分析之前，应该作一点最后的解释．我们已轻率地谈论了波动和间断面沿杆的传播；可是作为首要的假设，我们已假定截面或质点的运动是很小的，然而，这并没有前后矛盾，因为不是组成横截面的质点沿着杆传播，而宁可是某些属性或空间和时间的函数沿杆传播．而后者确实是这样传播的．例如，如果我们注意某一时刻杆中的应力分布，然后再注意下一时刻的应力分布，我们会发现除了位置上的移动以外，后一时刻的分布曲线看来多少与前一时刻的分布曲线是相同的．因此，我们会得出结论，除了也许在形状上的某些变形外，应力分布已沿着杆传播了．同时，组成杆的质点仅在小范围内移动．

间断面的运动

我们现在考虑一根杆，它的截面性质 $\sigma(x)$、$E(x)$ 和 $\rho(x)$ 是两次连续可微的．我们将假定纵向位移也是两次连续可微的，并且满足忽略了体力的运动方程(2.1)

$$(\sigma E u_x)_x = \rho\sigma u_{tt}. \tag{1}$$

但是，不要求(1)式在可能随时与杆一起运动的横截面上成立．这种截面是一种**运动着的间断表面**．假定位移 $u(x, t)$ 经过这个表面是连续的，但是它的一阶导数（因此应力和速度）可能有有限的跳跃．

我们将假定沿间断表面 u_x 和 u_t 的跳跃本身是连续函数．这就是说如果我们考虑 u_x 在时间 t_1 和 t_2 时的跳跃，（此时，间断面分别在位于 x_1 和 x_2.）那末

$$\lim_{\substack{x_2\to x_1\\ t_2\to t_1}} \text{在}\ (x_2, t_2)\ \text{时的}\ u_x\ \text{的跳跃}$$

$$= \text{在}\ (x_1, t_1)\ \text{时的}\ u_x\ \text{的跳跃},$$

式中，极限运算随间断表面的运动而运动．

我们分析的目的是为了寻找一组方程，从这组方程来确定

$t > t_0$ 时间断表面的位置和跳跃的大小，如果我们知道初始时间 t_0 时的这两个量大小的话. 我们首先来求间断表面传播速度的表达式.

假定运动间断表面的位置 x 由下述隐函数给定

$$\phi(x, t) = 0 \tag{2}$$

或者既可由

$$x = x(t), \quad \text{也可以由} \quad t = \psi(x)$$

以显式给出. 微商(2)式,我们得到

$$\phi_x \frac{dx}{dt} + \phi_t = 0$$

或

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\phi_t}{\phi_x}, \tag{3}$$

方程(3)把间断表面的速度 dx/dt 与函数 $\phi(x, t)$ 的偏导数联系在一起. 我们要研究的问题之一是是否存在着对这个速度的任何限制.

我们将用算符 $[\![f(x, t)]\!]$ 来表示函数 $f(x, t)$ 在这样一个间断表面上的跳跃,该算符定义为

$$[\![f(x, t)]\!] = f(x-, t) - f(x+, t),$$

式中

$$f(x-, t) = \lim_{\xi \to x} f(\xi, t), \qquad \xi < x,$$

和

$$f(x+, t) = \lim_{\xi \to x} f(\xi, t), \qquad \xi > x.$$

我们记得,已经假定位移 $u(x, t)$ 经过间断表面是连续的,我们就可写作

$$[\![u]\!] = 0. \tag{4}$$

比起把间断表面看作一个在一维 x 空间运动着的截面来，把该表面考虑为图 12.16 中所示出的 (x, t) 空间中一条固定曲线所表示的曲面更为方便些. 我们将把沿曲线 $\phi(x, t)$ 的弧长称为

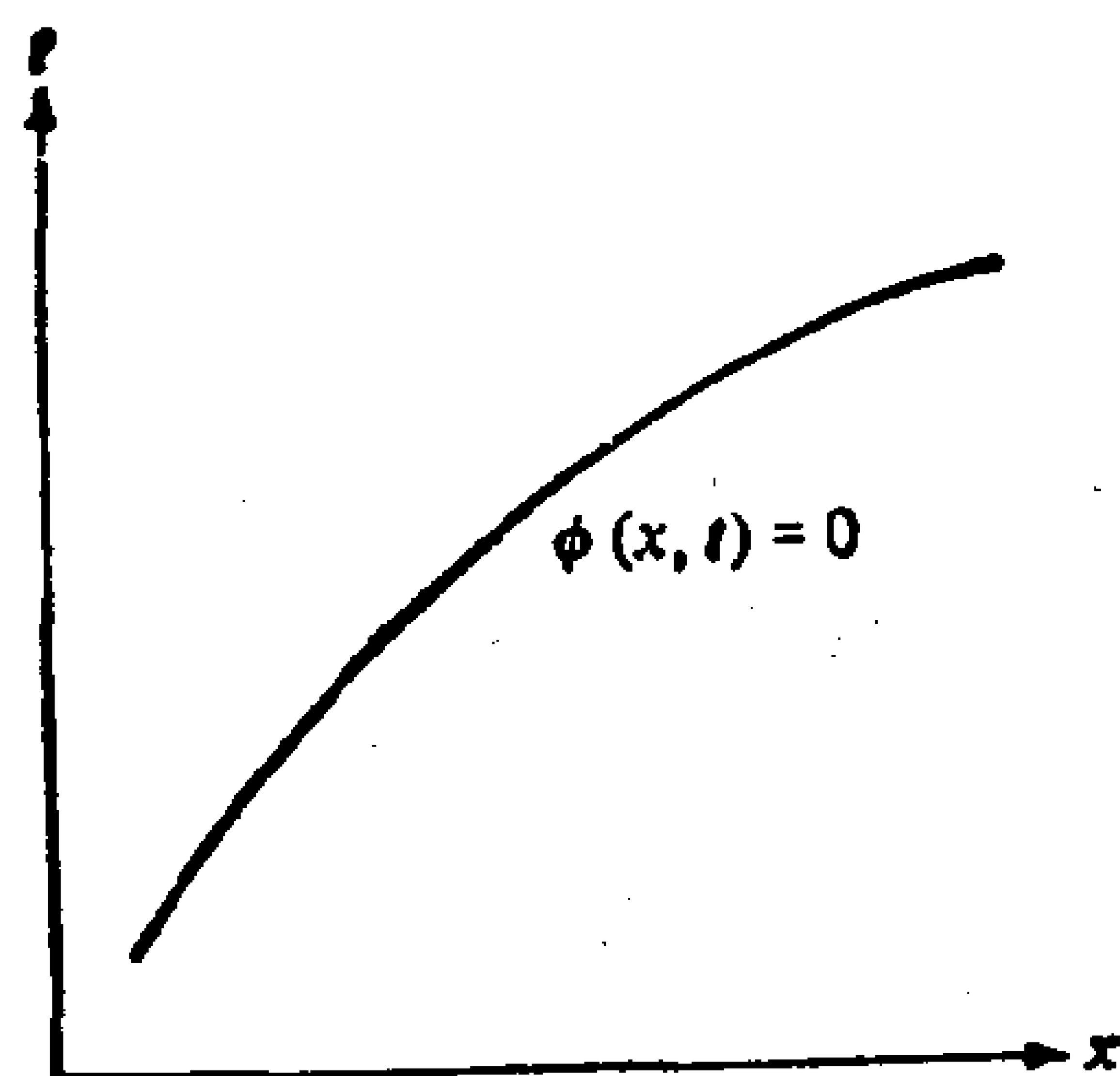


图 12.16 在 xt 平面上画出的间断表面的轨迹.

s. 在两个任意点(x_0, t_0)和(x_1, t_1)之间沿曲线积分,我们有

$$\int_{(x_0-, t_0)}^{(x_1-, t_1)} u_s(x-, t)ds = u(x_1-, t_1) - u(x_0-, t_0).$$

类似地,

$$\int_{(x_0+, t_0)}^{(x_1+, t_1)} u_s(x+, t)ds = u(x_1+, t_1) - u(x_0+, t_0).$$

把上两个积分相减并利用(4)式,于是,我们得到如下的结果

$$\int_{(x_0, t_0)}^{(x_1, t_1)} [\![u_s(x, t)]\!] ds = 0. \tag{5}$$

根据连锁法则,则有

$$u_s(x, t) = u_x(x, t)\frac{dx}{ds} + u_t(x, t)\frac{dt}{ds}$$

和

$$[\![u_s(x, t)]\!] = [\![u_x(x, t)]\!]\frac{dx}{ds} + [\![u_t(x, t)]\!]\frac{dt}{ds}.$$

因此,$[\![u_s(x, t)]\!]$ 沿间断表面是连续的. 因为点(x_0, t_0)和(x_1, t_1)沿曲线已任意选定,所以可把 Dubois-Reymond 引理应用于(5)式得到

$$[\![u_s(x, t)]\!] = 0. \tag{6}$$

方程(6)表明,u 的切向导数经过间断面也是连续的.

用导数 u_x 和 u_t 把(6)式改写,我们便可利用它得到下列结果

$$[\![u_x]\!]\frac{dx}{dt}+[\![u_t]\!]=0.$$

因此

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{\phi_t}{\phi_x}=-\frac{[\![u_t]\!]}{[\![u_x]\!]},$$

或者

$$[\![u_x]\!]=[\![u_t]\!]\frac{\phi_x}{\phi_t}, \tag{7}$$

(7)式表明，一阶导数的跳跃是互相有关的，并且与间断表面的形状有关.

我们还必须来考察在间断表面两边 u 是式(1)的解这句话的含意. 令 C 为 (x, t) 平面上包围内域 G 的一条任意的封闭曲线. 单位外法线 $\mathbf{n}$ 可写作如下

$$\mathbf{n}=n_1\mathbf{i}+n_2\mathbf{j},$$

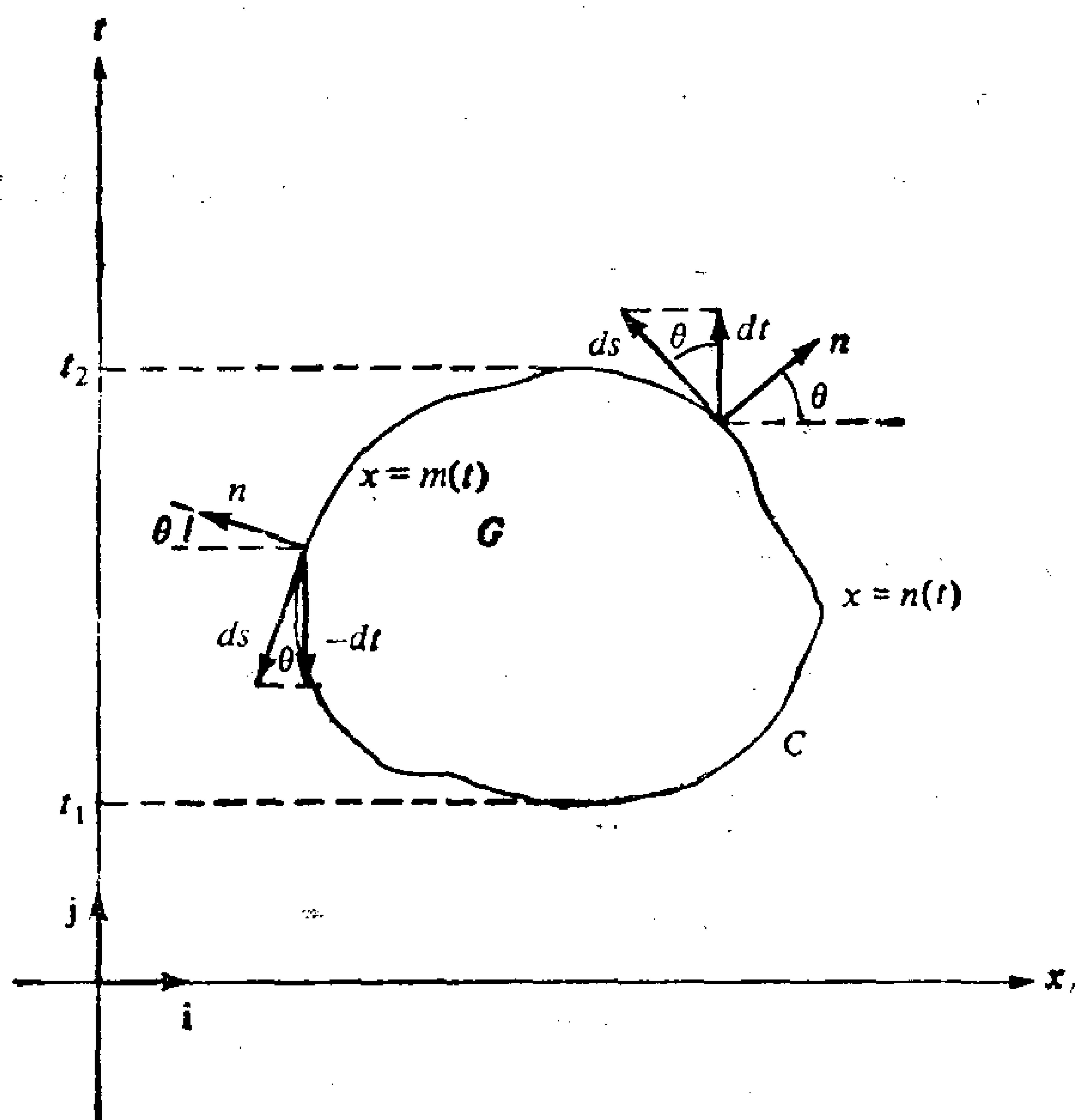


图 12.17 曲线 C 是区域 G 的边界，其单位外法线为 $\mathbf{n}$

式中，单位矢量 **i** 和 **j** 如图 12.17 所示．边界曲线 C 从 $t = t_1$ 变到 $t = t_2$，如图所示 C 的右半边用 $x = n(t)$ 表示，左半边则用 $x = m(t)$ 表示．对于给定的 t 值，让我们考虑杆的这样一个部分

$$m(t) \leqslant x \leqslant n(t)$$

我们把线性化形式的线动量方程的积分平衡式应用于杆的这一部分．把(1.43)、(1.46)、(1.47)式联列，我们得到

$$\int_{m(t)}^{n(t)} \rho\sigma u_{tt} dx = T(n, t)\sigma(n, t) - T(m, t)\sigma(m, t).$$

在 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ 上积分这个关系，我们有

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\int_{m(t)}^{n(t)} \rho\sigma u_{tt} dx dt &= \int_{t_1}^{t_2} T(n, t)\sigma(n, t)dt \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} T(m, t)\sigma(m, t)dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} T(n, t)\sigma(n, t)dt \\ &\quad + \int_{t_2}^{t_1} T(m, t)\sigma(m, t)dt.\end{aligned}$$

应该注意，我们已假定涉及加速度 u_{tt} 和应力 T 的积分是存在的．

让我们引进沿曲线 C 的弧长 s 作为参数，参照图 12.17，我们看到，在 $x = n(t)$ 上，

$$dt = \cos ds = n_1 ds.$$

类似地，在 $x = m(t)$ 上，我们有

$$dt = -\cos\theta ds = m_1 ds.$$

因此，我们的积分关系现在可写作

$$\iint_G \rho\sigma u_{tt} dx dt = \oint_C T\sigma n_1 ds = \oint_C E\sigma u_x n_1 ds.$$

把高斯定理应用于上式的左端，我们得到

$$\oint_C (E\sigma u_x n_1 - \rho\sigma u_t n_2) ds = 0. \tag{8}$$

现在我们考虑图 12.18 所示的区域，其中 Γ 是间断表面的任何一个轨迹．我们看到 $G_1 \cup G_2$ 为 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 所包围，G_1 为 $\Gamma_1 \cup \Gamma$ 所包围，G_2 为 $\Gamma_2 \cup \Gamma$ 所包围．把(8)式依次应用于这三个区域中

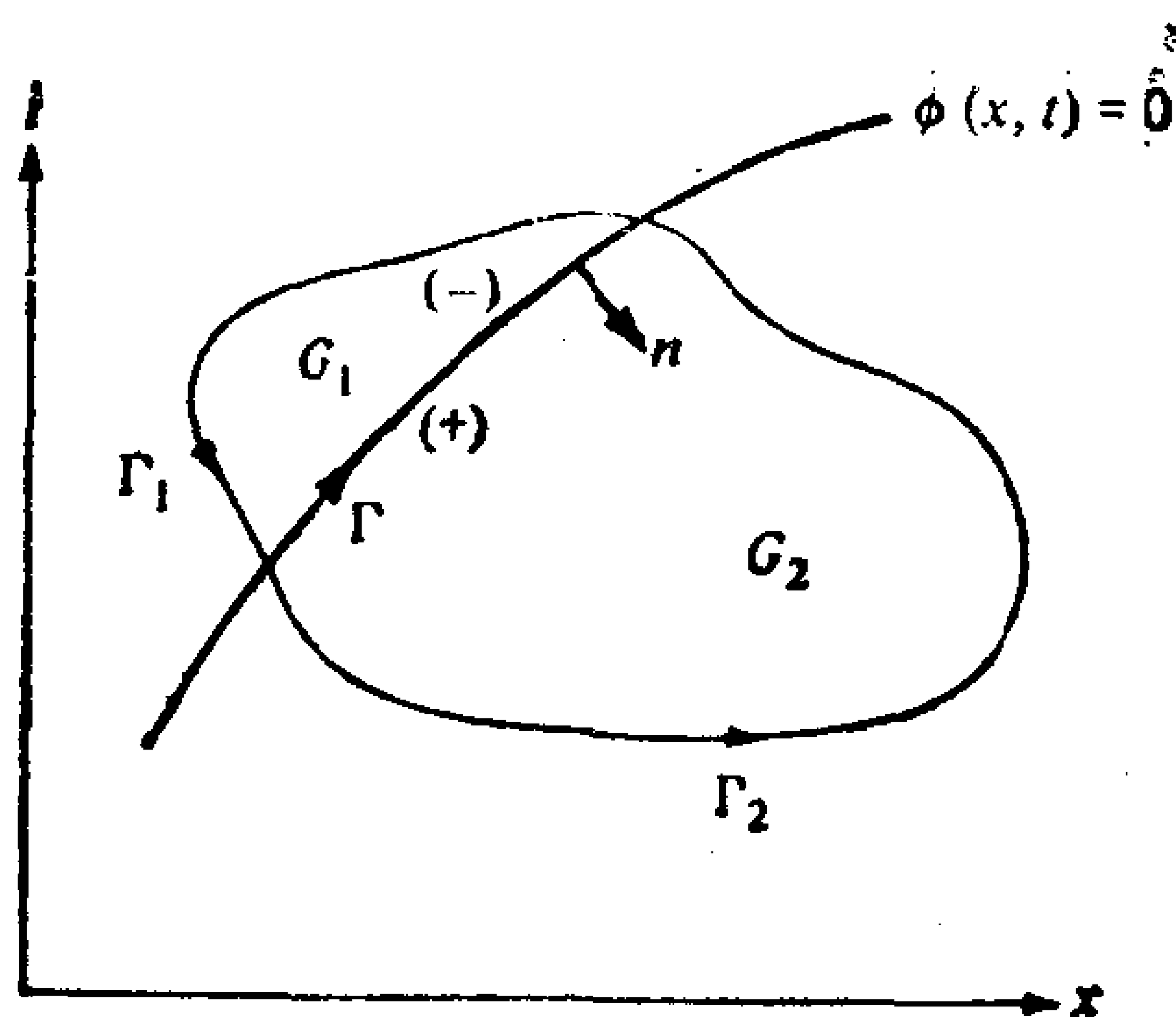


图 12.18 间断面的轨迹 Γ 把任意区域分成 G_1 和 G_2 两个部分

的每一个，我们得到

$$\int_{\Gamma_1\cup\Gamma_2}[E\sigma u_x n_1 - \rho\sigma u_t n_2]ds = 0,$$

$$\int_{\Gamma_1\cup\Gamma(-)}[E\sigma u_x n_1 - \rho\sigma u_t n_2]ds = 0$$

和

$$\int_{\Gamma_2}(E\sigma u_x n_1 - \rho\sigma u_t n_2)ds$$
$$-\int_{\Gamma(+)}(E\sigma u_x n_1 - \rho\sigma u_t n_2) = 0,$$

式中 $\Gamma(-)$ 表示间断函数是作为 Γ 的 G_1 端的极限求得的. 类似地，$\Gamma(+)$ 表示极限是从 Γ 的 G_2 端取得的. 而且，把沿 Γ 的积分中出现的法线 $\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j}$ 取为从 G_1 到 G_2 的方向. 因此，最后一个方程中的第二个积分必须在前面冠以如式已示出的负号.

从其余积分的和中减去第一个积分，那末我们便得到，

$$\int_{\Gamma(-)}(E\sigma u_x n_1 - \rho\sigma u_t n_2)ds$$
$$-\int_{\Gamma(+)}(E\sigma u_x n_1 - \rho\sigma u_t n_2)ds = 0.$$

因为 E、σ 和 ρ 经过 Γ 时是连续的，最后一个方程可写作如下的形式

$$\int_{\Gamma}(E\sigma[\![u_x]\!]n_1-\rho\sigma[\![u_t]\!]n_2)ds=0. \tag{9}$$

我们记得，已假定跳跃 $[\![u_x]\!]$ 和 $[\![u_t]\!]$ 沿曲线 Γ 是连续的．因为弧 Γ 沿 $\phi(x,t)=0$ 是任选的，就可把 Dubois-Reymond 引理应用于(9)式，并得到如下结果，沿 $\phi(x,t)=0$，

$$E\sigma[\![u_x]\!]n_1-\rho\sigma[\![u_t]\!]n_2=0.$$

现在，单位法矢量 $\mathbf{n}$ 垂直于 $\phi_x\mathbf{i}+\phi_t\mathbf{j}$ 因此，我们可得到结论

$$E[\![u_x]\!]\phi_x-\rho[\![u_t]\!]\phi_t=0. \tag{10}$$

方程(7)和(10)构成了未知量 $[\![u_x]\!]$ 和 $[\![u_t]\!]$ 的两个线性齐次代数方程．如果系数行列式等于零，那末这两个方程将具有非平庸解．因此，

$$-E\phi_x^2+\rho\phi_t^2=0,$$

或

$$\left(\frac{\phi_x}{\phi_t}\right)^2=\frac{\rho}{E}.$$

应用(3)式，那末我们便得到下列结论

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{E}{\rho},$$

或

$$\frac{dx}{dt}=\pm\left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2}. \tag{11}$$

因此，我们看到，间断表面或波前以确定的速度或者向左或者向右运动．我们记得，在等属性的情况下，这个速度 $(E/\rho)^{1/2}$ 是用 c 来表示的．在属性可变的情况下，我们将用相同的符号，请注意 c 现在依赖于 x．因此，(11)式可写作

$$\frac{dx}{dt}=\pm c(x).$$

我们看到，弱间断以局部声速传播（间断必须是小的或"弱的"；否则基本的线性化将是不正确的．）这个结果是上节所得到的结果的一个推广，在上节中我们证明均匀杆中所有光滑的纵向小扰动将以声速传播．如果我们认识到一个间断可看作只能感觉到

杆的局部属性的局部扰动的话，那末这种推广是我们已经预料到的.

注释. 在 1.5.3 节可找到关于一维气体动力学的论述，其中也讨论了扰动以局部声速传播的问题. 与固体相反，气体一般都具有整体的对流运动. 因此，扰动的传播必须相对于整体运动来测量.

间断面的性质

既然我们已确定了运动间断表面的性质，那末让我们来看一下，随着时间的推移，关于跳跃的增长我们能说些什么. 我们已用隐函数形式 $\phi(x,t)=0$ 写出了间断表面的方程. 对这个方程求解 t，我们可写出

$$t=\psi(x),$$

即

$$\phi(x,\ t)\equiv\psi(x)-t=0.$$

函数 $\psi(x)$ 称为**波函数**. 因为

$$\phi_x\frac{dx}{dt}+\phi_t=0,$$

可以看到

$$\psi'=\frac{dt}{dx},$$

或

$$\psi'^2=\frac{1}{c^2}, \tag{12}$$

这个方程称为**镜象方程**. 在三维情况下有一个相应于(12)式的方程，但是相应的推导要冗长得多.

现在让我们转向这样一个问题：波前传播时，间断本身的性态是怎样的？知道了时间 t_0 时截面 x_0 处应力和速度的跳跃以后，我们要想弄清楚，从杆的属性是否能确定随后的跳跃，这些跳跃是波前在时间 t 时到达位置 x 时将出现的. 特别是我们将考虑波前

向右传播，而波前右端的物质没有受到扰动的情况．波前右端的物质不是静止的这一情况将作为练习留给读者．

我们将把速度记作

$$u_t(x,t)\equiv v(x,t).$$

为了方便起见，我们引进一个专门的符号来表示间断点处位移和速度的跳跃．（当然这些跳跃中的第一个恒等于零．）因此，我们作如下的定义

$$U(x)\equiv [\![u(x,t)]\!]_{t=\psi(x)}$$

和

$$V(x)\equiv [\![v(x,t)]\!]_{t=\psi(x)}.$$

考虑到波前右端处于静止状态，我们有

$$U(x)=u(x,\psi(x)). \tag{13}$$

和

$$V(x)=v(x,\psi(x)). \tag{14}$$

因为经过波前的位移假定是连续的，所以

$$0=U(x). \tag{15}$$

对(15)式进行微分，那末我们得到

$$0=U'(x)=u_x[x,\psi(x)]+u_t[x,\psi(x)]\frac{dt}{dx},$$

利用(14)式和波函数 ψ，上式可改写作

$$0=u_x[x,\psi(x)]+V(x)\psi'(x).$$

因此

$$u_x[x,\psi(x)]=-V(x)\psi'(x). \tag{16}$$

因为 $U''(x)$ 也为零，我们可以作类似的计算而得到如下的结果

$$u_{xx}[x,\psi(x)]=-v_x\psi'-(V\psi')'. \tag{17}$$

对 $V(x)$ 作类似的计算，我们得到

$$V'(x)=v_x+v_t\psi'(x),$$

可把上式变换，得到

$$v_t=c^2(V'\psi'-v_x\psi'). \tag{18}$$

最后，我们计算关于波前左端的运动方程(1)，因此

$$\rho\sigma v_t = (E\sigma u_x)_x = (E\sigma)' u_x + E\sigma u_{xx},$$

或

$$v_t = \frac{u_x(E\sigma)'}{\rho\sigma} + c^2 u_{xx}. \tag{19}$$

在继续进行计算之前，让我们简要地对上述情况作一评述．我们的目的是利用杆的物性建立 $V = [\![u_t]\!]$ 和 $[\![u_x]\!]$ 的方程．方程(16)、(17)和(18)用 V 表出有关的导数；然后再在(19)式中使用这些表达式．看来仅有的困难可能是包含 v_x 的项，为了完成上述计划，必须把这些项消去．

把(18)式引进(19)式，我们可以证明，

$$V'\psi' - v_x\psi' = \frac{(E\sigma)'}{E\sigma} u_x + u_{xx}.$$

再把(16)和(17)式引进来，我们得到

$$V'\psi' - v_x\psi' = \frac{(E\sigma)'}{E\sigma} V\psi' - v_x\psi' - (V\psi')'.$$

我们看到，包含 v_x 的项消去了，而所得的表达式可以简化为

$$\frac{V'}{V} = -\frac{1}{2}\frac{(E\sigma\psi')'}{E\sigma\psi'}. \tag{20}$$

让我们用 x_0 表示时间 $t = t_0$ 时间断表面的位置，那末积分(20)式可得到

$$\frac{V(x)}{V(x_0)} = \frac{[E(x_0)\sigma(x_0)\psi'(x_0)]^{1/2}}{[E(x)\sigma(x)\psi'(x)]^{1/2}}.$$

因为 $\psi' = 1/c$，并且 $E = c^2\rho$，我们可以把这个式子改写为

$$V(x) = V(x_0)\frac{[\rho(x_0)\sigma(x_0)c(x_0)]^{1/2}}{[\rho(x)\sigma(x)c(x)]^{1/2}}. \tag{21}$$

于是，(21)式表明，速度的跳跃满足

$$[\![v(x, t)]\!]_{t=\psi(x)} = [\![v(x_0, t_0)]\!]_{t_0=\psi(x_0)}\left[\frac{\rho(x_0)\sigma(x_0)c(x_0)}{\rho(x)\sigma(x)c(x)}\right]^{1/2}. \tag{22}$$

因为 $T = Eu_x$，由(16)式得到

$$[\![T(x, t)]\!]_{t=\psi(x)} = -E(x)V(x)\psi'(x).$$

应用(21)式，我们便证得

$$\llbracket T(x,t)\rrbracket_{t=\psi(x)} = \llbracket T(x_0,t_0)\rrbracket_{t_0=\psi(x_0)}\left[\frac{\rho(x)c(x)\sigma(x_0)}{\rho(x_0)c(x_0)\sigma(x)}\right]^{1/2}, \tag{23}$$

(22)和(23)式就是我们一直在寻求的传播方程.

例如考虑，一根均质杆，即 $\rho(x)=\rho(x_0)$，$c(x)=c(x_0)$. 假定杆的形状为单位厚度的截头楔，杆在 $x=0$ 处的半高为 a，在 $x=L$ 处半高为 b. 因为 $c(x)=c(x_0)=c$ 是一个常数，我们便得到下列结论，即立即积分镜象方程(12)

$$\psi'=\frac{1}{c}.$$

可以得到

$$t=\psi(x)=\frac{x}{c},$$

式中我们已同意，当 $t=0$ 时有 $x=0$. 此外，

$$\sigma(x)=2\left[a-\frac{(a-b)x}{L}\right].$$

因此速度的跳跃将满足

$$\llbracket v(x,t)\rrbracket_{t=x/c}=\llbracket v(0,0)\rrbracket\left[\frac{1}{1-(1-b/a)x/L}\right]^{1/2},$$

并且应力的跳跃遵循

$$\llbracket T(x,t)\rrbracket_{t=x/c}=\llbracket T(0,0)\rrbracket\left[\frac{1}{1-(1-b/a)x/L}\right]^{1/2}.$$

我们看到，在这种特殊情况下，当面积减小时，速度的跳跃增加，应力的跳跃则类似. 这并不是不合理的，因为横截面积减小时，人们会预期应力增加，相应的速度的跳跃也增加[1]. 对于变化着的密度 ρ 和局部声速 c，情况多少更加复杂一点，我们从(22)和(23)式注意到，如果 $\rho(x)c(x)\sigma(x)>\rho(x_0)c(x_0)\sigma(x_0)$，速度的跳跃将增加，而如果 $\rho(x)c(x)/\sigma(x)>\rho(x_0)c(x_0)/\sigma(x_0)$，应力的跳跃将

1) 锤击所产生的应力跳跃强度在面积减小时会增加这一事实可能具有实际重要性，因为高的应力值可能引起材料的破坏.

增加.

练　　习

1. 在刚才结束的分析中，我们已假设跳跃沿间断面是连续的. 重新审查一下论据，试判明如果把这个要求放松为逐段连续，那么我们能得到些什么.

2. 就下列方程，完成间断面传播的分析:

(a) 传热方程 $u_{xx} = cu_t$, 式中 c 为常数;

(b) 拉普拉斯方程 $u_{xx} + u_{tt} = 0$[1)]

3. 上面的分析是在物质属性 E、σ 和 ρ 连续的假设下进行的. 上一节考虑了一种不同形式的间断. 本练习的目的是证明刚才所用的方法可应用于上面考虑的问题. 假定在全部时间内在杆上都有一个固定的间断表面，而且 E, σ 和 ρ 在经过这个固定表面时有一个跳跃间断. 把本节的分析方法应用于这个新问题. 特别是证明与 (7) 式等价的结果表明，经过间断面的速度是连续的，并且可从与 (10) 式等价的结果得到在这个表面上力也连续的结果

4. 课文中并未列出得到(7)式到(23)式的详细计算，试证明这些方程.

5. 把杆倒过来，完成与本章结束时的例子同样的分析.

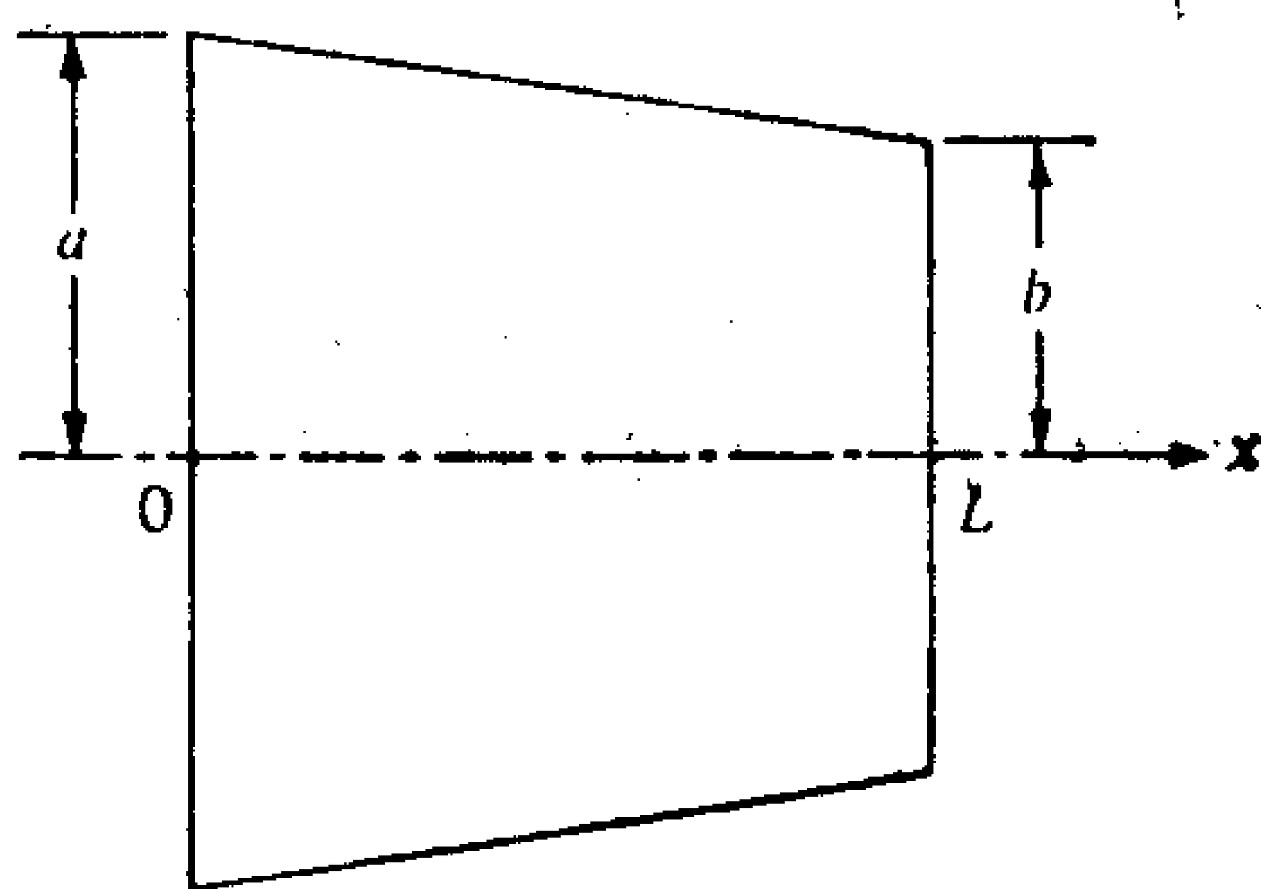


图 12.19　截头锥侧示图，其端头是半径为 a 和 b 的圆盘.

---

1) 虚传播速度应该摒掉，因为它们没有直接的物理意义. 可是向复域的延拓已证明有重要的价值. 见 Garabedian (1964)，特别是该书十六章.

6. 修改(23)式下面的讨论，使它适用于底部半径为 a 和 b 的截头锥(见图 12.19). 跳跃的性质有什么差别.
7. 定义一个合适的"差分位移"，从而把课文中对波前向未扰动材料运动的限制去掉.

12.4 功、能量和振动

在本节中我们将简要地考虑功和能量之间的关系. 此外，我们还要研究一下称之为自由振动的波动方程的某些特解，在讨论过程中，我们将看到功和能量之间的平衡是如何在振动问题中起作用的，而振动问题既在物理上很有意义又在计算上很有价值.

功和能量

让我们考虑一根长度为 L 的杆，它的截面性质不断变化，并且只在两端受力 $\mathbf{F}(L,t)$ 和 $\mathbf{F}(0,t)$ 的作用.(见图 12.20.)利用胡克定律，我们看到，

$$\mathbf{F}(L,t)=E(L)\sigma(L)u_x(L,t)\mathbf{i}$$

和

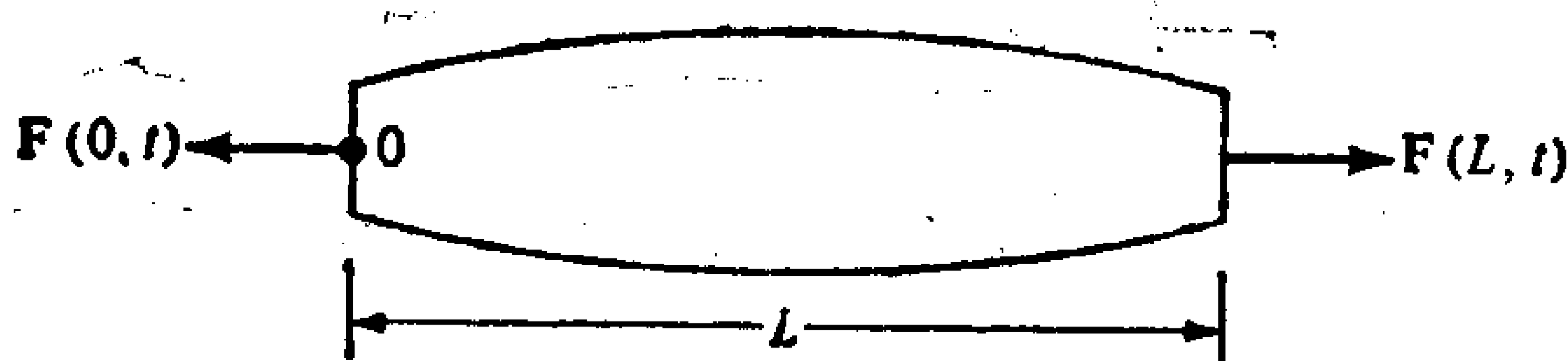


图 12.20 两端受力的杆.

$$\mathbf{F}(0,t)=-E(0)\sigma(0)u_x(0,t)\mathbf{i}.$$

与普通质点力学相类似，我们可以把(单位长度)杆的**动能密度**定义为

$$\frac{1}{2}\rho(x)\sigma(x)u_t^2(x,t), \tag{1}$$

并把杆在时间 t 时的**总动能**定义为

$$K(t)=\frac{1}{2}\int_0^L\rho(x)\sigma(x)u_t^2(x,t)dx. \tag{2}$$

假定沿杆长没有分布力，我们把时间间隔 $0 \leqslant t \leqslant t_1$ 内外力所作的功 W_e 定义为[1)]

$$W_e = \int_0^{t_1} [\mathbf{F}(L,t) \cdot u_t(L,t)\mathbf{i} + \mathbf{F}(0,t) \cdot u_t(0,t)\mathbf{i}]dt. \tag{3}$$

因此，

$$W_e = \int_0^{t_1} [E(L)\sigma(L)u_x(L,t)u_t(L,t) - E(0)\sigma(0)u_x(0,t)u_t(0,t)]dt. \tag{4}$$

如果用 τ 表示单位长度上的内力，那末内功 W_i 将由下式给出

$$W_i = \int_0^{t_1}\int_0^L \tau u_t dx dt.$$

为了计算 τ，考虑由

$$\xi \leqslant x \leqslant \xi + l$$

定义的杆的任意一部分．杆的其余部分作用在这部分上的力为

$$T(\xi + l,t)\sigma(\xi + l) - T(\xi,t)\sigma(\xi) = \int_\xi^{\xi+l} [T(x,t)\sigma(x)]_x dx.$$

因此，在 ξ 处单位长度上的内力 τ 为

$$\tau(\xi,t) = \lim_{l\to 0}(l)^{-1}\int_\xi^{\xi+l} [T(x,t)\sigma(x)]_x dx = [T(\xi,t)\sigma(\xi)]_\xi, \tag{5}$$

所以

$$W_i = \int_0^{t_1}\int_0^L (T\sigma)_x u_t dx dt = \int_0^{t_1}\int_0^L (E\sigma u_x)_x u_t dx dt. \tag{6}$$

我们将把时间间隔 $0 \leqslant t \leqslant t_1$ 内**势能的改变**定义为在这段

1）我们记得，作功的速率等于力和速度矢量的数积．我们把质点力学的这个定义加以推广，目的是为了得到经典结果的某些有意义的普遍化的结果．

时间间隔内外力和内力作功之差. 为了得到势能改变的解析表达式,让我们回到 W_i 的公式. 用分部积分,我们得到

$$\begin{aligned}W_i &= \int_0^{t_1} E\sigma u_x u_t \Big|_0^L dt - \int_0^L E\sigma \int_0^{t_1} u_x u_{xt} dt dx \\ &= \int_0^{t_1} E\sigma u_x u_t \Big|_0^L dt - \int_0^L \frac{1}{2} E\sigma u_x^2 \Big|_0^{t_1} dx \\ &= W_e - \frac{1}{2}\int_0^L E(x)\sigma(x)u_x^2(x, t) \Big|_0^{t_1} dx.\end{aligned}$$

因此,我们看到,在时间间隔 $0 \leqslant t \leqslant t_1$ 内势能的改变为

$$\frac{1}{2}\int_0^L E(x)\sigma(x)u_x^2(x, t)dx - \frac{1}{2}\int_0^L E(x)\sigma(x)u_x^2(x, 0)dx.$$

所以,在时间 t 时势能 P 由下式给出

$$P(t) = \frac{1}{2}\int_0^L E(x)\sigma(x)u_x^2(x, t)dx + C. \tag{7}$$

我们将取 $C = 0$,因此势能的任意常数为零时相当于无应变状态 $(u_x \equiv 0)$.

现在让我们回到运动方程

$$(E\sigma u_x)_x = \rho\sigma u_{tt}.$$

如果两边用 u_t 相乘,并在 x 和 t 上积分,于是我们有

$$\int_0^{t_1}\int_0^L (E\sigma u_x)_x u_t dx dt = \int_0^L \int_0^{t_1} \rho\sigma u_{tt} u_t dt dx.$$

分部积分后我们得到

$$\int_0^{t_1} E\sigma u_x u_t \Big|_0^L dt - \int_0^{t_1}\int_0^L E\sigma u_x u_{tx} dx dt = \frac{1}{2}\int_0^L \rho\sigma u_t^2 \Big|_0^{t_1} dx.$$

左端第二个积分可以简化为

$$\int_0^L E\sigma \int_0^{t_1} u_x u_{xt} dt dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L E(x)\sigma(x)u_x^2(x,t)\Big|_0^{t_1}dx.$$

于是我们可以得到结果

$$\int_0^{t_1} E\sigma u_x u_t \Big|_0^L dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L \rho\sigma u_t^2 \Big|_0^{t_1}dx + \frac{1}{2}\int_0^L E\sigma u_x^2 \Big|_0^{t_1}dx \tag{8}$$

我们注意到,(8)式表示外力所作的功等于动能的改变加势能的改变。这个结果称之为**功-能量原则**.

一个振动问题

现在我们把注意力转到一个具体问题上去，它可以作为本书中经常出现的整个一类问题的范例。让我们考虑长度为 L,$x=0$ 端固定，另一端系在一根线性弹簧上的杆。我们假定没有外力，因此位移满足下列微分方程和边界条件:

$$\begin{aligned} &(E\sigma u_x)_x = \rho\sigma u_{tt}, \qquad 0 < x < L. \\ &u(0,t) = 0, \\ &E(L)\sigma(L)u_x(L,t) + k^2u(L,t) = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

试问是否有可能得到与时间成谐波关系的驻波解;即式(9)的解是否具有形式

$$u(x,t) = w(x)\exp(i\omega t)?$$

把这个假定的解代入边值问题(9)并把每项共有的指数因子掷掉，我们得到

$$\boxed{\begin{aligned} &(E\sigma w')' = -\omega^2\rho\sigma w, \qquad 0 < x < L \\ &w(0) = 0, \\ &E(L)\sigma(L)w'(L) + k^2w(L) = 0, \end{aligned}} \tag{10}$$

式中“ ′ ”代表对 x 的导数.

方程(10)定义了一个**斯图姆-刘维问题**. 一般地,这个问题只具有相应于人们不感兴趣的无运动情况下的平庸解 $w=0$. 然而，在频率 ω 的某些值下存在着非平庸解. 这些 ω 值是**本征值**,

相应的解是**本征函数**. 5.2 节中已给出了斯图姆-刘维问题的一些一般的结果. 我们这里的讨论很大程度上是独立的. 我们集中于实际估算特征值的一种具体的方法.

瑞利商

让我们来考察一下本征值及相应的本征函数 $w(x)$ 所具有的某些性质. 我们首先把方程(10)中的微分方程乘以 $w(x)$ 并从 0 到 L 加以积分,结果为

$$\int_0^L (E\sigma w')'w\,dx + \omega^2\int_0^L \rho\sigma w^2\,dx = 0.$$

分部积分第一个积分,我们得到

$$E\sigma w'w\Big|_0^L - \int_0^L E\sigma w'^2\,dx + \omega^2\int_0^L \rho\sigma w^2\,dx = 0.$$

因为从(10)式的第一个边界条件有

$$E(0)\sigma(0)w'(0)w(0) = 0,$$

从第二个边界条件有

$$E(L)\sigma(L)w'(L)w(L) = -k^2w^2(L).$$

因此

$$-k^2w^2(L) - \int_0^L E\sigma w'^2\,dx + \omega^2\int_0^L \rho\sigma w^2\,dx = 0,$$

或

$$\omega^2 = R(w), \tag{11}$$

式中

$$R(w) = \frac{\int_0^L E\sigma w'^2\,dx + k^2w^2(L)}{\int_0^L \rho\sigma w^2\,dx}$$

称为**瑞利商**. 可以看到,方程 (11) 将是一个把本征函数和本征值联系起来的一个非常有用的关系.

瑞利商 $R(w)$ 有一个有趣的物理解释. 为了看清楚这一点,在 R 的分子分母上都乘以$\frac{1}{2}$, 然后把 $u = w\exp(i\omega t)$ 代入,我们

可以立即看到，R 等于内部应变的势能 (7) 加上拉伸了的弹簧上的力[1]的一半 $k^2w(L)$ 乘以拉伸距离 $w(L)$，再把所有这些除以动能(2)式. 简言之，对于一个给定的振动模式，瑞利商是总势能与动能之比.

本征值和本征函数的性质

让我们回到本征值问题(10)并假设我们还有相应于本征函数 $y(x)$ 的第二本征值 μ. 我们也假定 ω^2 与 μ^2 是互相不同的. 因此 μ 和 $y(x)$ 满足

$$
\begin{aligned}
(E\sigma y')' + \mu^2\rho\sigma y &= 0, \\
y(0) &= 0, \\
E(L)\sigma(L)y'(L) &= -k^2y(L).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

根据一个与用来证明(5.2.3)实质上相同的论据，我们可以证明相应于不同本征值的本征函数在下列意义上讲是正交的

$$
\int_0^L \rho\sigma w y\, dx = 0. \tag{13}
$$

同样通过使用与第五章中只在细节上不同的推理，我们可以证明，方程 (10) 的本征值 ω 必然是实数，并且本征值总可以取实值. 但是 ω^2 可能是负的吗? 应该证明确有这种情况，随时间变化的行为不再振荡，而宁可是指数增长或衰减. [如果 $\omega=i\sigma$，那末，如若 σ 是负(正)的，则 $\exp(i\omega t)=\exp(-\sigma t)$ 增长(衰减).] 注意到表达式 (11) 就可解决这个问题. 因为这个表达式让 ω^2 等于瑞利商，这就说明，因为相应于本征值 ω^2 的本征函数是实的，所以 ω^2 是正的.

最后，我们注意到，相应于单个本征值的本征函数只有在积性常数之内才有 (练习 1).

---

1) 对于一个弹簧，势能可以看作把它拉伸一个给定量的平均力乘以拉伸量的积. 参阅练习 5.

属性不变时的一个精确解

下面，我们来考虑一个非常简单的例子，它在我们考虑在 $x=0$ 处砌入，$x=L$ 处自由，并且具有常属性的杆时出现．这里 E、σ 和 ρ 为常数，$k^2=0$．边值问题(10)变为

$$w''+\left(\frac{\omega}{C}\right)^2 w=0,$$

$$w(0)=w'(L)=0,$$

式中，与平常一样，$C^2=E/\rho$．微分方程的通解为

$$w(x)=M\sin\left(\frac{\omega}{C}x\right)+N\cos\left(\frac{\omega}{C}x\right).$$

第一个边界条件意味着 $N=0$，而第二个边界条件要求

$$\frac{\omega}{C}\cos\left(\frac{\omega}{C}L\right)=0.$$

注意 $\omega=0$ 得到平庸解，我们看到

$$\frac{\omega}{C}L=\frac{(2n+1)\pi}{2},$$

式中 $n=0,1,2,\cdots$．因此有下列可数多个本征值 ω_n 和可数多个相应的本征函数 $w_n(x)$

$$\omega_n=\frac{(2n+1)\pi C}{2L},$$

$$w_n(x)=\sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right],$$

$n=0,1,2,\cdots$.

把最低的本征值表征为瑞利商的极小值

前面的例子说明，本征值和本征函数的精确计算与寻求控制微分方程的显式解有关．这是一个并非总是很容易完成的例子．已经发展了许多方法近似地去寻求本征值．我们将通过简要地考虑这些方法中的一种来结束本章．

在第 II 卷第十二章中我们将考虑与本征值问题 (10) 有关的

许多极小属性．有一个我们不加证明而叙述的结果如下．令 U 为一类二次可微并在 $x=0$ 处为零的函数 $u(x)$． 用 ω_1^2 表示方程(10)的最低本征值．令

$$\mu=\min_{u\in U}R(u), \tag{14}$$

并令 $w(x)$ 表示相应的极小化函数．那末 $\mu=\omega_1^2$ 和 $w(x)$ 是相应的本征函数．

极小值原理具有下列物理解释． 类 U 中的函数称为**虚位移**(也许"可想象位移"是更好的术语.)它们光滑而且满足 $x=0$ 处的边界条件．相应的瑞利商给出了虚势能与虚动能之比．最低的本征值就是这个比值的极小值．

有趣的是注意到属于类 U 的函数并不需要满足(10)中的第二个边界条件．但是可以证明，极小化函数将自动满足这个边界条件．这样一种边界条件称为固有的，并且在与极小值原理有联系的一大类问题中出现．作为瑞利商的极小值的进一步讨论，包括 ω^2 的表征的证明，将在第 II 卷12.2 节中找到．

上面叙述的极小值原理，以及关于较高本征值的类似的定理，产生一种非常有效的技术，即*瑞利-里兹方法*，可用来求本征值的近似值．这里，我们将只对一个具体问题估算最低本征值以说明这一技术的威力． 概念很简单． 如果在所有 $u\in U$ 中最低本征值 ω_1^2 是 $R(u)$ 的最小值，那末用凡是属于 U 的任何函数 $\bar{u}$ 来计算 R 就可算出 ω_1^2 的上界．大体上来说，我们在猜测近似于正确本征函数 ω 的 $\bar{u}$ 时越聪明，我们的上界就将越接近于精确的本征值．

对一个楔的最低本征值的估算

我们现在来考虑如图 12.21 所示的具有单位厚度但平面形状为楔形的一根杆的具体例子． 这根杆的尖端自由，基底被固定．面积 σ 为

$$\sigma=\frac{bx}{L}.$$

这个构件的本征值问题为

$$\left(\frac{Ebxw'}{L}\right)' = -\frac{\omega^2\rho bxw}{L}, \qquad \text{对于 } 0 < x < L;$$

$$w(L) = 0, \quad \text{当 } x \to 0 \text{ 时}, \quad xw' \to 0.$$

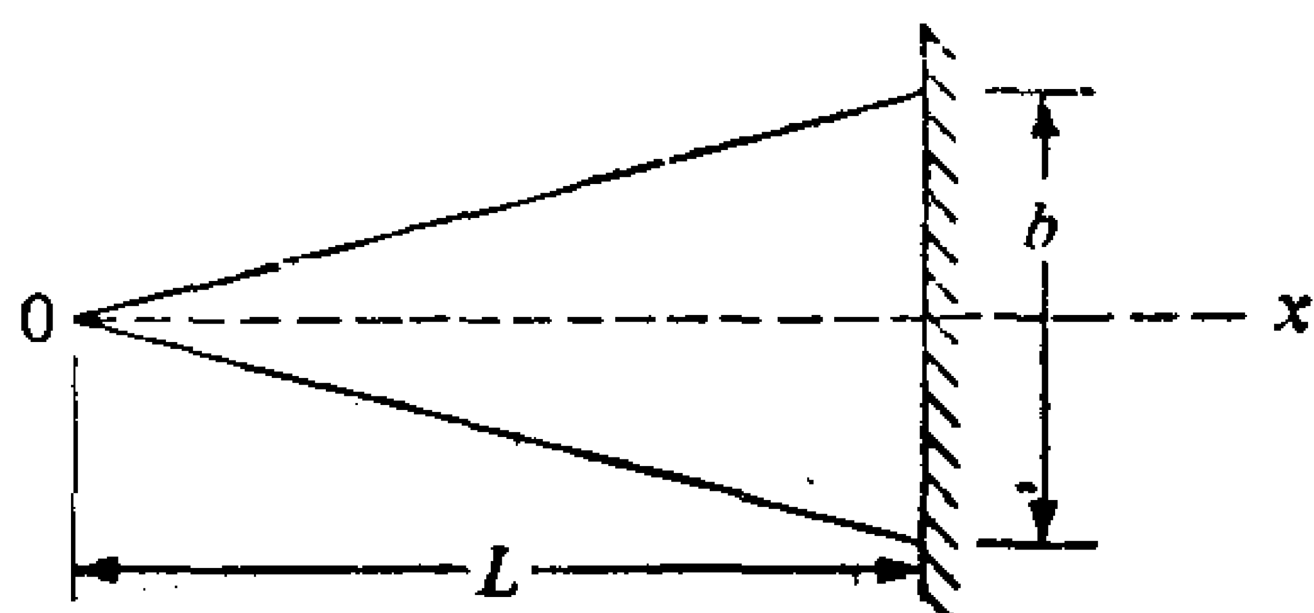


图 12.21 基底端砌入、尖端自由的楔

第二个边界条件决不是一个平庸的条件，因为它指出，在原点附近,解 w 不能像 $\log x$ 那样奇异. 既然 E、b，ρ 和 L 都是常数，那末边值问题便可简化为

$$(xw')' + \frac{\omega^2\rho}{E}xw = 0, \quad \text{对于 } 0 < x < L,$$

$$w(L) = 0, \quad \text{当 } x \to 0 \text{ 时}, \ xw' \to 0.$$

满足第二个边界条件的微分方程的解为

$$w = J_0\left[\omega\left(\frac{\rho}{E}\right)^{1/2} x\right],$$

式中 J_0 是零阶贝塞耳函数. 第一个边界条件要求

$$J_0\left[\omega\left(\frac{\rho}{E}\right)^{1/2} L\right] = 0.$$

上面的方程有可数的无穷个解 ω，每个贝塞耳函数 J_0 的零点都有一个解. 从表上取出最小的零值,我们得到

$$\omega_1 = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2} 2.4048L^{-1}.$$

让我们假装并不知道上面的解，而试图用极小值原理去作估算. 可以发现相应于这个满足所需边界条件 $u(L) = 0$ 的本征值问题的瑞利商为

$$R(u) = \frac{\int_0^L Exu'^2dx}{\int_0^L \rho xu^2dx},$$

如若我们把试探函数取作

$$\bar{u} = L - x$$

并用 Λ^2 表示相应的瑞利商，简单的计算表明

$$\Lambda^2 = \frac{6E}{\rho L^2}$$

或

$$\Lambda = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2} 2.45L^{-1}.$$

这样我们看到非常简单的近似给出了误差小于 2.8%的一个上界.

应该立刻指出，刚才引用的例子未免太成功了. 事实上我们会发现，这样简单的函数很少导致这样接近的估计. 尽管如此，还是希望这种情形会使读者相信，极小值表征是一种极有价值的方法，并且比较初步的计算就能导致对本征值的相当不错的估计. 经验表明，如果试探函数在物理上反映了比较合理的位移，那末估算得到的本征值就比从任选的函数得到的结果接近得多. 有效地使用瑞利-里兹方法是一门艺术，事先的想法常常会对计算的精度和难易程度带来好处.

练　　习

1. 证实下述事实：相应于给定本征值的(10)式的本征函数由于下列论据而只有在积性常数之内才有. 假定相应于同一本征值有两个线性独立的本征函数，证明存在着具有性质 $u(0) = u'(0) = 0$ 的一个线性组合 $u(x)$. 把唯一性定理应用于二阶方程[参阅(例如) Boyce 和 DiPrima, 1969 第 99 页].
2. 在 $x = 0$ 处固定、在 $x = L$ 处系着一个质量M的一根杆，其本征值问题为

$$(E\sigma v')' + \omega^2\rho\sigma v = 0, \qquad 0 < x < L,$$

$$v(0) = 0,$$

$$E(L)\sigma(L)v'(L) = \omega^2 M v(L).$$

这个问题的瑞利商是什么？相应于不同本征值的本征函数所满足的正交关系是什么？

3. 考虑在课文中讨论的等属性杆的本征值问题．本征值问题取如下形式

$$v'' + \lambda v = 0, \qquad 0 < x < \frac{1}{2}\pi,$$

$$v(0) = 0,$$

$$v'\left(\frac{1}{2}\pi\right) + \alpha^2 v\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0.$$

(a) 求 λ 满足的超越方程．如果 $\alpha^2 = \frac{3}{2}$，最低的非平庸本征值是什么？

(b) 取

$$\bar{v} = x$$

求一个近似本征值．

(c) 取

$$\bar{v} = x + ax^3$$

求改进的本征值，式中 a 的确定得使 $R(\bar{v})$ 尽可能小．与前面的精确计算相比，百分比误差是多少？（这里的计算多少有点冗长．如果采用若干个参数，用瑞利-里兹法经常可以得到极好的结果，但是这时使用计算机是最重要的．）

4. 长度为 L 的简支梁的横向振动遵循的本征值问题为

$$[E(x)I(x)w'']'' = \omega^2\rho\sigma(x)w,$$

$$w(0) = w''(0) = W(L) = w''(L) = 0.$$

（边界条件对应于简支端．）

(a) 证明相应的瑞利商为

$$R(w)=\frac{\int_0^L E(x)I(x)w''(x)^2dx}{\int_0^L \rho\sigma(x)w(x)^2dx}.$$

象课文中一样，开始先把控制微分方程乘以 w.

(b) 相应于不同本征值的本征函数满足的正交性关系是什么？

5. 一个弹性常数为 k^2 的弹簧所约束的质量 m，它的位移 $u(t)$ 满足 $d^2x/dt^2=-k^2x$. [这里当弹簧未伸长时，$x=0$.] 用 dx/dt 乘方程并积分. 用动能 $\frac{1}{2}m(dx/dt)^2$ 和势能 $\frac{1}{2}k^2x^2$ 作解释. 把这些能量的定义与课文中定义的连续介质的动能和势能形式加以比较. [注意，势能可解释为贮存功，而这里的这个功是弹簧所伸长的距离与拉伸过程中的初始力(为零)和终止力的平均值相乘的积.]

6. 在 12.2 节末尾，我们得到过波反射问题的复数解. 这个解的实部为

$$u=\cos(x-c_1t)+A\cos(x+c_1t),\quad x<0;$$
$$u=B\cos[\beta(x-c_2t)],\quad x>0.$$

[常数 A 和 B 在 (2.14) 中给定.] 给出能量分布的一个完整的讨论.

(a) 具体地，求 $x<0$ 和 $x>0$ 时每个周期的总能量.

(b) 在(a)中你的结果应该与时间无关；从一般考虑来证明也应如此.

(c) 考虑到透射波并不具有与入射波和反射波相同的周期，试证明入射波中的能量与透射波和反射波中的能量之和相平衡.

第十三章 连续介质

历史性的时刻往往以一连串事件为结束，而以另外一连串事件为开端. 这样的一个历史性的时刻是在1687年以牛顿的《原理》一书问世而来到的. 三大定律就出现在该书第一卷开头引人注目的位置之上.

I. 一个物体，原来静止则保持静止，原来运动则保持向前作匀速直线运动，直到作用在此物体上的力迫使它改变原来的状态为止.

II. 运动的改变与所作用的引起运动的力成正比，而这种改变则发生在力所作用的直线上.

III. 有作用存在时，总有一个相等的反作用存在，也就是说，互相作用着的两个物体间的相互作用总是大小相等而方向相反的.

从这三条定律，通过严格而清晰的推导，牛顿总结了一个世纪以来关于一个或两个物体在真空中运动的工作. "牛顿所写的一切都正确，清晰，而且简明. 在较早期的工作中，这些光彩夺目的伟大发现的金刚石是埋藏在冗长的特殊情况、繁复的细节、形而上学、混乱和错误的不透明的矿石之中的，而牛顿所循的则是一条纯金之脉"[1].

与关于一体和二体问题的工作不同，牛顿关于三体问题的工作并不集中在基本微分方程的表述和求解上面. 实际上，"他并没有试图建立运动方程的迹象. 他获得了一些正确的不等式，并在困难的条件下向主要的近似结果摸索前进，这两者对他那无人可

1) C. Truesdell, "A Program Toward Rediscovering the Rational Mechacics of the Age of Reason," *Arch. Hist. Exact Sci.* 1:1, 5(1960).

以匹敌的对力学的物理本质的驾驭能力和他那威力无比的头脑，又是一曲颂歌. 但是，这并不表明他对于一般力学的表述已经足够了. 历史证明的恰好是反面"[1]. 有关三体问题的进展需要对一般天体力学方程进行表述，而这些方程一直要到 1749 年才（为欧拉所）发表.

牛顿的永恒而权威性的工作是有关可以理想化为刚体或点质量的物体的. 在《原理》第II卷中，牛顿为求解阻滞介质中的物体运动而作了努力，但是他的这一工作大部分从那时起便为人们所抛弃；不过，这并不丢脸，人们至少是用了一个世纪的时间才对牛顿所设法解的这个问题取得了甚至还是一般性的理解，而且许多重要的问题至今仍然存在着.

在阻滞介质中的运动是现在称之为连续介质力学这门学科中的主要问题. 在 1776 年，即《原理》出版近一百年以后，由于欧拉力学定律的发表才出现了连续介质力学历史中的一个转折点. 这些定律指出，对于每一个物体或每一个物系，并且对于每个物体的每一部分，无论这些物体可看作质点还是充满着空间，无论它们是可变形的还是刚体，

1. 作用在物体上的合力等于总的动量改变率；
2. 作用在物体上的合力矩等于总动量矩的改变率，此处力矩和动量矩都是对于同一个固定点来取的[2].

欧拉定律构成了支配连续介质运动的主要限制，但是这些定律并非唯一的一些限制. 本章的和下一章的目的在于给出需要加以考虑的所有这些限制的数学表述，而不管这些介质的组成，如果我们忽略电、磁、化学和某些其他效应的话，我们所作的少量的历史评述表明，这些限制或定律的表述使当时的一些最有才华的人们用了不止一个世纪的努力. 有关这个论断的进一步的史料，我们将在附录 14.2 的历史讨论中给出.

1）同第上页注.

2）同第上页注.

正当本书写作之时，连续介质力学方程是一个活跃的研究课题，由于提出了一些较深远的概念，较老的方程正在得到澄清和统一，而新的方程正在加以表述以包括日益扩展的各类重要科学现象. 因此，我们希望，通过下面的讨论，读者不仅对这些具有重大历史意义和现实意义的“自然定律”获得深入的理解，而且他也能对表述体现这些定律的方程的过程有所理解，而这一过程可以帮助他更进一步去尝试表述新的方程.

我们在本章一开头便讨论连续介质模型. 然后介绍连续介质运动的物质和空间导数以及某些有关的数学概念及公式. 有了这个基础，体现基本定律的方程就可以有效地提出来了. 而这些都在第十四章中完成.

13.1 连续介质模型

在以前的讨论中，我们已采用了自然界的一些模型，其中一种物质或一种性质可以看作是在空间连续分布的. 例如，温度和质量已看作是随位置而光滑变化的函数. 在本节中，我们将对连续介质的概念，特别是当它在力学中应用的时候，作较深入的推敲.

质点力学讨论点质量系统的平衡和运动. 在连续介质力学中，我们讨论连续介质，其中对于所研究物体瞬时地占据的空间中每一点，我们都规定象密度和速度这样的一些属性都是光滑变化的.

我们中的绝大多数人都把物质看作象水和钢那样是由分子系统组成的. 如果我们考虑一下连续观点中的应变量是如何看作粒子观点中相应变量的恰当的平均值，那末这种粒子观点和连续介质的观点就都会得到阐明. 为了集中我们的思想，让我们首先考虑流体的密度是如何与它的分子结构相关联的.

分子平均

在时间 t，考虑一个以点 $(x_0, y_0\ z_0)$ 为中心的立方体 C，其各条边的长度为 h，

$$C: |x - x_0| \leqslant \frac{1}{2}h, \quad |y - y_0| \leqslant \frac{1}{2}h,$$
$$|z - z_0| \leqslant \frac{1}{2}h.$$

在C中，有一定量的质量M_h，因此平均密度为$\rho_h \equiv M_h/h^3$，为了定义在点(x_0, y_0, z_0)处时间t时的密度$\rho(x_0, y_0, z_0, t)$，我们来考察当h变得越来越小时发生的情况，我们得到画在图13.1上ρ_h作为h的函数的曲线。这条曲线并不是真实实验结果的记录；因为不可能在固定时间t时作一系列的测量。相反，这张图表示基于下列一般考虑的"思想实验"的结果。

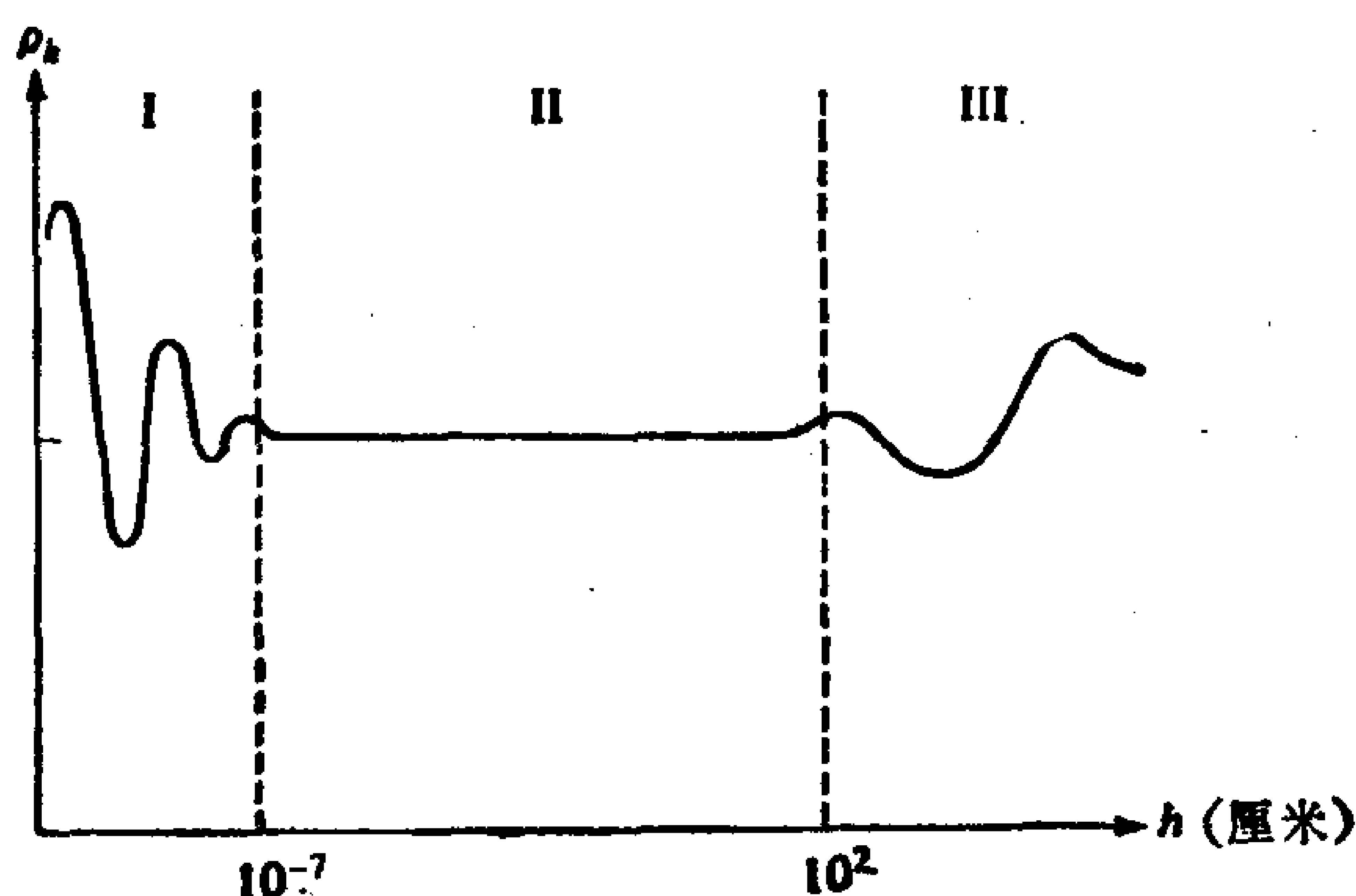


图 13.1 一个边长为h的匣子，其平均密度随h变化的曲线。这个匣子的中心在点(x_0, y_0, z_0)上，而在"思想实验"中所有的测量都是在某时间t进行的。横坐标为对数尺度

流体在区域III中的变化是由于流体性质的不均匀而引起的。例如，假定(x_0, y_0, z_0)是在墨西哥湾流中的一点，如果C非常大，那末，它将包含一些比较暖和的墨西哥湾流和一些比较凉快普通海水，因而比起只包含墨西哥湾流水的较小的立方体来，它就具有较高的密度，但是我们会预料到当h从10厘米减小到1厘米时，密度脉动是非常小的。当h的数量级为几百米时，可以指望出现从区域III到区域II之间的转变[1]。

1) 我们心目中指的是最粗略的密度变化。粗糙的平均会掩盖了某些小的变化。如果对这些小的变化感到兴趣，那末区域II和III之间的过渡将会在小得多的h值下出现。

在区域II中，ρ_h的曲线是水平的，因为我们肯定不会指望随h的下降(比如说从大约10厘米到大约10^5厘米)ρ_h会变化.

如果h是如此的小,以致在立方体C中只有几个分子，那末，h的小的改变就会造成平均密度ρ_h的大改变. 在匣子稍微缩小而把以前数过的某个分子排除出去时便会出现这种改变. 这种效应何时才显著呢？为了得到一点概念，请注意，1厘米^{3}的水包含3×10^{22}个分子. 因此当h近似地为10^{-7}厘米时，我们可以指望在C中约有30个分子. 因而对于h的值比10^{-7}厘米小时，我们可以指望在区域I中出现迅速的变化.

因此,当h从大值下降时,仅在h的值比密度不均匀性长度尺度L小时,ρ_h的脉动才可忽略.（这个尺度是一种典型的距离，在这一距离上，密度发生显著的变化. 请与6.3节进行比较.）当h的量级为所描述分子之间的典型距离的长度尺度l时，迅速的脉动又重新出现. 只要$l\ll L$,区域II就将存在. 量$\rho(x_0, y_0, z_0)$应该取作区域II中的ρ_h值. 因此，从现在的分子平均观点来看，如果分子间的距离尺度比密度不均匀性尺度小时，似乎就可能认为质量是连续地分布的.

类似的考虑使我们把连续介质的速度$\mathbf{v}(x_0, y_0, z_0)$看作与时间$t$时位于以$(x_0, y_0, z_0)$为中心的小立方体中的分子的平均速度相同. 这个立方体应该包含很多分子，但却应该比速度不均匀尺度小.（顺便说一下,“这个”不均匀性的尺度实际上与在具体问题中对何种类型的改变感兴趣有关. 例如，在研究全球性大气的环流时，速度变化尺度会与分析昆虫飞行有关的速度尺度远为不同.）

质量分布函数

把分子的详细情况加以平均的一种比较基本的方法，与质量分布函数$\Psi(x, y, z, u, v, w, t)$有关定义这个函数的要求为，积分

$$\int_{w_1}^{w_2}\int_{v_1}^{v_2}\int_{u_1}^{u_2}\int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\Psi(x,\ y,\ z,\ u,\ v,\ w,\ t)\times dx\ dy\ dz\ du\ dv\ dw \tag{1}$$

给出时刻 t 时的位置和速度分量满足下列要求的物质的质量：

$$\begin{aligned} &x_1\leqslant x\leqslant x_2,\quad y_1\leqslant y\leqslant y_2,\quad z_1\leqslant z\leqslant z_2,\\ &u_1\leqslant u\leqslant u_2,\quad v_1\leqslant v\leqslant v_2,\quad w_1\leqslant w\leqslant w_2. \end{aligned} \tag{2}$$

为了简化关于质量分布函数的讨论，我们只考虑单个空间变量 x 和相应的速度分量 u 的情况．在这种情况下，上述定义的非正规形式就是，对于非常小的 Δx 和 Δu，$\Psi(x,\ u,\ t)\Delta x\Delta u$ 给出了速度分量为 u 到 $u+\Delta u$，位于 x 到 $x+\Delta x$ 之间的质量．请注意，位于 $x=a$ 和 $x=b$ 之间的总质量为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_a^b\Psi(x,\ u,\ t)\,dx\,du.$$

考虑一个由质量为 m_1，速度为 u_1，位于 x_1 的单个质点组成的系统．因为除了位置 x_1，速度 u_1 以外不再存在质量，所以分布函数必须满足

$$当\ x\neq x_1,\quad u\neq u_1\ 时,\qquad \Psi(x,\ u,\ t)=0.$$

此外，因为系统的总的质量为 m_1，所以我们就有

$$\iint\limits_{R_1}\Psi(x,\ u,\ t)\,dx\,du=m_1,$$

式中，R_1 是 xu 平面上包含$(x_1,\ u_1)$的任何区域．象刚才所考虑的这样一个“函数”，它除了在一个点处等于不为零的有限整数值以外都等于零，被称为 δ **函数**．

现在考虑了一个分别具有质量为 m_i，速度为 u_i 位于 x_i 的 N 个质点所组成的系统，此处 $i=1,2,\cdots,N$．除了在点 (x_i,u_i) 上以外，相应的分布函数必须为零．而在这些点上这个函数可以看作具有无穷高的细长峰值，使得

$$\iint\limits_{R_i}\Psi(x,\ u,\ t)\,dx\,du=m_i,$$

式中，R_i 是一个包含 $(x_i,\ u_i)$ 而不包含其他点 $(x_k,\ u_k)$ 的区域，

$k \neq i$.

在很多情况下，N 非常大，但是存在着这样的一个距离的增量 Δx 和速度的增量 Δu 使得下述两个要求得以满足：(i)在 xu 空间中尺度为 $\Delta x \times \Delta u$ 的矩形内包含着Ψ的许多峰值；(ii) 比起有意义的长度和速度的改变，增量 Δx 和 Δu 是小量．因为我们对细节并不感兴趣，所以宜于定义一个平均质量分布函数 $\Psi(x, u, t)$．要做到这一点的一个方法是要求在一个合适的区域 $\Delta x \times \Delta u$ 中，相应于Ψ的质量是正确的：

$$\Psi(x,\ u,\ t)\Delta x\Delta u = \int_{u-\frac{1}{2}\Delta u}^{u+\frac{1}{2}\Delta u}\int_{x-\frac{1}{2}\Delta x}^{x+\frac{1}{2}\Delta x}\Psi(\xi,\ \eta,\ t)d\xi d\eta. \tag{3}$$

如此定义后，函数Ψ不再具有无限个峰值，但是当以$(x,\ u)$为中心的边长为 $\Delta x \times \Delta u$ 的矩形的边界经过 $(x_i,\ u_i)$ 中的一点时，这个函数确实具有小的不连续性，然而，因为逐段连续函数的积分是连续的，所以再作另外一种平均便会把这种不连续性排除掉．这新的平均后的函数的一阶导数仍是不连续的，但是这一不足之处又可以用另一种平均加以排除，如此等等．这些细节在这里是不重要的．我们应该认识到的是，对于大尺度现象，集中注意于光滑平均的分布函数，我们就可以取得大大的简化．在第一章中，我们讨论过在星系动力学中所用的这样一个平均值 Ψ，也可参阅练习 14.1.12 和 14.1.13.

如果一个质点在另外一个质点明显地把它偏移之前所移动的距离比起感兴趣现象的尺度确实也很小，那末我们便可以作进一步的简化．例如，这时我们就可以写出 $\rho(x,\ y,\ z,\ t)$ 和 $\mathbf{v}(x,\ y,\ z,\ t)$ 的方程组，而不是 $\Psi(x,\ y,\ z,\ u,\ v,\ w,\ t)$ 的方程组．这个问题将在 14.5 节作进一步的讨论．

连续介质作为一个独立的模型

建立连续介质观念的另一种方法，虽然表面上很天真，但却并不次于刚才所讨论的分子平均的方法．这种方法一开始就根据自然界中“真实”的分子结构，对证实连续介质模型正确性的基本假

设提出疑问．事实上，分子是“真实”的吗？化学家们所用的那些球和棒的系综“真实”吗？ 难道物理学家们告诉我们的不是分子“实际上”是原子的复杂结构，而原子本身又是电子在轨道上绕着原子核转动的小的太阳系吗？追问得紧一点时，物理学家们事实上就要警告我们说，小太阳系是用给出基本粒子统计性质的某种概率密度云所更精确地描述的情况的一种模型．再问得更紧一点时，他们就会主张可能有比基本粒子更基本的一些东西，但却要求提问者在几年以后目前这种令人感到刺激的混乱状态可能已为对物理基础的较清晰的理解所取代时再来．

按照这个观点，连续介质是科学上所用的许多模型之一，显然，它应该是在试图解释什么东西“似乎是”宏观现象时所采用的第一个模型．这个模型既不次于也不优于其他模型．象所有的模型一样，这个模型要用由此得到的推论的实验验证作出鉴定，尤其是在发展连续介质模型时我们不必去涉及分子模型，后者只能代表它本身．

尽管如此，有人会坚持说分子模型比连续介质模型好，这与说量子力学或相对论力学比经典力学好一样，因为后者可以作为前者的平均或一种特殊情况推导出来．这并不完全正确．例如，把完全气体分子运动论中所用的方程适当地加以平均，我们可以推导出相应的连续介质方程．“理论上”，我们也可以对所有的物质这样来做，但是实际上这在现在是不可能的，液体和固体分子的详细情况并没有得到完全理解，而所需的数学技巧也未完全发展起来，事实上，连续介质模型的很大一部分用途就在于它有能力不用把分子的具体细节考虑进去．

更令人难以捉摸的是如下的一点：量子力学和分子力学所需的测量是用仪器来做的． 为了理解指针的偏转或示波器的扫描，我们要用到连续介质力学． 按照这个观点，上面一段中的“好和坏”或“优和劣”的作用是相反的．看来把自然界的各种模型看成是处在同一个圆周上，它们与“实际”距离一样远近，这可能比把它们按照实际的程度而线性地先后排列要好．

大多数情况下，大多数科学家并不涉及这个棘手的哲学问题，而这个问题是在检查他们所作努力的基础时出现的. 我们对连续介质力学基础的简要考察示明它们的可靠性并不次于其他科学分支的基础. 读者可能愿意遮没这些基础中的不足之处，最好希望在这些基础上去开始建筑.

练　　习

1. 在计算 ρ_h 时如果采用球而不是立方体，请说明 $\rho(x_0, y_0, z_0, t)$ 的值不变，试推广之.

13.2 可变形介质的运动学

我们开始研究连续介质的运动而不管产生这种运动的力. 这叫作*运动学*，它与研究力对运动影响的*动力学*是相对的.

点和微团

当连续介质运动时，我们自然设法把每个点的位置规定为时间 t 的函数. 为了辨认一个已知点，我们规定它在某初始时间 t_0 的位置为 $\mathbf{A}$，如果 $\mathbf{x}$ 是时间小时这个点的位置矢量，我们便用下述方程来描述介质的运动

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{A}, t), \quad \mathbf{x}(\mathbf{A}, t_0) \equiv \mathbf{A}. \tag{1a,b}$$

这就是说，x 是原来 ($t = t_0$ 时)位于 $\mathbf{A}$ 处的一个点在时间 t 时的位置. **微团**这个词用来表示在某个固定的初始位置 A 并按照 (1) 运动的点. 对于固定的 $\mathbf{A}$，曲线

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{A}, t), \quad t \geq t_0$$

称为*微团轨道*.

我们强调，在连续介质模型中，一个微团并非一个分子. 我们举一个例子来说明有关的数量. 从 4.1 节的结论知道，在时间 t，一种物质大约扩散 $(Dt)^{1/2}$ 单位，其中 D 是扩散系数. 对于在空气中扩散着的二氧化碳，所观察到的 D 值在 0℃ 时为 0.14 厘米^2/秒. 因此，原来限制在一个非常小的体积内的二氧化碳的分子，在一分

钟之内就会扩散到主要位于半径约 3 厘米的球内．而扩散到半径为 1 厘米的球内就要用 7 秒钟．

令 $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ 为从(1)式求解 $\mathbf{A}$ 所得的 $\mathbf{x}$ 和 t 的函数，结果

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$$

表明，$\mathbf{A}$ 是现在(时间 t)位于 $\mathbf{x}$ 处的微团的初始位置．因为 $\mathbf{A}(x, t)$和 $\mathbf{x}(A, t)$ 是一对反函数，所以

$$\mathbf{A}[\mathbf{x}(\mathbf{A}, t), t] \equiv \mathbf{A}, \quad \mathbf{x}[\mathbf{A}(\mathbf{x}, t), t] \equiv \mathbf{x}. \qquad (2a,b)$$

我们将假设*物质是不可渗透的*：假定 $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ 和 $\mathbf{x}(\mathbf{A}, t)$ 为单值可逆函数，因此，在时间 t，对于每个 $\mathbf{A}$，存在着一个唯一的 $\mathbf{x}$，反之亦然．我们也将假设*运动是光滑的*：将假定 $\mathbf{A}(x, t)$ 和 $\mathbf{x}(\mathbf{A}, t)$ 具有我们要对这些函数进行各种运算时所需的那么多阶的连续偏导数．

在本书的一些地方，我们必须在某些曲线和曲面上放松这些假定，以允许物质的分裂或聚合．此外，在考虑激波间断或气泡的形成和破裂时，我们要求可从某些区域中把可逆性假设去掉．

作为将要讨论的许多应变量的一个例子，让我们来考虑密度．令 $\delta(\mathbf{A}, t)$ 表示时间 t 时初始位于 $\mathbf{A}$ 处的微团单位体积的质量．令 $\rho(\mathbf{A}, t)$ 表示时间 t 时位于固定点 $\mathbf{x}$ 处单位体积的质量．我们断言，时间 t 时，位于点 $\mathbf{x}$ 的应变量的值等于时间 t 位于 $\mathbf{x}$ 处的微团的同一应变量的值．*这个论断可称作点——微团可交换性*，这事实上就是"微团"定义的一部分．

关于密度，由点-微团可交换性得到

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \delta[\mathbf{A}(\mathbf{x}, t), t]. \qquad (3)$$

为了弄明白这一点，让我们考察下列事实：按照 δ 的定义，表达式 $\delta[\mathbf{A}(\mathbf{x}, t), t]$ 描述与那个现在位于 $\mathbf{x}$ 原先在初始位置 A 上的微团相联系的现在的密度．("现在"指的是"在时间 t"．)这与下面的说法相同：$\delta[\mathbf{A}(\mathbf{x}, t), t]$ 是与现在在 $\mathbf{x}$ 处的微团相联系的质量．

物质描述和空间描述

把 $x = x(A, t)$ 代入(3)式，并利用(2a)式，我们得到

$$\rho[\mathbf{x}(\mathbf{A}, t), t] = \delta(\mathbf{A}, t). \tag{4}$$

方程(3)和(4)说明空间描述和物质描述之间的变换关系. 这两个式子中,这些项[1]的定义如下:

空间描述: $\mathbf{x}, t$ 自变量.

物质描述: $\mathbf{A}, t$ 自变量.

为了得到空气运动的空间描述,我们要(随时间前进)在地面和塔架的各个固定位置上测量速度、压力、温度等.为了得到物质描述,我们要在各个自由地移动的气球上去作这种测量.

我们来考虑速度的物质描述和空间描述之间的关系. 与初等的质点力学相类似, 我们把微团位置随时间的改变率定义为一个微团的速度:

$$\mathbf{v}(\mathbf{A}, t) \equiv \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{A}, t)}{\partial t}. \tag{5}$$

为了保持点-微团的可交换性,我们必须把空间坐标中的速度 $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ 定义为

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}[A(\mathbf{x}, t), t]^{2)} \tag{6a}$$

方程(6a)和(2a)意味着

$$\mathbf{v}[\mathbf{x}(\mathbf{A}, t), t] = \mathbf{V}(\mathbf{A}, t)$$

当像 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ 和 $\rho(\mathbf{x}, t)$ 这样的所有应变量都与 t 无关时,流动称为*定常的*[3]. 请注意,术语"定常"意味着空间描述与时间无

---

1) 不用"空间"和"物质"描述的术语,我们常常用欧拉描述和拉格朗日描述. 这两种描述都起源于欧拉,但是, 拉格朗日对质点力学发展的贡献是以证明用他的名字是合理的.

2) 按照证实方程(3)所用的相同的理由,方程(6a)也必然成立. 因为论据比较复杂, 所以我们以稍微不同的措词来重复它. (所需的表述加深了对物质变量和空间变量的理解.) 首先注意, $\mathbf{V}(\mathbf{A}, t)$ 是起始位于 $\mathbf{A}$ 的微团在时间 t 时的速度. 同样,在方程 $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ 中,表达式 $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ 表示现在(时间 t)位于 $\mathbf{x}$ 的质点的初始位置. 因此 $\mathbf{V}[\mathbf{A}(\mathbf{x}, t), t]$ 是初始位置在现在在 $\mathbf{x}$ 的那个质点的初始位置上的微团在时间 t 时的速度. 换句话说, $\mathbf{V}[\mathbf{A}(x, t), t]$ 是时间 t 时位于 $\mathbf{x}$ 处的那个微团在时间 t 时的速度. 按照点-微团的可交换性, 这个速度必然是时间 t 时位于空间点 $\mathbf{x}$ 处的速度.

3) 定常流的概念主要用于流体力学, 在固体力学中, 是位移而不是速度为主要的应变量. 一般地说, 甚至在速度是定常的时候位移也依赖于时间. 试与练习 12.18 作比较.

关．因此，通过一个变截面管道的定常水流中用固定的探测器测得的速度总是相同的．但是，给定流体微团的速度将随着管道截面的收缩而加速，随着管道的加宽而减速．

整个这一章以及本书的大部分地方将参照固定的右手笛卡尔坐标系来确定速度分量．为了理论分析的目的，采用数字下标是最好的，但是，对于实际问题，采用较简单的符号往往比较方便的．我们把将要采用的两种符号列于表 13.1 之中．

表 13.1　两种符号

	理论分析	具体问题
沿坐标轴的单位矢量	$\mathbf{e}^{(1)}$, $\mathbf{e}^{(2)}$, $\mathbf{e}^{(3)}$	$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$
位置矢量的分量		
物质	A_1, A_2, A_3	A, B, C
空间	x_1, x_2, x_3	x, y, z
速度矢量的分量		
物质	V_1, V_2, V_3	U, V, W
空间	v_1, v_2, v_3	u, v, w

定理 1　如果质点的轨道已知，那末空间速度场 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ 就可确定，反之亦然．

证明　给定 $\mathbf{x}(\mathbf{A}, t)$，从式(5)我们得到 $\mathbf{V}(\mathbf{A}, t)$．如果我们用 $\mathbf{x}$ 和 t 表示 $\mathbf{A}$，并代入 $\mathbf{V}(A, t)$，那末由式(6a)我们得到 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$．

另一方面，假定 $\mathbf{v}(x, t)$ 已知，把(5)和(6b)式联立，我们得到

$$\frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{A}, t)}{\partial t} = \mathbf{v}[\mathbf{x}(\mathbf{A}, t), t]. \qquad (7)$$

如果我们不再明显地指出 $\mathbf{x}$ 对其初始位置 $\mathbf{A}$ 及时间 t 的依赖，那末，我们可以更简单地把(7)式重新写作：

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \qquad (8)$$

因为假定 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ 已知，可以把 (8) 式看作 $\mathbf{x}$ 的一阶非线性方程（或者 $\mathbf{x}$ 的三个分量的三个方程组成的方程组）．所需的初始条件

简单地为

$$t = t_0 \text{ 时}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}. \tag{9}$$

倘若这些方程(如我们将要假定的那样)有一个解，那末我们便可得到$\mathbf{x}$. □

在讨论微分方程时，人们往往并不明显地指出，未知函数依赖于初始条件. 因此，在很多教课书中，把(8)式写作

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \tag{10}$$

这里仅把$\mathbf{x}$看作t的函数，它具有“固定”的初始点$\mathbf{A}$. 因而(8)式的偏导数符号(读作“保持A为常数”)并不认为是必要的.

流线和微团的轨道

我们把时间t时的流线定义为一条曲线，它在每一点上的切向矢量与此点上的瞬时速度矢量相平行. 令s为时间t时从某点$\mathbf{x}_0$算起的流线 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s, t)$ 的弧长. 选择符号s是为了使$d\mathbf{x}/ds$指向速度矢量同一方向，而不是反方向. 令在x_0处 $s = 0$，那末$\mathbf{x}(s, t)$ 则由下列方程和初始条件[1]所决定

$$\frac{d\mathbf{x}(s)}{ds} = \frac{\mathbf{v}[\mathbf{x}(s), t]}{|\mathbf{v}[x(s), t]|}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (|\mathbf{v}| \neq 0). \tag{11}$$

(我们利用了dx/ds是一个单位切向量.)如果用下标符号来写，微分方程(11)成为

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{v_i}{|\mathbf{v}|}; \; i = 1, 2, 3; \; |\mathbf{v}|^2 \equiv \sum_{i=1}^{3} v_i^2.$$

如果 $v_i \neq 0$，则

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{dx_2/dt}{dx_1/dt} = \frac{dx_2}{dx_1}, \quad \frac{v_3}{v_1} = \frac{dx_3}{dx_1}.$$

类似地，如果 $v_2 \neq 0$ 或 $v_3 \neq 0$，我们可以写出

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{dx_1}{dx_2}, \quad \frac{v_3}{v_2} = \frac{dx_3}{dx_2}$$

1) 与上面一样，我们将常常用 $t = 0$ 而不是 $t = t_0$ 作为初始时间.

或

$$\frac{v_1}{v_3}=\frac{dx_1}{dx_3},\qquad \frac{v_2}{v_3}=\frac{dx_2}{dx_3}.$$

这些方程常常可以简洁地概括为

$$\frac{dx_1}{v_1}=\frac{dx_2}{v_2}=\frac{dx_3}{v_3}. \tag{12}$$

可证明在定常流中，流线和微团的轨迹是重合的（练习5）.

例 1 假定某个二维运动的物质描述为

$$x_1=A_1e^t,\qquad x_2=A_2e^{-t},\quad t\geqslant 0 \tag{13}$$

试求运动的空间描述并证明运动是定常的. 把这一过程反过来，由空间描述得到物质描述. 求微团的轨迹和流线.

解

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}=A_1e^t\mathbf{i}-A_2e^{-t}\mathbf{j}=\mathbf{v}(\mathbf{A},t). \tag{14}$$

把(13)式颠倒过来是很容易的，

$$A_1=x_1e^{-t},\qquad A_2=x_2e^t,\quad t\geqslant 0 \tag{15}$$

把(15)式代入(14)式便得到空间描述

$$\begin{aligned}\mathbf{v}[\mathbf{A}(\mathbf{x},t),\ t]&=\mathbf{v}(\mathbf{x},\ t)\\&=(x_1e^{-t})e^t\mathbf{i}-(x_2e^t)e^{-t}\mathbf{j}\\&=x_1\mathbf{i}-x_2\mathbf{j}.\end{aligned} \tag{16}$$

因为 $\mathbf{v}$ 与 t 无关，所以运动是定常的.

反过来，给定空间描述

$$\mathbf{v}=x_1\mathbf{i}-x_2\mathbf{j}, \tag{17}$$

我们得到

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{v}$$

或

$$\frac{dx_1}{dt}=x_1,\qquad \frac{dx_2}{dt}=-x_2. \tag{18}$$

在初始条件 $\mathbf{x}(0)=\mathbf{A}$ 下求解(18)式，我们得到

$$x_1=A_1e^t,\qquad x_2=A_2e^{-t}. \tag{19}$$

从而我们重新获得了(13)式. 当时间 t 从 0 增加到∞时，我们因

此而从(19)式得到在 $t=0$ 时位于 $\mathbf{x}=\mathbf{A}$ 的微团的轨道. 在这种情况下,易于把参数 t 消去,从而给出微团的轨迹是双曲线

$$x_1x_2 = A_1A_2 \tag{20}$$

的一部分. 假定 $A_1>0$, $A_2<0$. 那末,对 $t>0$, $x_1=A_1e^t$ 意味着 $x_1>A_1$,而 $x_2=A_2e^{-t}$ 意味着 $A_2<x_2<0$; 因此,微团的轨迹是位于第四象限的 $x_1x_2=A_1A_2$ 那部分的"上面"一部分. 见图 13.2.(这个例子说明,从一条曲线的参数表达式到非参数表达式时,始终都必须小心.)

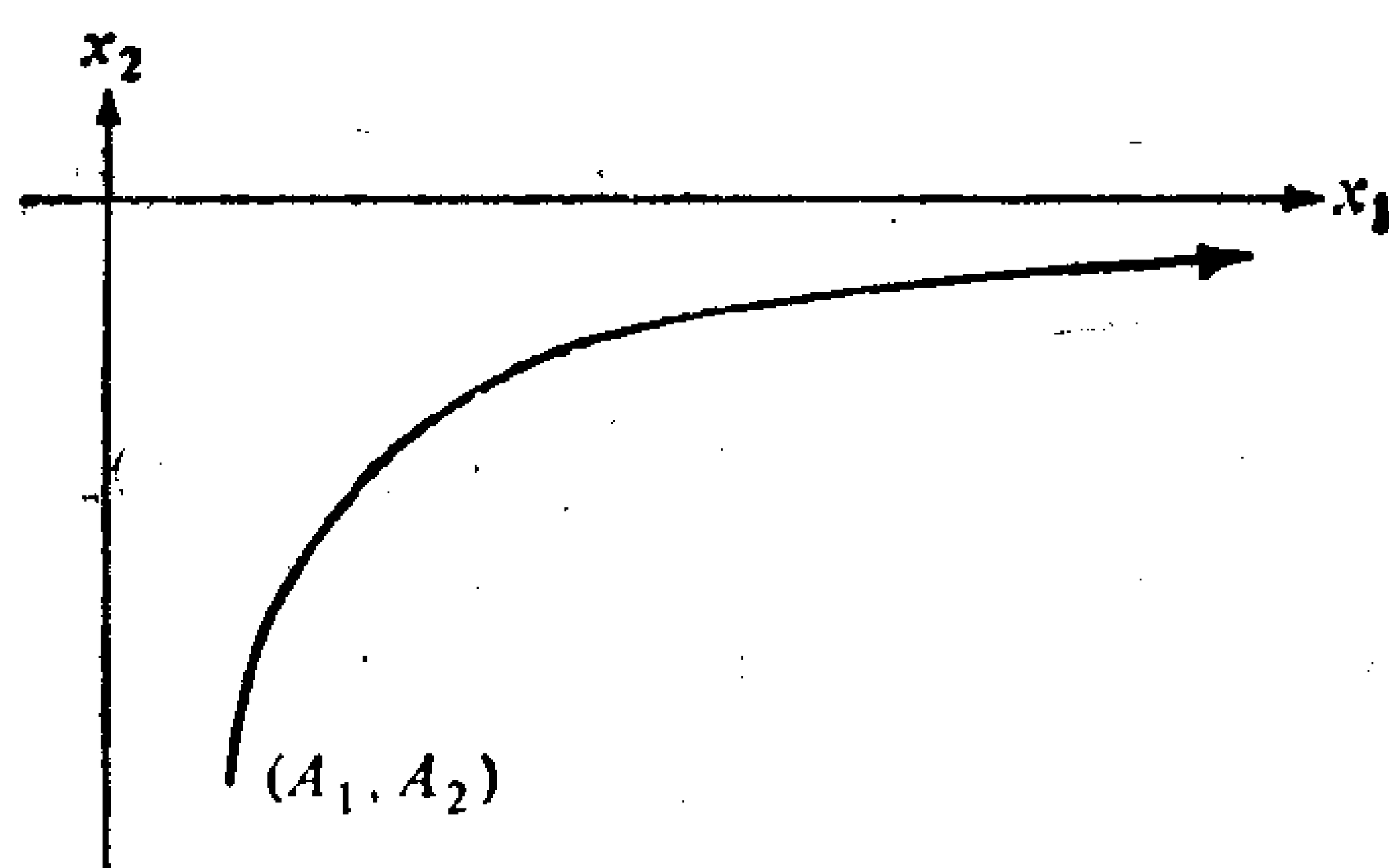


图 13.2 例 1 中确定的质点轨迹. 当 t 增加时,x_1 减少,因而箭头指示着运动的方向

流线可用(12)式得到. 于是

$$\frac{dx_1}{x_1} = -\frac{dx_2}{x_2}$$

因此,

$$\ln|x_1| = -\ln|x_2| + \text{常数} \quad \text{或} \quad x_1x_2 = \text{常数}. \tag{21}$$

(21)和(20)式的比较表明,在这种特殊情况下,微团的轨迹和流线的重合得到了证实.

从微团轨迹到空间速度场的过程需要用下述反演作为关键的一步:

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{A},t)\to\mathbf{A}=\mathbf{A}(\mathbf{x},t).$$

在刚才所讨论的非常简单的例子中,这一步很容易完成; 但是,在一般情况下,它能完成吗? 在试图从空间速度场计算微团的轨迹

时提出了另一个困难的数学问题. 在什么条件下微分方程(8)存在着满足初始条件(9)式的解? 这里我们还不能深入研究这些问题,但是我们让读者参考第二章,那里已开始提出了所涉及的某些数学问题.

有不少具体问题，如果采用物质描述，就很容易求解. 在一维可压缩流动现象的非线性理论中可以找到一些例子. (参阅 Courant and Friedrichs, 1948) 然而，这些问题都是例外，因为对于确定每个微团的行为所需的额外努力往往是得不到足够的补尝的. 虽然在研究特殊现象时，空间描述一般比物质描述更为方便[1],但是物质描述却为基本物理定律的表述提供了一个更为自然的框架. 因此，必须把某些表达式从物质坐标换成空间坐标. 从下一节开始我们就来研究这种变换.

一个简单的运动学边界条件

物质常常受到运动学性质的外部约束. 一个简单而重要的例子是物质与不可渗透边界(壁面)之间的接触. 因为没有物质能渗透过这种边界,垂直于壁面的速度必须为零. (相对的切向速度不会引起渗透.)如果 $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$ 是壁面上的单位法向量，则在壁面 $\mathbf{x}$ 处上的边界条件为

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)=\text{给定的壁面法向速度} \qquad (22)$$

壁面静止时,当然有 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=0$. 有时也会出现其他的运动学边界条件(例如,在两种介质的交界面),但是,在这里,仅仅指出存在这种类型的约束已经足够了.

练　　习

1. 假定一个微团在时间 t 时的空间坐标 x_i 为

$$x_1=A_1+t, \qquad x_2=A_2e^t, \qquad x_3=A_3+tA_1.$$

---

1) 对于某些类型的模型,特别是线弹性的模型，物质变量和空间变量之间的差别是已忽略项的量级. 因此,这些变量之间的差异本质上可以忽略.

求速度矢量 $\mathbf{v}(x, t)$；即把物质描述变换成为空间描述.

2. 一个二维定常流,其速度分量为

$$u = y, \qquad v = x.$$

(a) 证明通过(x_0, y_0)的流线为一条抛物线.

†(b) 求从(x_0, y_0)开始的微团轨迹. 注意微团的轨迹与流线是重合的.

†**3.** 一个二维非定常流,其速度分量为

$$u = t, \qquad v = x + 1 \qquad (t\text{ 是时间}).$$

(a) 求通过(x_0, y_0)的流线.

(b) 求从(x_0, y_0)开始的微团轨迹.

4. 一个二维流动,其 x 和 y 速度分量为

$$u = e^{-y}\cos t, \qquad v = 1.$$

(a) 求时间 t 时的流线.

(b) 求微团的轨迹,用初始坐标 A 和 B 表示积分常数.

5. 试给出物理上的论据，证明对于定常流微团的轨迹与流线是重合的.

6. 按照课文中(6a)式的解释来解释(6b)式.

13.3 物质导数

为了给出这一节数学内容的物理动机，我们考虑下述事实：挪威海峡上的渔船有时航行得很缓慢，原因是这些船只会在海峡的淡水和下面较重的海水之间的水下际面上产生内波. 与所产生的波的周期相比,盐发生显著的扩散的时间是非常长的. 因此,我们可以假设，每团流体在运动时保持其密度不变. 这种不可压缩性假设在形式上可写作

$$\frac{\partial \delta(\mathbf{A}, t)}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

式中，$\delta(\mathbf{A}, t)$ 是初始位于 $\mathbf{A}$ 的水微团在时间 t 时的密度. 读者应该把(1)式与均匀密度的假设

$$\delta(\mathbf{A}, t) = \text{常数} \tag{2}$$

加以对比，而后者对本问题是不适合的。

在15.2节中，我们要讨论密度随高度而变的各层不可压缩流体之间的波。在这里我们仅仅希望考察如何把(1)式那样的方程从物质变量变换成空间变量。我们将得到一个公式，它不仅对内密度波是基本的，而且对连续介质的总的表述来说也是基本的。

在动手之前，读者应该复习一下连锁法则(附录13.1)。仔细地利用这个附录中讨论的符号对于确实理解下文的内容是必不可少的。

我们记得，采用空间变量时，我们用 $\rho(\mathbf{x}, t)$ 表示密度，因而犹如(2.3)和(2.4)式那样

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, t) &= \delta[\mathbf{A}(\mathbf{x}, t), t], \\ \delta(\mathbf{A}, t) &= \rho[\mathbf{x}(\mathbf{A}, t), t], \end{aligned} \tag{3}$$

采用物质变量时，密度用 $\delta(\mathbf{A}, t)$ 描述。当我们计算 δ 对 t 的偏导数时，我们把初始位置 $\mathbf{A}$ 看作是固定的。另一方面，当我们计算用空间变量描述的密度 $\rho(\mathbf{x}, t)$ 这样一个量的偏导数时，我们把空间位置 $\mathbf{x}$ 看作是固定的。因为 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{x}$ 有关，就可以用连锁法则把这两个导数联系起来。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta(\mathbf{A}, t)}{\partial t} = \left.\frac{\partial \rho}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{A},t)} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \left.\frac{\partial \rho}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{A},t)} \frac{\partial x_2}{\partial t} \\ + \left.\frac{\partial \rho}{\partial x_3}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{A},t)} \frac{\partial x_3}{\partial t} \\ + \left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{A},t)}. \end{aligned} \tag{4}$$

像在(2.5)式中那样，在 $(\mathbf{A}, t)$ 处计算 $\partial x_i/\partial t$ 就是 $V_i(\mathbf{A}, t)$，即用物质变量表示的第 i 个速度分量；$i = 1, 2, 3$。我们的目的在于求出(4)式左端在空间坐标下的表达式，为了得到这个表达式，我们必须作替换 $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$，这就得到

$$\left.\frac{\partial \delta(\mathbf{A}, t)}{\partial t}\right|_{\mathbf{A}=\mathbf{A}(\mathbf{x},t)}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} v_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \tag{5}$$

其中我们用了关系

$$V_i(\mathbf{A}, t)\Big|_{\mathbf{A}=\mathbf{A}(\mathbf{x},t)} = v_i(\mathbf{x}, t). \tag{6}$$

符号 D/Dt 经常用来表示出现在(5)式左端的物质导数或实质导数. 由此我们得到

$$\frac{\partial \delta(\mathbf{A}, t)}{\partial t}\Big|_{\mathbf{A}=\mathbf{A}(\mathbf{x},t)} \equiv \frac{D\rho(\mathbf{x}, t)}{Dt} \tag{7}$$

$$\frac{D\rho(\mathbf{x}, t)}{Dt} = \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \rho(\mathbf{x}, t). \tag{8}$$

读者完全理解(7)和(8)式的意义，这是很重要的. 请记住，函数 $\partial\delta(\mathbf{A}, t)/\partial t$ 给出了初始位置在 $\mathbf{A}$ 处的微团的密度随时间的改变率. 如果在前面提到的 $\mathbf{A}$ 和 t 的函数中，作替代 $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$,那末就可以得到 $\mathbf{x}$ 和 t 的函数. 这就给出了现在位于 $\mathbf{x}$ 处的微团的密度随时间的改变率. 有了(8)式,(7)式的右端就是一个可以计算得到的 $\mathbf{x}$ 和 t 的函数. 因此，当全部变量都参照空间坐标时,由(7)和(8)式就可以计算出微团密度的变化率. 我们看到，这种计算需要密度 $\rho(\mathbf{x}, t)$ 和速度 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ 的空间描述方面的知识. 我们注意到，用空间变量来表示时不可压缩性条件为 $D\rho/Dt = 0$. 满足这个条件的运动有时称之为等容的.

在整个讨论中,仅仅为了具体起见,我们才采用密度这个应变量. 对于任何应变量，物质导数告诉我们的是某给定微团的这个量随时间的变化率. 于是,我们来给一个重要的示例,如果 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ 表示位于 $\mathbf{x}$ 的微团在时间 t 时的速度,那末 $D\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)/Dt$ 就表示位于 $\mathbf{x}$ 的这个微团在时间 t 时的加速度. 这就是说

$$\frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{A}, t)}{\partial t}\Big|_{\mathbf{A}=\mathbf{A}(\mathbf{x},t)} = \frac{D\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{Dt};$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{\partial t}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}. \tag{9}$$

$D\mathbf{v}/Dt$ 的第 i 个分量为下列公式给出

$$\frac{Dv_i}{Dt}=\frac{\partial v_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

我们通过谨慎地应用相当标准的数学推导了重要公式 (7) 和 (8). 完成了这一步以后,我们用一种不甚细致但却可能更好地阐明其物理意义的方法来重新考究物质导数.

一个微团密度的时间变化率是下述两种效应引起的

(a) 在空间坐标 $\mathbf{x}$ 处密度随时间而改变.

(b) 在时间 t 时微团会从物质的另一部分到达 $\mathbf{x}$ 处, 因而即使是定常运动

$$\frac{\partial\rho(\mathbf{x},t)}{\partial t}\equiv 0,$$

也能有密度的变化.

效应(a)显然由(9)式的第一项给出. 现在我们来证明, 效应(b)由这个式子的第二项给出.

在很短的时间间隔 $(t, t+\Delta t)$ 内, 时间 t 时位于 $\mathbf{x}$ 处的微团移动的一段距离近似地为 $|\mathbf{v}(\mathbf{x},t)|\Delta t$ 这个运动(近似地)位于单位矢量 $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)/|\mathbf{v}(\mathbf{x},t)|$ 的方向,(在某固定时间)在这个方向的单位长度上 ρ 的改变为 $(\mathbf{v}/|\mathbf{v}|)\cdot\nabla\rho$[1]. 由于微团经过距离 $|\mathbf{v}|\Delta t$ 而引起的 ρ 的改变是所运动的距离与单位距离上的改变率之乘积,即

$$(|\mathbf{v}|\Delta t)\cdot\left(\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\cdot\nabla\rho\right)=(\mathbf{v}\cdot\nabla\rho)\Delta t,$$

这就是微团的密度在时间 Δt 内的改变. 为了求得单位时间的改变,我们必须用 Δt 来除它,这就给出了所需的结果.

---

1) 我们记得,一个函数的方向导数可用函数的梯度与恰当方向上的单位矢量的标量积求得.

练　　习

1. 假设 $\rho(\mathbf{x},t)=x_1+x_2\sin t; x_1=A_1+t, x_2=A_2+t^2, x_3=0.$ 试直接计算这些式子的两端，证明此情况下 (8) 式成立. [求 $\delta(\mathbf{A},t)$；计算 $\partial\delta(\mathbf{A},t)/\partial t$；等等]

2. (a) 证明由

$$x=A+\varepsilon\sin\omega t,\quad y=B\quad(\varepsilon\text{和}\omega\text{是常数})$$

给出的流动并不是定常流，试描述这种流动.

(b) 如果密度为 $\rho(x,t)=\rho_0/(1+x^2)$，计算 $D\rho/Dt$.

3. 考察下列二维运动，对于某些常数 ω，它的物质描述为

$$x_1=A_1\cos\omega t-A_2\sin\omega t,$$

$$x_2=A_1\sin\omega t+A_2\cos\omega t.$$

(a) 在空间坐标下证明，速度 $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ 为

$$\mathbf{v}=-\omega x_2\mathbf{i}+\omega x_1\mathbf{j}$$

因此流动是定常的.

(b) 证明微团的轨迹为绕原点的一些圆.

(c) 计算时间 t 时的流线，从而证明它们与微团的轨迹相重合.

(d) 求 $\mathbf{V}(\mathbf{A},t)$ 并证明(9)式.

4. 在欧拉描述中，一个流动由定常速度场

$$v_1=2x_1+3x_2,\quad v_2=x_1-x_2,\quad v_3=0$$

给出.

(a) 求相应的拉格朗日描述.

(b) 画出运动中某个时间通过点 $x_1=2$，$x_2=0$ 的微团的轨迹，注意所有这些微团都具有相同的轨迹，因为流动是定常的.

(c) 求瞬时位于(3,4)处的微团的加速度. 虽然流动是定常的，但解答并不为零，试对这一事实作出解释.

5. 令 $x_1=A_1\exp t$，$x_2=A\exp(-t)$ (与13.2节例1相同). 用下列两种方法证明 $\rho(\mathbf{x},t)\equiv x_1x_2$ 是不可压缩运动的密度:

(a) 用计算 $D\rho(\mathbf{x}, t)/Dt$ 的方法.

(b) 用计算 $\partial\delta(\mathbf{A}, t)/\partial t$ 的方法.

13.4 雅可比及其物质导数

利用 $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{A}, t)$ 引进了运动连续介质的物质描述以后,我们就能精确地知道,时间 t 时物质的某个给定部分占据着区域 $R(t)$. 如若我们给定了某个时刻(比如 $t=0$)该部分物质的位置,那末我们便规定了这部分物质,用 $R(0)$ 表示被指定的这部分物质在时间 $t=0$ 时所占据的区域. 然后用 $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{A}, t)$ 来描述任何点 $\mathbf{x}$ 在以后的运动,那末,用数学语言来说,被指定的物质在时间 t 时所占据的区域 $R(t)$ 就是时间 t 时在映象 $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{A}, t)$ 下 $R(0)$ 的象. 用更日常用的语来说,这就是,如果在时间 t 时,对于 $R(0)$ 中的一点 $\mathbf{A}$,有 $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{A}, t)$,那末点 $\mathbf{x}$ 便在 $R(t)$ 中.

如果 $\mathscr{V}(t)$ 代表 $R(t)$ 的体积,那末

$$\mathscr{V}(0)=\iiint\limits_{R(0)} dA_1 dA_2 dA_3$$

和

$$\mathscr{V}(t)=\iiint\limits_{R(t)} dx_1 dx_2 dx_3. \tag{1a,b}$$

虽然任何字母都可以用来表示积分(1)中的三个形式变量,但是下列用法可作参考,在(1a)中用初始变量 A_1, A_2, A_3,在(1b)中用与时间 t 有联系的变量 x_1, x_2, x_3. 在(1b)中我们可以把积分变数改变为 A_1, A_2, A_3,其中 $\mathbf{A}=\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$. 按照雅可比法则

$$\mathscr{V}(t)=\iiint\limits_{R(0)} J(A_1, A_2, A_3, t)\, dA_1\, dA_2\, dA_3, \tag{2}$$

式中雅可比可用下列行列式来定义:

$$J(A_1, A_2, A_3, t)\equiv\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(A_1, A_2, A_3)}$$

$$
=\begin{vmatrix}
\frac{\partial x_1}{\partial A_1} & \frac{\partial x_1}{\partial A_2} & \frac{\partial x_1}{\partial A_3} \\
\frac{\partial x_2}{\partial A_1} & \frac{\partial x_2}{\partial A_2} & \frac{\partial x_2}{\partial A_3} \\
\frac{\partial x_3}{\partial A_1} & \frac{\partial x_3}{\partial A_2} & \frac{\partial x_3}{\partial A_3}
\end{vmatrix}.
$$

J 上不需要加绝对值符号，因为 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{A}$ 的分量都是在右手坐标系中来确定的.

利用积分中值定理（附录 13.2），我们看到对于 $R(0)$ 中的某点 $(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3)$，(2)式意味着，

$$
\begin{aligned}
\mathscr{V}(t) &= J(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, t)\iiint\limits_{R(0)} dA_1\,dA_2\,dA_3 \\
&= J(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, t)\mathscr{V}(0). \qquad (3)
\end{aligned}
$$

现在，我们希望在 R 绕固定点 (A_1, A_2, A_3) 连续"收缩"时来考察(3)式. 为了使这一思想确切些，让我们把(3)式应用于相似区域 $R_n(0)$ 序列中的每一个，$R_n(0)$ 的体积 $\mathscr{V}_n(0)$ 随 $n\to\infty$ 而趋向于零.（粗略地讲，"相似"意味着"具有相同的形状"，但是，我们要几次使用的这个相似性的概念，将在附录 13.3 中把它弄确切）. 每一个区域 R_n 都需要包含固定点 (A_1, A_2, A_3). 根据(3)式

$$
\mathscr{V}_n(t) = J(\bar{A}_1^{(n)}, \bar{A}_2^{(n)}, \bar{A}_3^{(n)})\cdot\mathscr{V}_n^{(0)};
$$
$$
\bar{A}^n \in R_n; \quad n = 1, 2, 3, \cdots
$$

但是，因为 R_n 相似，并且体积越来越小，所以如在附录 13.3 中所证明，

$$
\lim_{n\to\infty}(\bar{A}_1^{(n)}, \bar{A}_2^{(n)}, \bar{A}_3^{(n)}) = (A_1, A_2, A_3).
$$

因此，如果 J 在 (A_1, A_2, A_3) 连续，那末

$$
\lim_{\mathscr{V}_n(0)\to 0}\frac{\mathscr{V}_n(t)}{\mathscr{V}_n(0)} = J(A_1, A_2, A_3, t). \qquad (4)
$$

从几何的角度而不是从精确的意义上来看，我们可以说，时间 t 时

在 **A** 点的雅可比，代表着初始位于 **A** 的一个无穷小体积的膨胀系数，这里膨胀率为时间 t 时物质微元的区域所占据的体积与它的初始体积之比. 我们能够象 (4) 式那样用与所使用的具体坐标系统无关的方式描述雅可比，这就证实了后者的重要性.

在以后的工作中，我们经常需要 $\partial J(A, t)/\partial t$ 的表达式，即膨胀系数[1]的变化速率的表达式. 我们现在将就二维情况用直接的方式得到这个表达式，而三维情况将留作一个练习. 用笛卡儿张量作为工具可以给出一种简洁而精巧的推导方法（第 II 卷 1.2 节例 3).

我们将用下列公式作为行列式的导数

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} A(t) & B(t) \\ C(t) & D(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{dA}{dt} & \dfrac{dB}{dt} \\ C & D \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & B \\ \dfrac{dC}{dt} & \dfrac{dD}{dt} \end{vmatrix}, \tag{5}$$

这个式子是读者很容易证明的，利用 (5) 式，并让初始坐标 A_1 和 A_2 保持不变，我们就得到雅可比对时间的偏导数的表达式如下

$$\frac{\partial J(A_1, A_2, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial A_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial A_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial A_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial A_2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial V_1}{\partial A_1} & \dfrac{\partial V_2}{\partial A_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial A_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial A_2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial A_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial A_2} \\ \dfrac{\partial V_2}{\partial A_1} & \dfrac{\partial V_2}{\partial A_2} \end{vmatrix}, \tag{6}$$

我们已用了(2.5)式的结果 $\partial \mathbf{x}/\partial t = \mathbf{V}$. 我们也假定了 x_1 和 x_2 是二次连续可微的，因此微商的次序可以交换. 例如，

---

1) 有些作者把膨胀系数定义为 $[\mathscr{V}_n(t) - \mathscr{V}_n(0)]/\mathscr{V}_n(0)$ 的极限. 无论用这个定义还是用式(4)，$\partial J/\partial t$ 总是给出膨胀系数的改变速率.

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x_1}{\partial A_1}=\frac{\partial}{\partial A_1}\frac{\partial x_1}{\partial t}=\frac{\partial V_1}{\partial A_1}.$$

按照连锁法则，(6)式右端的两个行列式中的第一个就可以写作

$$\begin{vmatrix} \left.\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right|\frac{\partial x_1}{\partial A_1}+\left.\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right|\frac{\partial x_2}{\partial A_1} & \left.\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right|\frac{\partial x_1}{\partial A_2}+\left.\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right|\frac{\partial x_2}{\partial A_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial A_1} & \frac{\partial x_2}{\partial A_2} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

在(7)式中，我们用垂直线表示在 $\partial v_1/\partial x_1$ 和 $\partial v_1/\partial x_2$ 中 $\mathbf{x}$ 必须用 $\mathbf{A}$ 和 t 来表示.

为了用一种可以普遍化的方法得到最终的简化，我们注意到(7)式可以写作两个行列式的和.

$$\begin{vmatrix} \left.\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right|\frac{\partial x_1}{\partial A_1} & \left.\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right|\frac{\partial x_2}{\partial A_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial A_1} & \frac{\partial x_2}{\partial A_2} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \left.\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right|\frac{\partial x_2}{\partial A_1} & \left.\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right|\frac{\partial x_2}{\partial A_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial A_1} & \frac{\partial x_2}{\partial A_2} \end{vmatrix}. \tag{8}$$

(8)式的第两个行列式为零,因为它等于 $\partial v_1/\partial x_2$ 与两个列向量相等的行列式之积. 于是(6)式右端的第一个行列式简化为 $(\partial v_1/\partial x_1)J$. 类似地,(6)式右端的第两个行列式简化为 $(\partial v_2/\partial x_2)J$,并得到

$$\frac{\partial J(A_1, A_2, t)}{\partial t}=\left.\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{A},t)}J(A_1, A_2, t). \tag{9a}$$

类似的计算(练习 3)得到三维的结果

$$\frac{\partial J(A_1, A_2, A_3, t)}{\partial t}$$
$$=\left.\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{A},t)}J(A_1, A_2, A_3, t). \tag{9b}$$

如果我们作替代 $\mathbf{A}=\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ [即如果我们把(9)式写成空间变量的形式],并利用 $\nabla\cdot\mathbf{v}$ 的定义,我们得到欧拉膨胀公式

$$\frac{DJ[\mathbf{A}(\mathbf{x}, t), t]}{Dt}=(\nabla\cdot\mathbf{v})J[\mathbf{A}(\mathbf{x}, t), t]. \tag{10}$$

如果写成如下的形式,(9)和(10)式看起来就比较简单.

$$\text{用物质变量:}\quad \frac{\partial J}{\partial t} = [(\nabla \cdot \mathbf{v})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{A},t)}]J. \tag{11}$$

$$\text{用空间变量:}\quad \boxed{\frac{DJ}{Dt} = (\nabla \cdot \mathbf{v})J}. \tag{12}$$

我们强调指出,散度 $\nabla \cdot$ 所需的导数是对空间变量的.

读者可以把欧拉展开公式(11)式或(12)式中任选一个来记忆,也可把它当作雅可比的导数是速度的散度乘以雅可比来记忆.然而在实际使用欧拉公式时,除非象(9)和(10)式中那样直接保留了独立变量,否则我们就会感到困惑.

练　　习

1. (a) 举出一个具有如下性质的区域序列 (R_n) 的例子:

(i) A 和 B 都是每个区域 R_n 中间(与 n 无关的)不同的固定点,其中 $n=1, 2, \cdots$.

(ii) 当 $n \to \infty$ 时, R_n 的体积趋向于零.

2. 利用归纳法把(5)式推广为适用于 $n \times n$ 阶行列式的结果.

3. 把课文中给出的证明加以推广,以使(10)式适用于三维情况 $J = J(A_1, A_2, A_3, t)$.

4. 计算二维运动的雅可比,并在下列情况下证明(12)式

(a) $x_1 = A_1 \exp t$, $x_2 = A_2 \exp(-t)$, $x_3 = A_3$,

(b) $x_1 = A_1^{1/2} \exp t$, $x_2 = A_2 \exp(-t)$, $x_3 = A_3$.

5. 用直接计算证明,对于练习 3.3 所示出的运动, $\partial(x_1, x_2)/\partial(A_1, A_2) = 1$. 这个结果的意义是什么?

附录 13.1　关于偏导数的连锁法则

在连锁法则的所有的简单应用中,如果要避免混乱,小心地使用符号是很重要的,我们用一个例子来示明这一点.

假定已知某个变量是笛卡儿坐标 x, y 的一个函数. 为了确定起见,让我考虑某物体 B 的温度. 在目前的讨论中,我们将用符号 $T = T(x, y)$.

假定引进极坐标(r, θ)于是

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

用 $\tau(r, \theta)$ 表示在极坐标中 B 的温度,则我们有

$$\begin{aligned} \tau(r, \theta) &= T[x(r, \theta),\ y(r, \theta)], \\ T(x, y) &= \tau[r(x, y),\ \theta(x, y)]. \end{aligned} \tag{1}$$

例如,如果

$$T(x, y) = x^2 + \sin y, \tag{2}$$

那末引进极坐标,我们便得到

$$\tau(r, \theta) = r^2\cos^2\theta + \sin(r\sin\theta). \tag{3}$$

注意

$$T(r, \theta) = r^2 + \sin\theta \neq \tau(r, \theta). \tag{4}$$

如果我们希望得到 $\partial\tau/\partial\theta$,那末可以这样来使用连锁法则:

$$\frac{\partial\tau}{\partial\theta} = \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{\substack{x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta}} \cdot \frac{\partial x}{\partial\theta} + \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{\substack{x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta}} \cdot \frac{\partial y}{\partial\theta}. \tag{5}$$

符号是明确的. 例如,既然 T 是 x 和 y 的函数,那末 y 在计算 $\partial T/\partial x$ 时就保持常数. 与垂直线相联系的方程表明在计算 $\partial T/\partial x$ 以后,我们应该用 $r\cos\theta$ 代替 x,用 $r\sin\theta$ 代替 y. 于是(5)式变为

$$\begin{aligned} \frac{\partial\tau}{\partial\theta} &= 2x\Big|_{\substack{x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta}}(-r\sin\theta) + \cos y\Big|_{\substack{x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta}}(r\cos\theta) \\ &= -2r^2\sin\theta\cos\theta + \cos(r\sin\theta)\cdot r\cos\theta. \end{aligned}$$

当然,也可以直接从(3)式得到同样的结果.

微积分的书中给出了连锁法则的证明,但是,有时并不注意象 $T(r, \theta)$ 和 $\tau(r, \theta)$ 这些表达式之间的区别. 这些书在讨论某些象连锁法则这样的课题时,在这些常用的函数符号中作了隐含的改变,当 r 和 θ 用作 T 的宗量时,那时 T 代表(3)式中我们称为 τ 的函数. 当 x 和 y 用作宗量时,就意味着原始函数(2)式. 因此,符号 T 是含糊的. 在我们的工作中,这种含糊会导致混乱.

练　　习

1. 推导附录 14.1 练习 2 中所需要的下列方程

$$\frac{\partial\Theta}{\partial V}+\Theta\frac{\partial P}{\partial E}-P\frac{\partial\Theta}{\partial E}=0\quad(V,E\text{ 是自变量}),\qquad(6)$$

式中 V 是一个系统的体积，Θ 是它的温度，E 是它的内能，P 是它的压力．这些变量中任何两个都可看作应变量，而另外两个则可看作是自变量．证明对于自变量的其他五种选择，上述关系意味着

$$\Theta-P\left(\frac{\partial\Theta}{\partial P}\right)+\frac{\partial(\Theta,E)}{\partial(V,P)}=0\quad(V,P\text{ 是自变量}),\qquad(7)$$

$$\frac{\partial E}{\partial V}-\Theta\frac{\partial P}{\partial\Theta}+P=0\qquad(V,\Theta\text{ 是自变量}),\qquad(8)$$

$$\frac{\partial E}{\partial P}+\Theta\frac{\partial V}{\partial\Theta}+P\frac{\partial V}{\partial P}=0\qquad(V,P\text{ 是自变量}),\qquad(9)$$

$$\Theta\frac{\partial(P,V)}{\partial(\Theta,E)}-P\frac{\partial V}{\partial E}-1=0\qquad(\Theta,E\text{ 是自变量}),\qquad(10)$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial P}-\Theta\frac{\partial V}{\partial E}-P\frac{\partial(V,\Theta)}{\partial(E,P)}=0\quad(P,E\text{ 是自变量}).\qquad(11)$$

做这一工作的一个较好办法如下．首先考虑一个一般变量的改变，而后再去专门研究所有的特殊情况．利用新的自变量 x 和 y 去改写(6)式，并且用

$$\Theta[E(x,y),\ V(x,y)]=\bar{\Theta}(x,y)$$

定义 $\bar{\Theta}(x,y)$.

我们记得连锁法则的结果是

$$\bar{\Theta}_x=\Theta_E E_x+\Theta_V V_x,\qquad\bar{\Theta}_y=\Theta_E E_y+\Theta_V V_y.$$

把 Θ 表示为下列雅可比的商:

$$\Theta_E=\frac{\partial(\Theta,V)/\partial(x,y)}{\partial(E,V)/\partial(x,y)}.$$

求出关于 Θ_V 和 P_E 的类似的表达式．相继让 (x,y) 与式(7)—式(11)的各自变量对相等，就可以继续进行下去．

注评．(7)—(11)式已写成了通常的符号，例如，其中没有在作为P和V的函数或作为P和Θ的函数的内能之间加以区分．

†2. 采用(1)式的符号，再利用连锁法则，用$\tau(r,\theta)$及其导数表示

$$\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right]_{x=r\cos\theta,\,y=r\sin\theta}.$$

†3. 练习2要求把拉普拉斯算符变换为极坐标．用$\tau(\rho,\phi,\theta)$及某导数采用下列三种可能性，把

$$\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right]_{x=\rho\sin\phi\cos\theta,\ y=\rho\sin\phi\sin\theta,\ z=\rho\cos\phi}$$

变换为球坐标．

(a) 用完全一般化的方法来做这个题目(这是一个相当冗长的计算)．

(b) 假定$\partial/\partial\phi\equiv 0$．

(c) 假定$\partial/\partial\phi\equiv\partial/\partial\theta\equiv 0$．

附录13.2 积分中值定理

定理 设R为三维空间中具有体积V的一个连通封闭有界区域，$0<V<\infty$，令f在R上连续，并用m和M表示$f(\mathbf{x})$在R中对$\mathbf{x}$的极大和极小值．那末在R中存在着一个点$\tilde{\mathbf{x}}$，有

$$\iiint_R f(\mathbf{x})d\tau=f(\tilde{\mathbf{x}})\cdot V \tag{1}$$

证明 从三重积分作为一个求和极限的定义可以得到，

$$\iiint_R m d\tau\leqslant\iiint_R f(\mathbf{x})d\tau\leqslant\iiint_R M d\tau,$$

因而，

$$mV\leqslant\iiint_R f(\mathbf{x})d\tau\leqslant MV$$

或

$$m \leqslant V^{-1} \iiint_R f(\mathbf{x}) d\tau \leqslant M. \tag{2a, b}$$

因为在一个有界闭域上定义的连续函数是有界的，并在这个区域上达到它的上确界和下确界，因此在 R 中存在着点 $\mathbf{x}^{(m)}$ 和 $\mathbf{x}^{(M)}$ 满足

$$f(\mathbf{x}^{(m)}) = m, \quad f(\mathbf{x}^{(M)}) = M.$$

连通性假设保证在 R 中存在着连接 $\mathbf{x}^{(m)}$ 和 $\mathbf{x}^{(M)}$ 点的空间曲线 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$，它满足

$$\mathbf{x}(t^{(m)}) = \mathbf{x}^{(m)}, \quad \mathbf{x}(t^{(M)}) = \mathbf{x}^{(M)};$$

$$\text{对于 } t^{(m)} \leqslant t \leqslant t^{(M)}, \quad \mathbf{x}(t) \text{ 在 } R \text{ 中}.$$

因为 $f[\mathbf{x}(t)]$ 是参数 t 的连续函数，因此按照中介值定理它必须取 m 和 M 之间的一切值．特别是，根据 (2b) 式，存在着 $t^{(m)}$ 和 $t^{(M)}$ 之间的一个参数值 $\tilde{t}$ 使得

$$f[\mathbf{x}(\tilde{t})] = V^{-1} \iiint_R f(\mathbf{x}) d\tau. \tag{3}$$

从(3)式和定义 $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(\tilde{t})$ 可以立即得到结论(1)式 □

注意，仅需在证明的语句中稍作改变就可以证明积分中值定理适用于 m 维空间中的 n 维连通有界闭区域；$n < m$，$m = 1, 2, \cdots$．如果 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 是 x 的一个矢量函数，那末 (1) 式显然适用于 $\mathbf{F}$ 的每一个分量 F_i．对于每个分量存在着一个不同的点 $\tilde{\mathbf{x}}$.

附录 13.3　相似区域

在本附录中，我们将概略地推导“星形”区域的某些有用的性质．然后推广到这种区域的并集中去．

定义 1　如果有一个闭域空间 R 的内点（称为 O），可以用位于 R 之内的直线把 R 的每一点连接起来，那末 R 便称之为星形的．图 13.3 示出了一个平面星形区域及一个可能的点 O.

如果我们选择 O 作为原点，那末 R 便可利用球坐标 (ρ, ϕ, θ) 及关系式

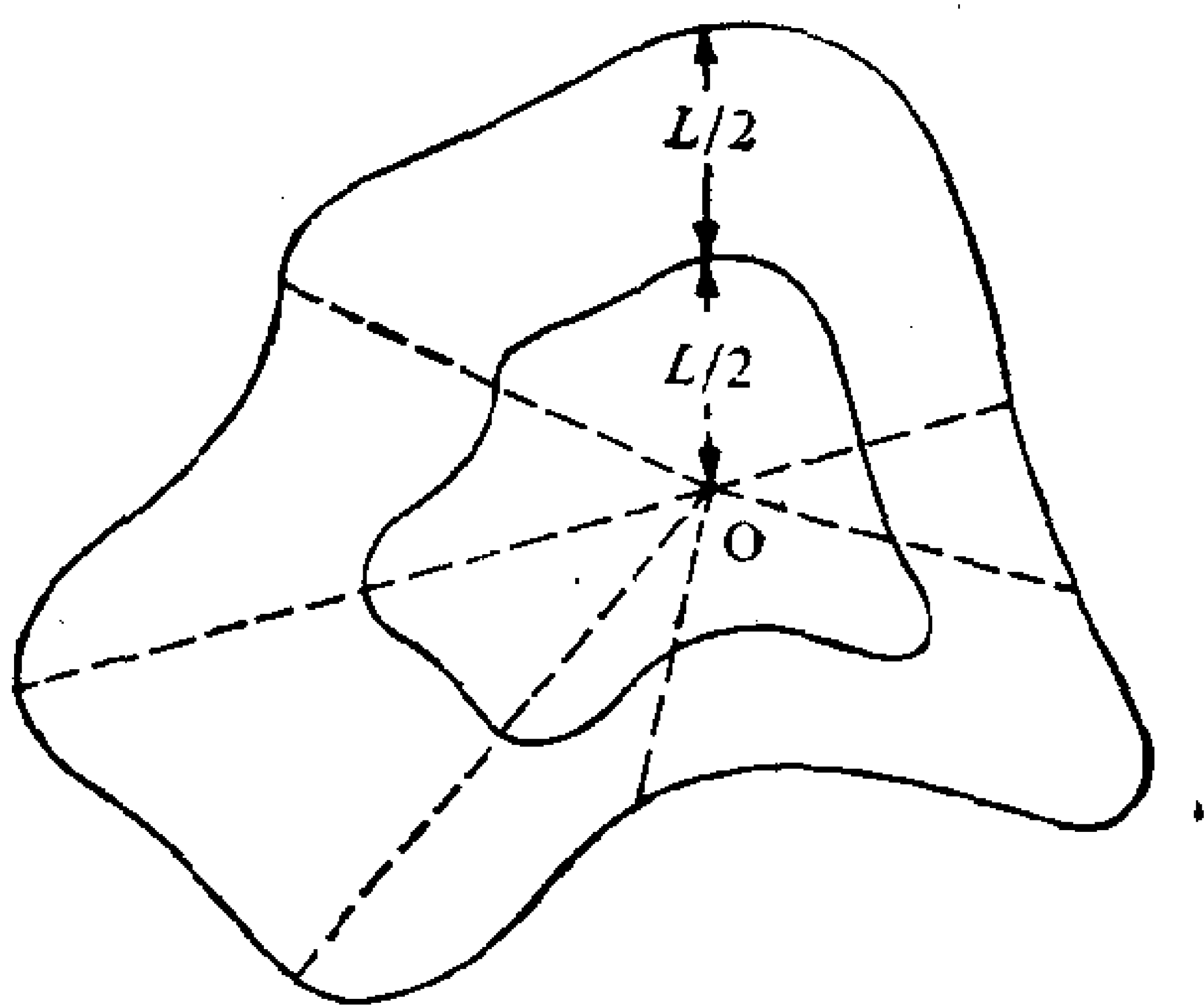


图 13.3　平面星形区域．内区域与外区域是相似的

$$0 \leqslant \rho \leqslant f(\phi,\theta),\quad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi,\quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

来描述．（坐标 ρ 仅仅给出了从点 O 到 R 中的已知点之间的连线的距离.）我们将假设 f 是连续和逐段连续可微的，并且 $f(\phi, 0)=f(\phi, 2\pi)$.

定义 2　如果两个星形区域 $R^{(1)}$ 和 $R^{(2)}$ 经过可能的转动和平移后，可以用下列方程

$$0 \leqslant \rho \leqslant f^{(i)}(\phi,\theta),\quad i=1,2,\tag{1}$$

来描述，式中对于正常数 L，有 $f^{(2)}=Lf^{(1)}$（图 13.3），那末 $R^{(1)}$ 和 $R^{(2)}$ 便称为是相似的

我们现在来证明，相似的星形区域 $R^{(i)}$ 的体积 $V[R^{(i)}]$ 和面积 $S[R^{(i)}]$ 之比分别为 L^3 和 L^2.

定理 1　$V[R^{(2)}]=L^3V[R^{(1)}]$.

证明　利用球坐标下体积的公式，我们得到

$$\begin{aligned}V[R^{(2)}] &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{f^{(2)}(\phi,\theta)} \rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}[f^{(2)}(\phi,\theta)]^3\sin\phi\, d\phi\, d\theta,\end{aligned}\tag{2}$$

根据关系 $f^{(2)}=Lf^{(1)}$ 定理立即得证．□

定理 2

证明　利用 (1)，如果一点 $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$ 在边界 $R^{(i)}$ 上，

那末它就可以用关系 $\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(i)}$ 来描述，其中：

$$x_1^{(i)}=f^{(i)}(\phi,\theta)\sin\phi\cos\theta,$$
$$x_2^{(i)}=f^{(i)}(\phi,\theta)\sin\phi\sin\theta,\tag{3}$$
$$x_3^{(i)}=f^{(i)}(\phi,\theta)\cos\phi.$$

我们把(3)式称之为边界面的参数表达式，利用表面积的适当的近似公式，我们可写出[1)]

$$S[R^{(i)}]=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\partial\mathbf{x}^{(i)}}{\partial\phi}\Lambda\frac{\partial\mathbf{x}^{(i)}}{\partial\theta}\right|d\phi d\theta.\tag{4}$$

由关系 $\mathbf{x}^{(2)}=L\mathbf{x}^{(1)}$ 立即得到所要证明的结果. □

另一个将证明是很有用的结果涉及到一系列互相相似的星形区域 $R^{(n)}$

$$R^{(n)}:\ \rho\leqslant f^{(n)}(\phi,\theta),\quad f^{(n)}=L_nf^{(1)};\quad n=1,2,3,\cdots\tag{5a,b}$$

令 D_n 为 $R^{(n)}$ 中两点之间的最大距离.

定理 3

当 $n\to\infty$ 时，当且仅当 $D_n\to 0$, $V[R^{(n)}]\to 0$. (6)

证明 利用定理 1, $V[R^{(n)}]=L_n^3V[R^{(1)}]$, 因而当且仅当 $L_n\to 0$ 时, $V[R^{(n)}]\to 0$. 利用 (5b), 当且仅当 $f^{(n)}\to 0$ 时, $L_n\to 0$. 这就是说

当且仅当 $\rho_{\max}^{(n)}\to 0$ 时, $V[R^{(n)}]\to 0$, (7)

式中

$$\rho_{\max}^{(n)}=\max_{\substack{0\leqslant\phi\leqslant\pi\\0\leqslant\theta\leqslant2\pi}}f^{(n)}(\phi,\theta).$$

[因为 $f^{(n)}(\phi,\theta)$ 在有界闭区域 $0\leqslant\phi\leqslant$, $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$ 中是连续的，所以 $\rho_{\max}^{(n)}$ 的存在是得到保证的.]不难证明(练习 2),

$$\rho_{\max}^{(n)}\leqslant D_n\quad 和\quad D_n\leqslant 2\rho_{\max}^{(n)}\tag{8a,b}$$

由(7)和(8)式定理得证. □

定理 4 对于有限个星形区域的并集所构成的区域，以上三个定理都成立.

---

1) 由于经常使用符号 x，为了避免混淆，我们采用尖角符号 Λ 来表示矢积.

证明 留给读者去做.

练　　习

1. (a) 利用极坐标定义平面星形区域.

   (b) 试证明在本节所用的意义上"相似三角形"是相似的.

   (c) 叙述并证明适合于平面星形区域的本节的四个定理的形式.

†2. (a) 试证明(8b).

   (b) 试证明(8a).

3. 试证明,对于互相相似的区域族 $R^{(n)}$

$$V[R^{(n)}] = \lambda_R L_n^3, \quad S[R^{(n)}] = \mu_R L_n^2,$$

式中 λ_R 和 μ_R 与 n 无关.(这个结果将在 14.2 节使用.)

4. 对于星形区域的并集所构成的区域,试表述并证明:

   (a) 定理 1

   (b) 定理 2(注意相应的区域必须在应该加以说明的意义上"局部相似").

   (c) 定理 3.

第十四章　连续介质力学的场方程

在本章中，我们仔细推导约束任何连续介质行为的**场方程**. 这些方程表示质量守恒，线动量、角动量和能量的平衡. 此外还有吉布斯关系，这些关系把热流与熵和温度联系起来，把所做的功与压力和体积联系起来. 最后，还有一个熵的不等式.

只考虑"普通"的力学效应，将忽略电效应、磁效应和化学效应.

在本章的最后一节中，我们简短地讨论一下本书其余部分将要充分加以讨论的一个课题，即区别不同介质的不同的本构方程. 重要的是记住如果用一种新的坐标系的话，这些方程(事实上是所有物理上有意义的方程) 在本质上不应该是不同的. 虽然只是在第II卷中才对这个问题作充分的讨论，但我们仍作了简要的论述. 我们将以关于连续模型正确性的一点附带评述作为结语.

14.1　质量守恒

连续介质力学基本方程的推导并非一件易事. 在得到真正的理解之前必须刻苦学习，虽然对某个课题来说，仔细考虑一种以上的方法起初可能会引起混乱，不过，尽管如此，我们将提出四种方法来推导质量守恒方程. 考虑这四种方法的优缺点，将使读者更深刻地理解表述描述自然过程的方程时所涉及的问题. 我们的目的并不是为使用熟知的方程去辨解，而是设法进行一种能使严格的人也满意的推导. 因此我们希望帮助那些将来有时会要去推导以前尚未用数学语言表述过的现象的基本方程的读者.

第一种方法首先对任何物质区域作出关于质量守恒的陈述. 在技术上，推导的中心内容是在运动着的物质区域上去计算一个积分的时间导数. 最后，证明在一个任意区域上的体积分等于零.

所希望的微分方程是用 Dubois-Reymond 引理得到的。

第二种方法应用了散度定理，它的基础是，对于任意空间区域作出质量守恒的陈述。第三和第四种方法是基于对固定的长方匣要求质量守恒得到的，对于第三种方法，匣子是无穷小的；而第四种方法则用积分中值定理避免了有启发性的但却是危险的无限小的运算。

积分方法：任意物质区域

13.4 节给出下述概念的一种精确的表征，即时间 t 时某给定的一部分物质充满着区域 $R(t)$。某部分物质的质量并不随时间的增加而改变，这是叙述质量守恒含意的一种方法。因此，我们假定

$$\frac{d}{dt}\iiint_{R(t)} \rho(x_1, x_2, x_3, t)dx_1\,dx_2\,dx_3 = 0, \quad R(t)\text{ 任意} \tag{1}$$

式中 $\rho(\mathbf{x}, t)$ 表示时间 t 时点 $\mathbf{x}$ 处的密度。

因为 (1) 式在任意物质区域 $R(t)$ 上都成立，所以利用 **Dubois-Reymond 引理**，我们可以把它变成一个比较易于处理的微分形式的方程。

假定对于区域 D 中所包含的每个区域 R，有

$$\iiint_R f(\mathbf{x})dx_1\,dx_2\,dx_3 = 0. \tag{2}$$

如果 $f(\mathbf{x})$ 在 D 中对 $\mathbf{x}$ 连续，那末对于 D 中的 $\mathbf{x}$ 则有 $f(\mathbf{x}) \equiv 0$.

在 4.1 节给出了简单的证明

如同(2)式所要求的那样，为了把导数符号放到 (1) 式的积分号里面去，我们将用物质描述 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{A}, t)$ 把式(2)变换成初始坐标 A。因此积分区域也不再与时间有关。因此，用 $I(t)$ (积分仅是时间的函数)表示式(1)中的积分，我们得到

$$\frac{dI}{dt} \equiv \frac{d}{dt}\iiint_{R(t)} \rho(\mathbf{x}, t)dx_1\,dx_2\,dx_3$$

$$= \frac{d}{dt}\iiint_{R(0)} \rho[\mathbf{x}(\mathbf{A}, t), t]J(\mathbf{A}, t)dA_1\,dA_2\,dA_3. \tag{3}$$

式中，$R(0)$ 是 $t=0$ 时物质所占据的区域．我们已用雅可比法则改变了积分元．

利用 (13.3.3) 式的物质密度 $\delta(\mathbf{A},t)\equiv\rho[x(\mathbf{A},t),t]$ 我们可把(3)式更简单地写成

$$\frac{dI}{dt}=\frac{d}{dt}\iiint_{R(0)}\delta(\mathbf{A},t)J(\mathbf{A},t)d\tau.$$

现在我们把对时间的导数放到积分号里面去，并利用偏导数的符号来标明 A 在微商过程中相对于 t 保持常数

$$\frac{dI}{dt}=\iiint_{R(0)}\left[\frac{\partial\delta(\mathbf{A},t)}{\partial t}J(\mathbf{A},t)+\delta(\mathbf{A},t)\frac{\partial J(\mathbf{A},t)}{\partial t}\right]\times dA_1\,dA_2\,dA_3. \tag{4}$$

利用欧拉膨胀公式(13.4.11)，我们得到

$$\frac{dI}{dt}=\iiint_{R(0)}\left\{\frac{\partial\delta(\mathbf{A},t)}{\partial t}+\delta(\mathbf{A},t)(\nabla\cdot\mathbf{v})\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(A,t)}\right\}\times J(\mathbf{A},t)dA_1\,dA_2\,dA_3.$$

作变量变换 $\mathbf{A}=\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$，并利用 (13.3.7)，(13.3.3)式，以及(13.2.2b)式中所给出的 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{A}$ 之间的关系，于是我们便得到

$$\frac{dI}{dt}=\iiint_{R(t)}\left\{\frac{D\rho}{Dt}(\mathbf{x},t)+\rho(\mathbf{x},t)[\nabla\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x},t)]\right\}\times dx_1\,dx_2\,dx_3. \tag{5}$$

但是由(1)式，$dI/dt=0$，因此从(5)式我们得到结论

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla\cdot\mathbf{v}=0,} \tag{6}$$

式中，我们已假设(5)式中的积分是连续的，因此已利用了 Dubois-Reymond 引理．方程(6)常称为**连续方程**，它是所希望得到的微分形式的**质量守恒方程**，因为 $D\rho/Dt=\partial\rho/\partial t+\mathbf{v}\cdot\nabla\rho$，因此(6)式的另一种形式是

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})=0.} \tag{7}$$

我们已看到，一个在运动着的物质区域 $R(t)$ 上的积分的时间导数，如何便能用把 $R(t)$ 移到 $R(0)$ 及其反过程的方法去计算. 在这里宜于写出两个有用的公式，它们本质上记录了在通常所见的情况下用这种方法所得到的结果. 其证明留给读者（练习 1).

对于足够光滑的函数 F 和物质区域 $R(t)$，假设质量守恒，不难证明

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{R(t)} F\rho d\tau = \iiint\limits_{R(t)} \frac{DF}{Dt}\rho d\tau. \tag{8}$$

从形式的观点来讲，只要我们能识别出积分的"运动"变量，我们就可以把上述结果看成一种在积分号内取 d/dt 的方法，这种方法就是把 d/dt 这个算符改变为积分号内的物质导数 D/Dt，如果允许这样做，就有

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{R(t)} F\rho d\tau = \iiint\limits_{R(t)} \frac{DF}{Dt}\rho d\tau + \iiint\limits_{R(t)} F\frac{D}{Dt}(\rho d\tau). \tag{9}$$

把 (8) 式与(9)式比较表明要使上面所得到的这个公式正确，要求 $D(\rho d\tau)/Dt = 0$. 但是这是合理的，因为 $D(\rho d\tau)/Dt$ 可以看作是运动着的物质元的质量随时间的变化.

与(8)式密切相关的一个结果如下. 对于足够光滑的函数 G 和物质区域 $R(t)$，

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{R(t)} G d\tau = \iiint\limits_{R(t)} \frac{\partial G}{\partial t} d\tau + \oint\!\!\oint\limits_{\partial R(t)} G\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}d\sigma^{1)}. \tag{10}$$

这里，象往常一样，$\mathbf{n}$ 是 R 的单位外法线，$d\tau$ 是体元，$d\sigma$ 是表面元，∂R 表示 R 的边界. 如果 F 和 G 为矢量场 $\mathbf{F}$ 或 $\mathbf{G}$ 所替代，那末(8)式和(10)式都成立[练习 1(d)].

方程 (10) 是**雷诺输运定理**，其解释是有启发性的. 令 $\bar{R}_t$ 为时间 t 与 $R(t)$ 重合的在空间中固定的某区域. 无疑

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\bar{R}_t} G d\tau = \iiint\limits_{\bar{R}_t} \frac{\partial G}{\partial t} d\tau \equiv \iiint\limits_{R(t)} \frac{\partial G}{\partial t} d\tau \tag{11}$$

---

1) 如(10)式中那样，我们经常用传统的符号去表明在一个封闭表面上取积分. 但是在这方面，我们并不企图做到完全一致.

(在积分号下必须用偏微分符号,以表示在对 t 微商时积分变量保持常数.)但是在计算(10)式的左端时,(11)式的贡献必须补充如下

$$\oiint_{\partial R(t)} G\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}d\sigma = \oint_{\partial \bar{R}_t} G\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}d\sigma. \tag{12}$$

我们断言,面积分(12)可以看作给出了这样一种速率,浓度为单位体积 G 单位的物体,当介质流过 $\bar{R}_t$ 的边界时,物质就以该速率被携带. 为了弄清这一点,请看,$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ 给出了速度 $\mathbf{v}$ 在边界面指向外的方向上的分量. 暂时假定,$\mathbf{v}$ 与时间无关,那末在 U 单位时间内,就有一个长度为 $U\mathbf{vn}$ 单位,横截面积为 $d\sigma$ 的柱体的介质通过了面积为 $d\sigma$ 的表面元.(切向流动并不造成介质通过这个面元.)因此,介质以单位时间 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}d\sigma$ 体积的速率通过这个面元. 即使 $\mathbf{v}$ 依赖于时间,$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ 也给出通过这个面元的瞬时**体通量密度**.(通量密度意味着单位面积的流率.)如果介质在单位体积内包含 G 单位浓度的一种物质,那末这种物质通过该面元的通量为 $G\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}d\sigma$. 总通量 G 由(12)式给出,这是一个我经常要使用的结果.

把我们对(10)式的几段讨论放在一起,我们看到,$\iiint_{R(t)} Gd\tau$ 相对于时间的导数等于在瞬时与物质区域 $R(t)$ 重合的固定区域 $\bar{R}_t$ 上对积分 G 的时间导数,加上 G 通过边界 $\bar{R}_t$ 的通量.

积分方法: 任意空间区域

我们首先从下列陈述开始,质量守恒要求,对于在空间固定的某个区域,包含在这个区域中的质量增加率必须等于进入这个区域的净质量通量. 只有通过边界的质量流才能造成包含在一个固定区域中介质质量的改变,这是因为质量既不会产生也不会消灭. 用数学符号来表示,上面楷体排的一段话的意思是

$$\frac{d}{dt}\iiint_R \rho(\mathbf{x},t)d\tau = -\oiint_{\partial R}\mathbf{n}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\rho(\mathbf{x},t)d\sigma. \tag{13}$$

式中 R 为固定在空间中的任意区域;∂R 是它的边界;而 $\mathbf{n}$ 是垂直于 ∂R 的单位外法线,利用散度定理我们可以把(13)式写作

$$\iiint_R \left\{ \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\rho(\mathbf{x}, t)] \right\} d\tau = 0. \qquad (14)$$

(第一项中使用的是偏微分符号,这是因为在对时间取微商的过程中,积分变量 $\mathbf{x}$ 必须保持不变.)因为 R 是任意的,如果被积函数连续,那末(7)式由 Dubois-Reymond 引理得到.

小盒方法

如果限于二维情况,用 u 和 v 分别表示沿 x 和 y 增加方向的速度分量,那末我们将会更加清楚地弄明白所希望说明的概念. 我们假设 z 方向没有速度分量,而 u, v 和密度 ρ 与 z 无关.

我们再来应用一个区域中质量的增加速率必须等于流入该区域边界的质量这个概念. 与以前的方法相反,这里我们考虑一个特殊的区域. 这是一个 z 方向具有单位厚度,而在 x 和 y 方向具有小尺寸 Δx 和 Δy 的"小盒"(见图 14.1). 这种盒子是假想的;如图 14.1 所示,流体可以自由地通过 F_1、F_2、F_3 和 F_4. 由于作了二维假设,就没有流体通过平行于 xy 平面的面了.

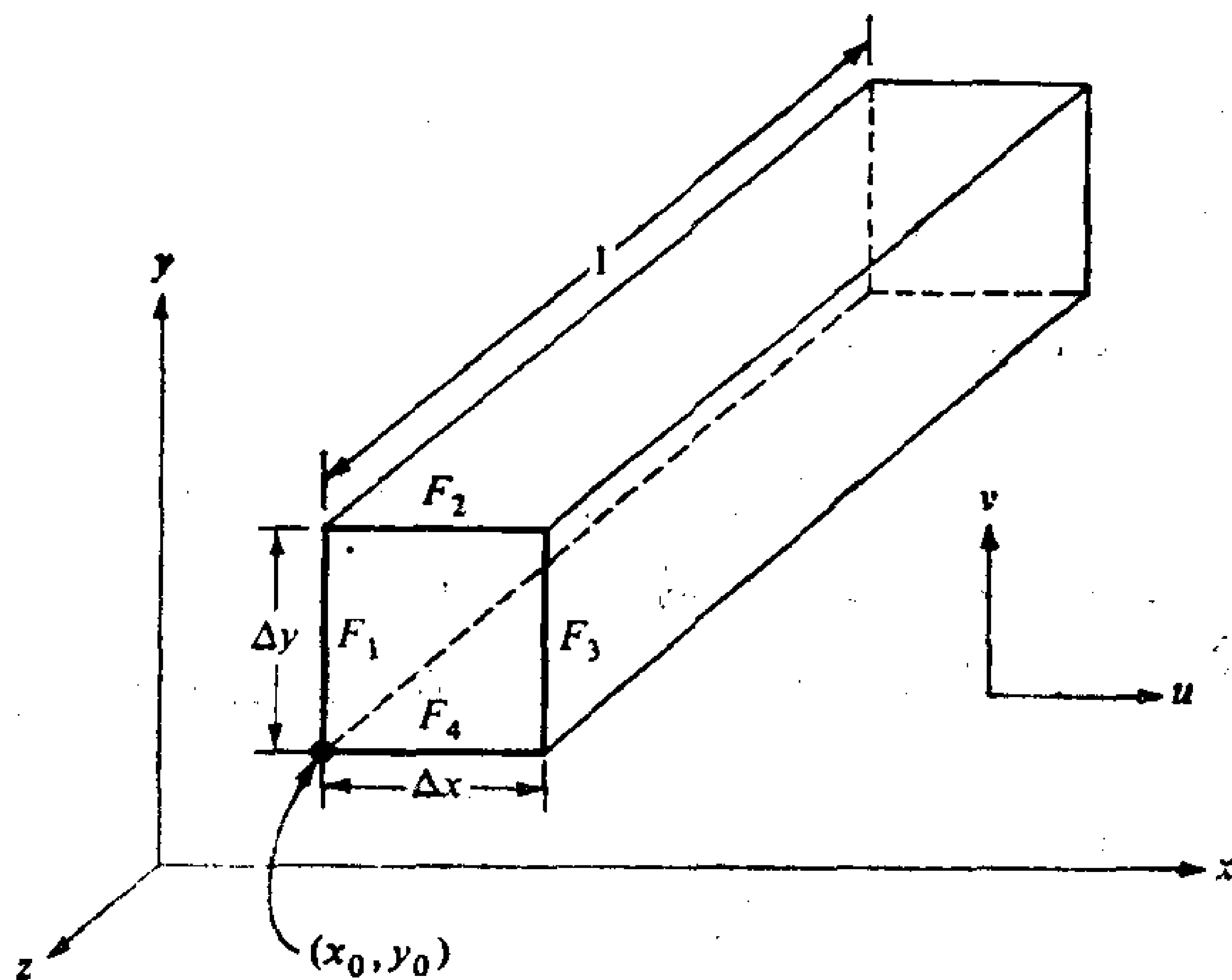


图 14.1 在直角坐标系中用来推导连续方程的假想的盒子

我们将作非正式的推理. 暂时要求读者不要怀疑. 经过面 F_1 流入盒子的质量流量为 $(\rho u)_0 \Delta y$ 其中下标表示 ρu 在 (x_0, y_0)

上进行计算.(可以不管 z 坐标,因为在 z 方向没有变化.)因为 Δy 非常小,我们可以不管 ρu 在 F_1 并非严格地为常数这个事实.

通过 F_3 进入盒子的质量流量为

$$-\left\{(\rho u)_0+\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\right]_0\Delta x\right\}\Delta y. \tag{15}$$

在括号中的第二项计及了要在 F_3 上而非 F_1 上计算 ρu 这一事实.因为 $\partial(\rho u)/\partial x$ 给出了单位长度上 ρu 的改变,我们应该用乘以 Δx 的方法得到所需要的修正.当 Δx 很小时,才可能允许在 $x=x_0$ 处计算 $\partial(\rho u)/\partial x$.(15)式中的负号来自下列事实:在 F_3 上正 u 速度分量意味着净向外的质量流量.

把 F_1和F_3 的贡献加起来,我们得到流入小盒的净质量流量为

$$-\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\right]_0\Delta x\Delta y. \tag{16}$$

类似地,或者按照对称性,经过 F_2 和 F_4 流入小盒的净质量流为

$$-\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial y}\right]_0\Delta x\Delta y \tag{17}$$

(16)和(17)式之和必须等于用密度改变的方法表示的盒内净质量的增加率,即

$$\left\{-\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\right]_0-\left[\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right]_0\right\}\Delta x\Delta y
=\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_0\Delta x\Delta y. \tag{18}$$

因为(x_0, y_0)是任意的,我们在任何点都有

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)=0. \tag{19}$$

方程(19)是连续方程(7)的二维形式.把刚才所给出的论证推广到三维情况应该并不存在困难.

这类推导是连续介质力学早期的大师们所采用的,可是一个要求高的人是不能满足于此的.这些早期的大师们无疑是天才,而天才则可定义为一个能用不充分的推理或者是错误的推理去得到正确答案的人.天才并非几乎都是生来就爱好真理的,而总

是对真理有自信心，一般的人则充满着怀疑. 从 F_1 到 F_3 时问题的本质在于去计及 ρu 的变化，那末为什么我们可以忽略通过 F_1 的 ρu 的变化呢？当我们在点 (x_0, y_0) 上去计算 $\partial\rho/\partial t$ 时，我们怎么能确信我们没有忽略掉重要的东西呢？采用极坐标时，当我们划出了合适的盒子后，其一边的长度可表达为 $(r_0+\Delta r)\Delta\theta$（练习 10）其中，我们不能忽略 Δr，弄清了这一点以后，我们到底对自己能够判定一些项可以忽略的能力还持有多大的信心呢？我们最后的推导保持了前一方法的精神，但可用更加严密的方法来消除我们的疑虑.

大盒方法

我们仍然通过象图 14.1 那样的一个匣子来考虑二维运动，但我们不再要求 Δx 和 Δy 是"非常小的". 事实上，为了避免不应有的简单化，再好把 Δx 和 Δy 看作是大的.

再考虑通过 F_1 向盒内的质量流量，在时间 t，这就是

$$\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\rho(x_0, y, t)u(x_0, y, t)dy, \tag{20}$$

式中我们已利用了 F_1 面上 $x=x_0$. 类似地，通过 F_3 流向盒内的质量流为

$$-\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\rho(x_0+\Delta x, y, t)u(x_0+\Delta x, y, t)dy.$$

利用积分中值定理，由 F_1 和 F_3 向盒内贡献的净质量流量为

$$\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}M(y)dy=M(y_1)\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}dy=\Delta y M(y_1), \tag{21}$$

式中

$$M(y)\equiv\rho(x_0, y, t)u(x_0, y, t)-\rho(x_0+\Delta x, y, t)u(x_0+\Delta x, y, t), \tag{22}$$

而 y_1 是满足 $y_0\leqslant y_1\leqslant y_0+\Delta y$ 的一个常数. 为了强调与积分中值定理相关的对 y 的依赖性，在应用上面的符号 $M(y)$ 时，我们并没有明显地指出它对 x_0 和 t 的依赖性.

类似地，通过面 F_4 和 F_2 向盒内的质量流量为

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}[\rho(x, y_0, t)v(x, y_0, t)$$
$$- \rho(x, y_0+\Delta y, t)v(x, y_0+\Delta y, t)]dx$$
$$= \Delta x[\rho(x_1, y_0, t)v(x_1, y_0, t)$$
$$- \rho(x_1, y_0+\Delta y, t)v(x_1, y_0+\Delta y, t)]. \qquad (23)$$

另一方面，包含在“大盒”中的质量改变率为

$$\frac{d}{dt}\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\rho(x, y, t)dxdy$$
$$= \int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\frac{\partial\rho}{\partial t}(x, y, t)dxdy$$
$$= \frac{\partial\rho}{\partial t}(x_2, y_2, t)\Delta x\Delta y. \qquad (24)$$

(24)式的第二个等式是由面积的积分中值定理得到的，因此，x_2 和 y_2 为满足下式的常数

$$x_0 \leqslant x_2 \leqslant x_0+\Delta x, \quad y_0 \leqslant y_2 \leqslant y_0+\Delta y. \qquad (25)$$

如果注意到(24)式中的因子 $\Delta x\Delta y$，那末我们便会希望在(22)和(23)式中也有一个类似的因子存在．这可以应用导数的中值定理来加以处理，导数的中值定理指出，如果在包含 $[y_0, y_0+\Delta y]$ 的区间上 f' 存在，那末，对于某个满足

$$f(y_0+\Delta y)-f(y_0)=f'(\xi)\Delta y \qquad (26)$$

的 ξ，便有

$$y_0<\xi<y_0+\Delta y.$$

为了把这个式子应用于(23)式，并且让 $f(y_0)$ 等于 $\rho(x_1, y_0, t)v(x_1, y_0, t)$．那么(23)式右端可以写作

$$-\Delta x\Delta y\frac{\partial[\rho(x_1, y_3, t)v(x_1, y_3, t)]}{\partial y} \qquad (27)$$

式中 $y_0<y_3<y_0+\Delta y$．类似地，根据(22)式，F_1 和 F_3 的贡献可写作

$$-\Delta x\Delta y\frac{\partial[\rho(x_3, y_1, t)u(x_3, y_1, t)]}{\partial x}, \qquad (28)$$

式中 $x_0<x_3<x_0+\Delta x$．质量守恒要求(27)和(28)式表达式的

和等于(24)式的右端. 消去 $\Delta x\Delta y$，我们发现，对于任何 Δx 和 Δy，不管它们怎样大或怎样小，对于某个满足下式的 x_i 和 y_i

$$x_0 \leqslant x_i \leqslant x_0 + \Delta x,\quad y_0 \leqslant y_i \leqslant y_0 + \Delta y,\quad i = 1, 2, 3.$$

总有

$$-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=x_3\\ y=y_1}} - \frac{\partial(\rho u)}{\partial y}\bigg|_{\substack{x=x_1\\ y=y_3}} = \frac{\partial\rho}{\partial t}\bigg|_{\substack{x=x_2\\ y=y_2}}. \tag{29}$$

在式(29)中当连续的 u、v 和 ρ 取极限 $\Delta x\to 0$，$\Delta y\to 0$ 时，便得到所需的方程式(19).

在我们作微商时，为了保证各定理都成立，我们要求所研究的函数具有不同程度的光滑度.要问速度分量、密度等是否真正具有所需阶数的导数这是不适当的. 我们"实际上"要想知道的就是一个模型(譬如说其中假设速度分量三次可微)能否精确地描述我们感兴趣的现象. 只有求解问题的经验才能给出解答，因此，就现在来说，我们仅仅需要记住的就是我们的导数需要"充分"地光滑.再往下读时，我们会注意到，经验表明大多数问题的解答不出现光滑度的困难，但在某些非常重要的问题中，肯定必须允许有间断解存在并且在我们的推导中必须作一些恰当的修正.

练　　习

1. (a) 从第一原理推导(8)式.

(b) 从第一原理推导(10)式.

(c) 试证明从(10)式可以得到(8)式，反之亦然(假定质量守恒).

(d) 试证明如果 F 和 G 为矢量场 $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{G}$ 所代替，则(8)和(10)式仍然正确.

2. 用下列另一种方法对大盒方法进行运算，试证明(21)式可写作

$$-\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\frac{\partial[\rho(x,y)u(x,y,t)]}{\partial x}\,dxdy.$$

把上式与(23)式第一行的类似的表达式和(24)式左端的表达式结合起来，得到在图 14.1 上的任意长方形上等于零的二重积

分．推导(19)式．

3. 这里是质量守恒的另一种推导方法，在分析上简洁但物理上多少不能使人满意．

(a) 试证明在一维情况下，质量守恒要求

$$(\rho u)(x_0, y_0, t) - (\rho u)(x_0 + \xi, y_0, t) = \int_{x_0}^{x_0+\xi} \rho_t dx.$$

对 ξ 取导数．令 $\xi = 0$ 或注意到 $x_0 + \xi$ 和 y_0 是任意的，得到最终的方程．

(b) 对二维情况重复以上各步．

4. 用下列方法推导(19)式的三维形式．

(a) 小盒方法．

(b) 大盒方法．

5. 按照某种宇宙学理论，物质在宇宙中不断地创造着．假定宇宙中的物质可看作连续介质，写出修正质量守恒方程．

6. (a) 把下式

$$\iiint\limits_{R(0)} \delta(\mathbf{A}, 0) dA_1 dA_2 dA_3 = \iiint\limits_{R(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dx_1 dx_2 dx_3 \tag{30}$$

解释为质量守恒要求的一种形式．推导**在物质座标下的质量守恒方程**

$$\rho[\mathbf{x}(A, t), t] J(\mathbf{A}, t) = \delta(\mathbf{A}, 0)$$

或

$$\delta(\mathbf{A}, t) J(\mathbf{A}, t) = \delta(\mathbf{A}, 0). \tag{31}$$

(b) 试证明对不可压缩运动有 $J(\mathbf{A}, t) = 1$.

(c) 试证明 $J(\mathbf{A}, 0) \equiv 1$.

7. 用变量的直接变换由物质坐标下的连续方程推导空间坐标下的连续方程，再把这一过程反过来．由下式开始，

$$\frac{\partial}{\partial t}[\delta(\mathbf{A}, t) J(\mathbf{A}, t)] = 0.$$

笛卡儿张量是第 II 卷第二章的主题，为我们提供了表述物理定

律的一个有效的框架．这些定律在某种意义上讲，不管采用哪种笛卡儿坐标都必然是不变形的．在这一主题下，阐述了从一个笛卡儿系变换到另一个笛卡儿系的规则．普遍张量允许作一般坐标系的变换． 下面四个练习给出了所涉及问题的一些提示．

8. 用直接计算证明，在相对于原坐标系逆时针旋转了 θ 角以后的新坐标轴的变量下，二维质量守恒方程 (19) 具有相同的形式．根据如下步骤．

(a) 用 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{j}$ 表示原来的单位矢量，用 $\mathbf{i}'$ 和 $\mathbf{j}'$ 表示新单位矢量．试证明

$$\begin{aligned} \mathbf{i}\cdot\mathbf{i}' &= \cos\theta, \quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}' = -\sin\theta, \\ \mathbf{j}\cdot\mathbf{i}' &= \sin\theta, \quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}' = \cos\theta. \end{aligned} \tag{32}$$

(b) 令

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x, y) &= u(x, y)\mathbf{i} + v(x, y)\mathbf{j} \\ &= u'(x, y)\mathbf{i}' + v'(x, y)\mathbf{j}' \end{aligned} \tag{33}$$

因此 $u(x, y)$ 和 $u'(x, y)$ 分别为 (x, y) 点处沿方向 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{i}'$ 的速度分量．试证明

$$u(x, y) = u'(x, y)\cos\theta - v'(x, y)\sin\theta, \tag{34a}$$

$$v(x, y) = u'(x, y)\sin\theta + v'(x, y)\cos\theta, \tag{34b}$$

$$u'(x, y) = u(x, y)\cos\theta + v(x, y)\sin\theta, \tag{34c}$$

$$v'(x, y) = -u(x, y)\sin\theta + v(x, y)\cos\theta. \tag{34d}$$

(c) 设 (x', y') 是带撇坐标系中某点的坐标，该点在不带撇坐标系中的坐标为 (x, y)．试证明

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta, \quad y = x'\sin\theta + y'\cos\theta, \tag{35a,b}$$

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta, \quad y' = -x\sin\theta + y\cos\theta. \tag{35c,d}$$

(d) 用带划的量表示带撇坐标系下的量，因此，例如

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \bar{u}[x'(x, y),\ y'(x, y)], \\ \bar{u}(x', y') &= u[x(x', y'),\ y(x', y')]. \end{aligned}$$

使用连锁法则证实，(19)式意味着

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t}+\frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u})}{\partial x'}+\frac{\partial(\bar{\rho}\bar{v})}{\partial y'}=0, \tag{36}$$

式中 $\bar{\rho}(x', y')$ 给出了带撇坐标下的密度.

9. 考虑密度为 $\rho(x, y)$ 的可压缩流体的二维运动. 从已知的笛卡儿坐标下利用变量变换和连锁法则,试证明在极坐标下

$$\frac{\partial R}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rUR)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(VR)=0. \tag{37}$$

这里

$$x=r\cos\theta, \qquad y=r\sin\theta,$$

$$R(r, \theta)=\rho(r\cos\theta, r\sin\theta),$$

并且 $U(r, \theta)$ 和 $V(r, \theta)$ 分别为 r 和 θ 方向增加的速度分量. 如果你希望得到提示,参考附录 15.2.

10. 直接把盒宗量应用于图 14.2 中画出的面积元,试推导(37)式. (在推导完成以后,请注意内外曲线边界之间的差别在取盒子的面积时可以忽略,但在计算通过这些边界的流量时不可忽略.)

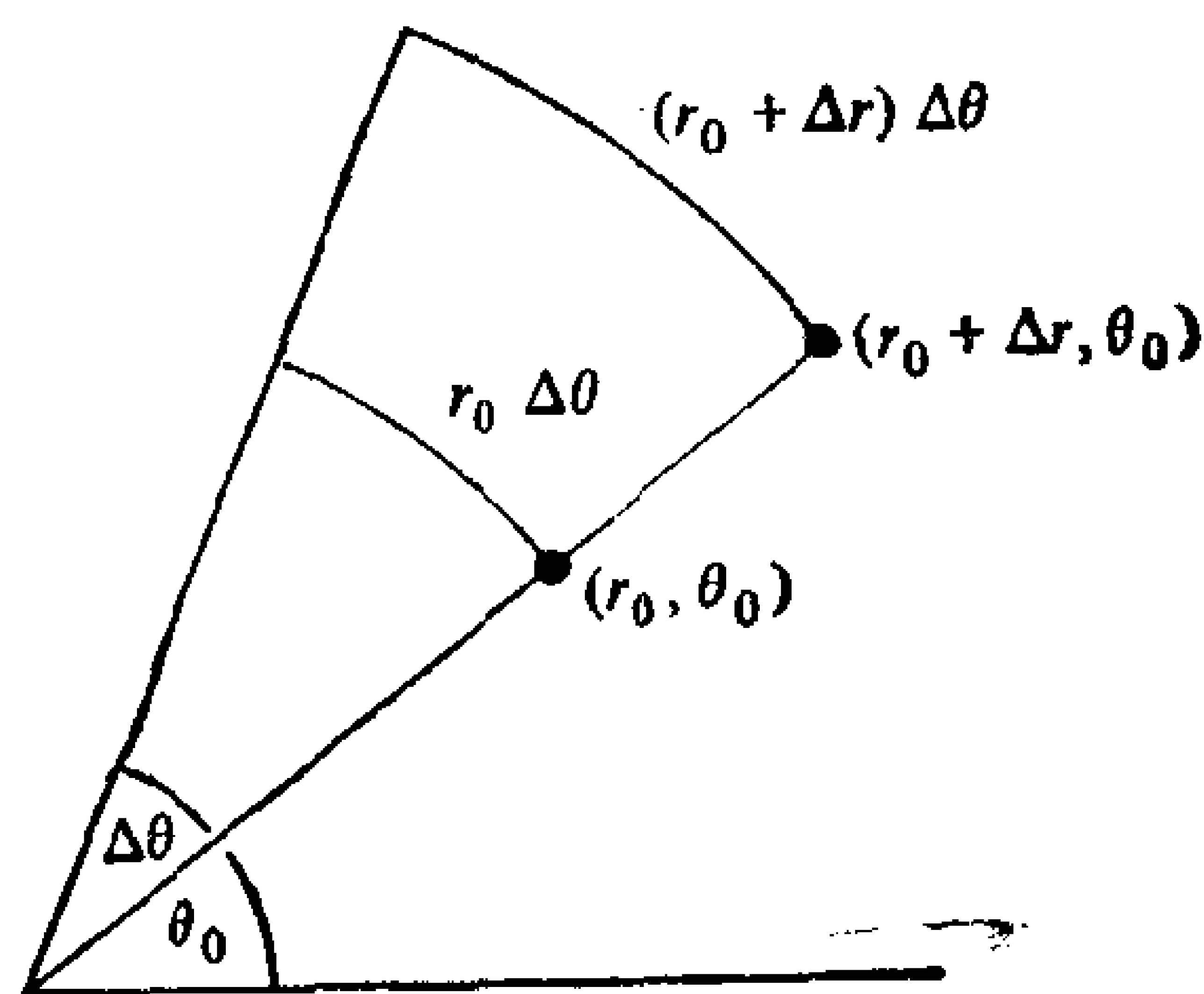


图 14.2 在极座标下推导连续方程所采用的假想的盒子的顶视图

11. 通过考虑具有坐标 $[x(t), y(t)]$ (或者选用 $[r(t), \theta(t)]$) 的一个运动点, 试从 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ 推导(34a)式和(34b).

12. 本练习的目的是探讨如何把连续介质和守恒的概念应用于天

体动力学． 这些概念可应用于平均质量分布函数 Ψ．（参看 13.1 节的讨论．）我们希望做的是推导基本守恒方程(1.2.4)．做这个练习根本不需要 1.2 节的知识．

为了简单起见，我们限于考虑只依赖空间坐标 x，相应的速度分量 u 和时间 t 的函数． 因此，$\Psi(x, u, t)$ 是一个具有如下性质的光滑函数，即对于足够的精度

$$\int_{u_1}^{u_2}\int_{x_1}^{x_2}\Psi(x, u, t)dxdu$$

给出了位于 x_1 和 x_2 之间、具有 u_1 和 u_2 之间速度的物质的质量．

(a) 考虑图 14.3 中所画出的 (x, u) 空间中的"大盒"．详细解释"占据着盒子的流体的质量"的含意．这就是说，对于这样的流体的位置和速度我们能说些什么？ 这是个容易的问题．

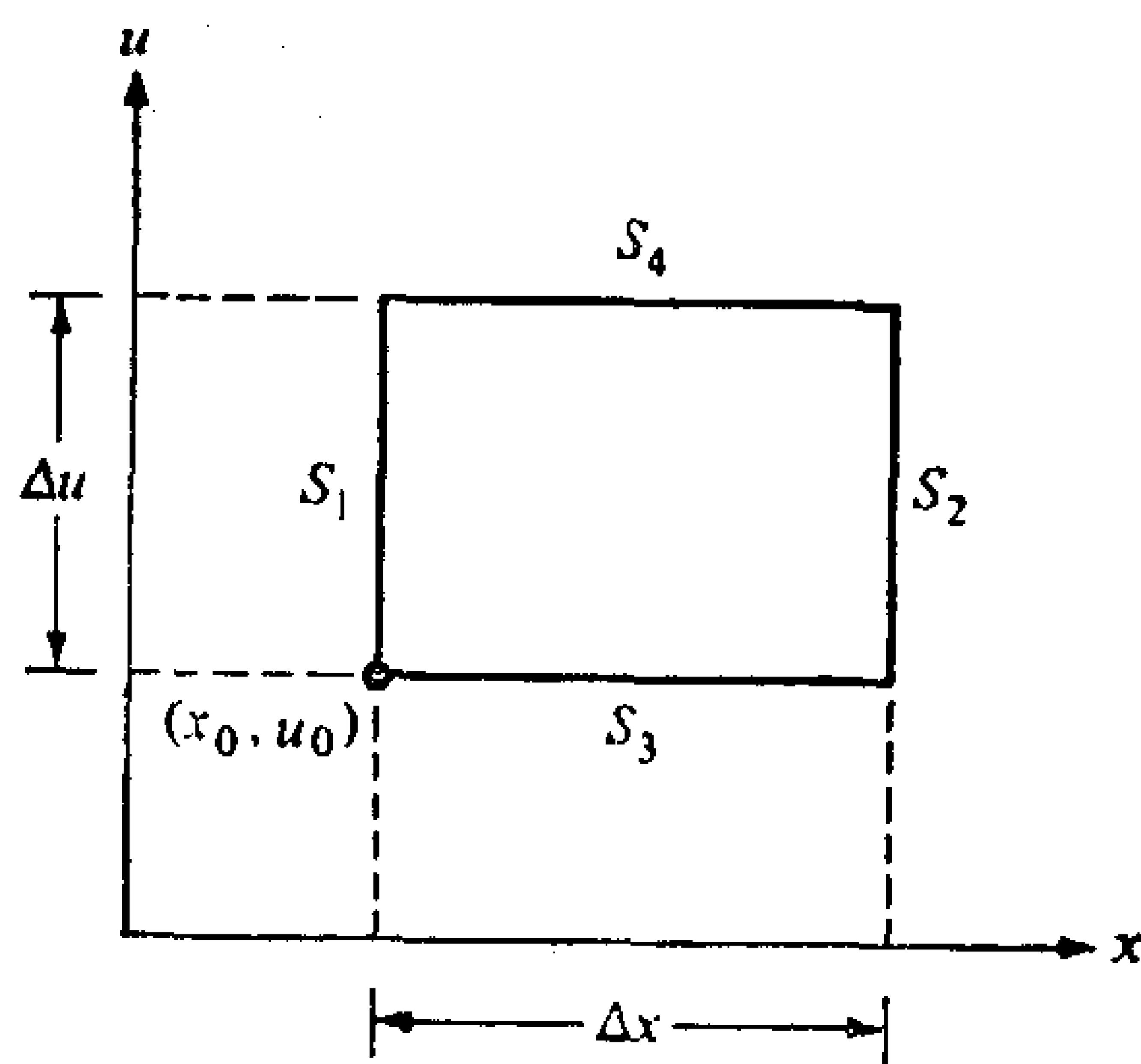


图 14.3 推导分布函数 $\Psi(x, u, t)$ 的方程时所用的假想的盒子

(b) 写下给出时间 t 时盒子中流体质量的重积分．

(c) 试证明(b)的时间改变率为 $\Psi_t(x^*, u^*, t)\Delta x\Delta u$，式中

$$x_0 \leqslant x^* \leqslant x_0 + \Delta x, \quad u_0 \leqslant u^* \leqslant u_0 + \Delta u.$$

记住 u 是一个自变量．

(d) "流体在时间间隔 $(t, t + \Delta t)$ 内向内通过标记为 S_1 的侧边的净质量"这句话的含意是什么？

(e) 解释(d)为什么为

$$\int_{u_0}^{u_0+\Delta u}\left[\int_{x_0-u\Delta t}^{x_0}\Psi(x,u,t)dx\right]du.$$

(f) 由(e)证明时间 t 时向内经过边 S_1 的质量流量为

$$\int_{u_0}^{u_0+\Delta u}u\Psi(x_0,u,t)du.$$

(g) 对 S_2 推导类似的表达式.

(h) 把(f)和(g)结合起来构成一个正比于 $\Delta x\Delta u$ 的表达式.

(i) 重复(d),仅仅用 S_3 代替 S_1.

(j) 解释为什么(i)为

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\left[\int_{u_0-a(x,t)\Delta t}^{u_0}\Psi(x,u,t)du\right]dx,$$

式中 $a(x,t)$ 是沿 x 增加方向的加速度. 当只需考虑重力时,加速度(单位质量上作用的力)与 u 无关.

(k) 利用(f)—(h)的方法得到向内通过 S_3 和 S_4 的质量流量的表达式.

(l) 因为恒星间的碰撞可以忽略,把(c)与(h)+(k)相等并取合适的极限得到最终的答案.

13. 这个问题的目的是推导练习 12 中得到的那个最终的微分方程(1.2.4),但是这里采用不同的方式. 我们将模仿上面推导普通的质量守恒方程时所用的第一种方法.

我们用符号

$$x=x(X,U,t),\quad u=u(X,U,t) \qquad (38a,b)$$

来描述 xu 空间中的运动. 我们将假定(38a)和(38b)可以倒过来得到

$$X=X(x,u,t),\quad U=U(x,u,t). \qquad (39a,b)$$

(a) (38a)和(39b)式的物理意义是什么?

(b) 我们作定义

$$A(X,U,t)=\frac{\partial u(X,U,t)}{\partial t}.$$

A 的物理意义是什么? 我们应怎样去定义 A 的“空间”形

式 $a(x, u, t)$?

(c) 令

$$\overline{\Psi}(X, U, t) = \Psi[x(X, U, t), u(X, U, t), t], \tag{40}$$

用

$$\frac{\mathscr{D}\Psi(x, u, t)}{\mathscr{D}t} = \left.\frac{\partial\overline{\Psi}(X, U, t)}{\partial t}\right|_{\substack{X=X(x,u,t)\\ U=U(x,u,t)}}. \tag{41}$$

定义一般化的物质导数 $\mathscr{D}/\mathscr{D}t$.

试(用谨慎和明显的符号)证明

$$\frac{\mathscr{D}\Psi}{\mathscr{D}t} = \frac{\partial\Psi}{\partial t} + U\frac{\partial\Psi}{\partial x} + a\frac{\partial\Psi}{\partial u}. \tag{42}$$

(d) 定义

$$\mathscr{I}(X, U, t) \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial X} & \dfrac{\partial x}{\partial U} \\ \dfrac{\partial u}{\partial X} & \dfrac{\partial u}{\partial U} \end{vmatrix}. \tag{43}$$

用谨慎和明显的符号推导

$$\frac{\partial\mathscr{I}}{\partial t} = \mathscr{I}\cdot\left.\frac{\partial a}{\partial u}\right|_{\substack{x=x(X,U,t)\\ u=u(X,U,t)}}. \tag{44}$$

(e) 在没有"碰撞"时,最终的微分方程现在可以用我们在推导常用的质量守恒方程时所遵循的步骤来得到. 这就是说,我们定义一个合适地推广的"物质区域"$R(t)$,并假设

$$\frac{d}{dt}\iint_{R(t)}\Psi(x, u, t)dxdu = 0. \tag{45}$$

最终的微分方程可通过对(45)作运算而得到. 试完成这个运算.

14.2 线动量平衡

我们现在把牛顿第二动定律的一种形式应用于连续介质.

牛顿第二定律的积分形式

在质点力学中，我们把一个质量为m以速度$\mathbf{v}$运动的质点P称为具有(线)动量$m\mathbf{v}$. 按照牛顿第二定律，P的线动量改变率等于作用在P上的净力. 为了把这条定律推广到连续介质中去，我们把时间t时密度为$\rho(\mathbf{x},t)$占据着区域$R(t)$的物质所具有的线动量定义为

$$\iiint_{R(t)}\rho(\mathbf{x},t)\mathbf{v}(\mathbf{x},t)d\tau, \tag{1}$$

式中$\mathbf{v}$为速度矢量. 而且，(1)式中积分的时间改变率假设是等于作用在R中的物质上的净力.

我们可以预期力是属于那种类型呢？最熟知的**体力**的例子是重力，体力在质点力学中是正比于质点的质量的. 在连续介质中自然可以用积分的方法从点过渡到区域. 因此，我们考虑具有如下形式的作用在R中的物质上的体力

$$\iiint_{R(t)}\rho(\mathbf{x},t)\mathbf{f}(\mathbf{x},t)d\tau, \tag{2}$$

式中$\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$是单位质量的体力矢量. 我们也考虑**表面力**. 这些力具有的形式为

$$\iint_{\partial R(t)}\mathbf{t}(\mathbf{x},t,\mathbf{n})d\sigma, \tag{3}$$

式中$\mathbf{x}$是表面元的位置矢量，t是时间，$\mathbf{n}$是$\mathbf{x}$处∂R的单位外法线，应变量$\mathbf{t}$称为**应力矢量**.

在写(3)式时，我们已隐含地假设单位面积的力(应力)在面积趋向于零时趋向一个极限. 为了弄明白这一点，令$S_k(k=1,2,3,\cdots)$表示一系列类似的光滑表面，它们的面积不断减少，每一个都是∂R的一部分，且都包含点$\mathbf{x}^{(0)}$. 令$\mathbf{n}^{(0)}$为∂R在$\mathbf{x}^{(0)}$处的外法线. 那末，如果A_k是S_k的面积，S_k上单位面积的第i个分量为

$$\frac{1}{A_k}\iint_{S_k}t_i(\mathbf{x},t,\mathbf{n})d\sigma=t_i(\tilde{\mathbf{x}}^{(k)},t,\tilde{\mathbf{n}}^{(k)});\qquad i=1,2,3,$$

式中,我们已用了积分中值定理. 这里 $\tilde{\mathbf{n}}^{(k)}$ 是 S_k 上的一点 $\tilde{\mathbf{x}}^{(k)}$ 处的单位法向矢量. 如果 t_i 是它的变量的连续函数,那末

$$\lim_{\substack{A_k\to 0\\ \mathbf{x}^{(0)}\text{在 } S_k \text{ 上}}} \frac{1}{A_k}\iint_{S_k} t(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})d\sigma = t_i(\mathbf{x}^{(0)}, t, \mathbf{n}^{(0)}). \qquad (4)$$

这是因为当 $A_k\to 0$ 时 $\tilde{\mathbf{x}}$ 必趋近于 $\mathbf{x}^{(0)}$ 的缘故. [注意,在一个给定的表面上, $\mathbf{n}$ 是在每个点 $\mathbf{x}$ 处确定的, 所以在这种情况下 $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ 实际上只是 $\mathbf{x}$ 和 t 的函数.]

为什么我们应该假设应力存在呢? 在历史上, 这个假说是作为最初关于特殊物质的特殊假设的推广而出现的. 例如, 在拉伸一根金属杆时, 自胡克以后就假定相对伸长正比于单位面积上的作用力. 理想气体随机碰撞的弹性球模型导致了单位面积法向力压强的引进, 毫无疑问这是读者从普通物理教程中就学过的. 在附录 14.2 中, 我们可以找到某些历史评述, 但是对连续介质力学的漫长而有趣的历史的充分的评价需要作进一步的阅读.

由假设作用在 R 上的力形式为(2)和(3)式就完全给出 $\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{t}$ 的定义. 但是给这些重要量作出更进一步的逐字逐句的描述可能是有用的.

体力 在时间 t, 假定每单位质量上有一个力 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ 作用在 R 中的每个点 $\mathbf{x}$ 上.

表面应力 在时间 t,考虑区域 R 的边界 ∂R 上的一点 $\mathbf{x}$. 令 $\mathbf{n}$ 为 $\mathbf{x}$ 处 R 的外法线[1]. 那末 $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ 就是在 ∂R 的点 $\mathbf{x}$ 处单位面积上由 R 外面的物质作用在 R 内部物质上的力.

把我们到现在为止的思索结合在一起,我们提出这样的假设: 物质区域 $R(t)$ 中线动量的改变率等于体力的贡献加表面力的贡献:

---

1) 每当我们使用外法线 $\mathbf{n}$ 时,实际上不言而喻地假定 $\mathbf{n}$ 是存在的. 这就是说, 我们假定 R 的边界 ∂R 把空间分为两个区域: 一个是有界连通点集, 称之为 R 的**内部**;而这个区域的余集,称为**外部**. 一般地,我们都假设 $\mathbf{x}$ 沿表面运动时 $\mathbf{n}$ 光滑地变化.

$$\frac{d}{dt}\iiint_{R(t)} \rho \mathbf{v} d\tau = \iiint_{R(t)} \rho \mathbf{f} d\tau + \iint_{\partial R(t)} \mathbf{t} d\sigma. \tag{5}$$

这个由科希提出的基本方程可以用下列方法来考察．可以假定，宇宙的其余部分对占据 $R(t)$ 的物质的线动量的影响可以用两部分作用来代替，它们是作用在整个 $R(t)$ 上的大小为每单位质量 $\mathbf{f}$ 的长程体力，加上作用在 $R(t)$ 的边界上并且代表邻近于 $R(t)$ 的物质的附加作用(接触力)的应力 $\mathbf{t}$ 的影响．换句话说，就线动量来说，我们的假设就是我们可以用合适的体力 $\mathbf{f}$ 和应力 $\mathbf{t}$ 来代替 $R(t)$ 以外的宇宙的作用．

反过来说，(5)式简单地表示，线动量因为单位体积的动量源 $\rho\mathbf{f}$ 和单位面积的动量通量 $\mathbf{t}$ 而增加．这样一种站得极高的观点具有某种吸引力，但是当我们希望把动量源和动量通量与推和拉这种日常经验等同起来时，下降可能是必要的．

为了获得对(5)式的相当程度的重视，读者要 (a) 对它进行仔细的琢磨，直到相信它是明显地正确的为止．(b) 参阅第 II 卷 7.1 节，那里指出，(5)式在某些条件下（当必须考虑表面张力时）是不正确的．

局部应力平衡

利用(18)式的矢量形式，我们可以把(5)式中的时间导数放到积分里面去：

$$\frac{d}{dt}\iiint_{R(t)} \rho \mathbf{v} d\tau = \iiint_{R(t)} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} d\tau. \tag{6}$$

由此，(5)式可以写作

$$\iiint_{R(t)} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} d\tau - \iiint_{R(t)} \rho \mathbf{f} d\tau = \iint_{\partial R(t)} \mathbf{t} d\sigma. \tag{7}$$

即使对所涉及的力没有清楚的概念，也可从(7)式推导出重要的结果来．为了做到这一点，考虑一族以长度 L 表征的相似区域 R_L．(以 aL，bL 和 cL 为边长的长方体族便给出了一个例子．)正如附录 13.3 练习 3 所提到的那样，这样的一些区域具有同

样的形状，对于某些仅依赖于这些区域形状的常数 λ_R 和 μ_R，它们的体积$\mathscr{V}$和面积 $\mathscr{S}_L$ 满足

$$\mathscr{V}_L = \lambda_R L^3, \qquad \mathscr{S}_L = \mu_R L^2.$$

因此，对于任何连续函数 G，积分中值定理指出

$$\iiint_{R_L} G(\mathbf{x})d\tau = \lambda_R L^3 G(\tilde{\mathbf{x}}), \quad \tilde{\mathbf{x}} \text{ 位于 } R_L \text{ 中}. \tag{8}$$

让我们逐个分量地把(8)式应用于(7)式的右端，因为所有的体积分都正比于 L^3，两边除以 L^2，然后让 $L\to 0$，那末我们便得到

$$\lim_{L\to 0}\frac{1}{L^2}\iint_{\partial R_L(t)} \mathbf{t}d\sigma = 0. \tag{9}$$

(9)式是一个很重要的方程．如果区域 R_L 中的物质受到表面应力的作用而不受其他力的作用，如果该物质处于平衡状态，那末必然地作用在物质上的合力必须等于零；认识到这一点就会获得对(9)式意义的深刻理解．这就是说，实际上，每个区域 R_L 都在运动，并受到体力的作用．但是，当 $L\to 0$ 时，表面应力项的作用比起体积

$$\iiint_{R_L} \rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt}d\tau \quad \text{和} \quad \iiint_{R_L} \rho\mathbf{f}d\tau$$

分来则越来越占优势，上两式分别代表运动（惯性）和体力的作用．在极限的情况下我们便得到(9)式，粗略地讲，该式表明，就象区域处于平衡的一样，作用在无穷小区域上的表面力除以它的面积 $\mu_R L^2$ 趋向于零．因此方程(9)称为**局部应力平衡的原则**．

作用和反作用

把局部应力平衡原则，应用于各种区域，我们便可推导出这个原则的结果．首先放一个长方体 F_L，其一个角落上包含固定点 $\mathbf{x}$，并且有边长为 $\varepsilon L\times L\times L$，$\varepsilon \ll 1$（图 14.4）．令 $\mathbf{n}$，$-\mathbf{n}$，$\mathbf{n}_T$，$-\mathbf{n}_T$，$\mathbf{n}_{R_i}$ 和 $-\mathbf{n}_{R_i}$ 分别为这个薄片的前、后、上、下左右面的单位外法线(参阅图 14.4)．利用积分中值定理，(9)式中面积分的第 i 个分量可以写作

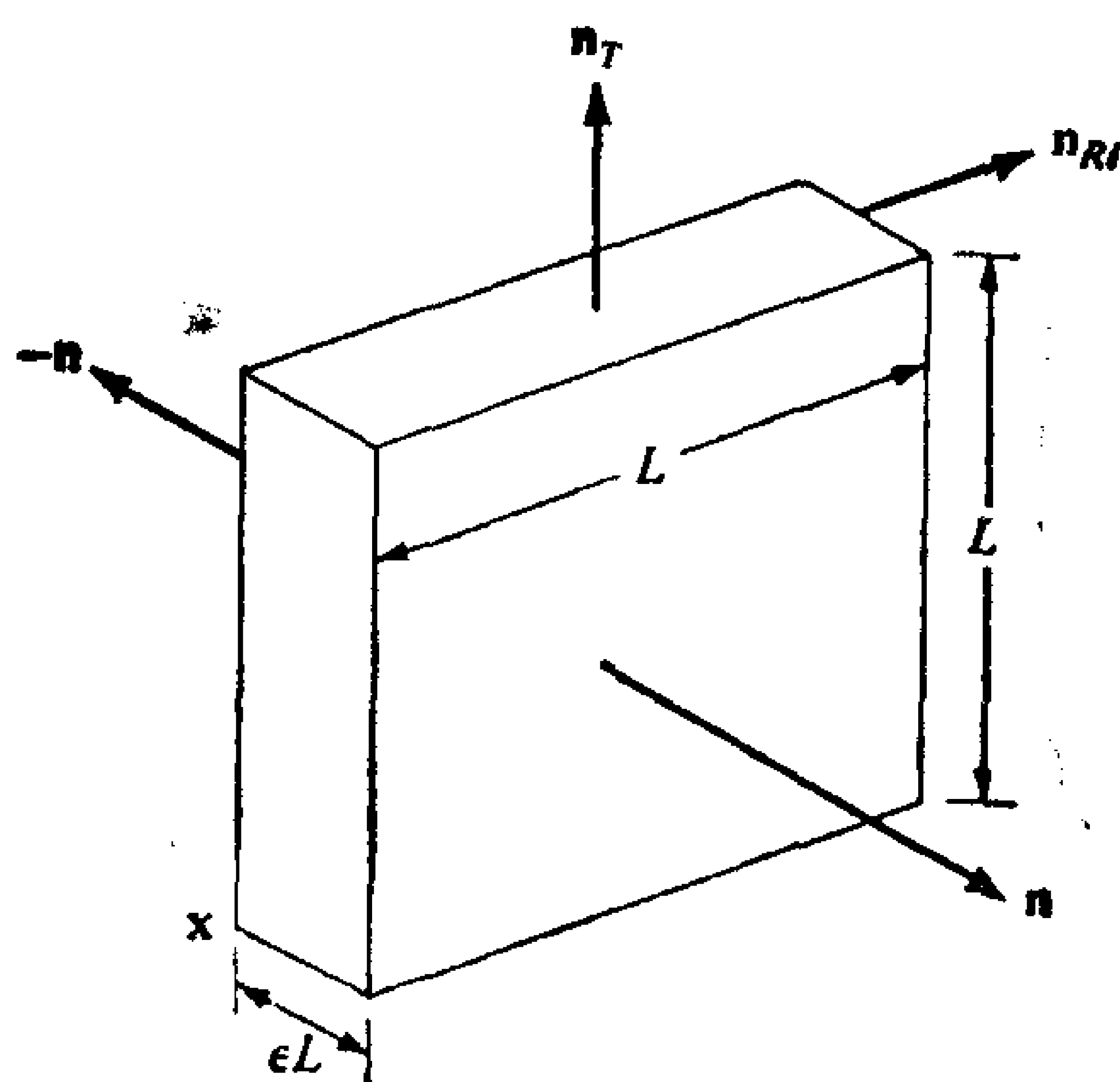


图 14.4 "薄片" F_L. 把局部应力平衡应用于这类区域得到"作用-反作用"定律(12)式

$$L^2[t_i(\mathbf{x}_F, t, \mathbf{n}) + t_i(\mathbf{x}_R, t, -\mathbf{n}) + \varepsilon Q_i]; \quad i = 1, 2, 3, \tag{10}$$

式中

$$Q_i = t(\mathbf{x}_T, t, \mathbf{n}_T) + t_i(\mathbf{x}_B, t, -\mathbf{n}_T) + t_i(\mathbf{x}_{R_i}, t, \mathbf{n}_{R_i}) + t_i(\mathbf{x}_L, t, -\mathbf{n}_{R_i}).$$

这里 $\mathbf{x}_F$, $\mathbf{x}_R$, $\mathbf{x}_T$, $\mathbf{x}_B$, $\mathbf{x}_{R_i}$ 和 $\mathbf{x}_L$ 分别为薄片前、后、上、下,左、右面上的点. (10)式来自每个面上的某点处的 t_i 与这个面的面积之积.前后面的面积都是 L^2,其余面的面积为 εL^2.

把(9)和(10)式联列起来,我们得到

$$t_i(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) + t_i(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n}) + \varepsilon Q_i = 0; \quad i = 1, 2, 3.$$

因为当 $L \to 0$ 时,$\mathbf{x}_F$、$\mathbf{x}_B$ 等都趋向于 $\mathbf{x}$,并且因为我们假设在包含 $\mathbf{x}$ 的一个区域中 t 是连续的,所以每个 t_i 的第一个宗量是 $\mathbf{x}$. 利用 Q_i 的连续性和(因而)它的有界性,我们看到,可使 εQ_i 任意小,这样

$$t_i(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) + t_i(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n}) = 0; \quad i = 1, 2, 3; \tag{11}$$

或者说排除了 $\mathbf{t}$ 对 $\mathbf{x}$ 和 t 的依赖性,即

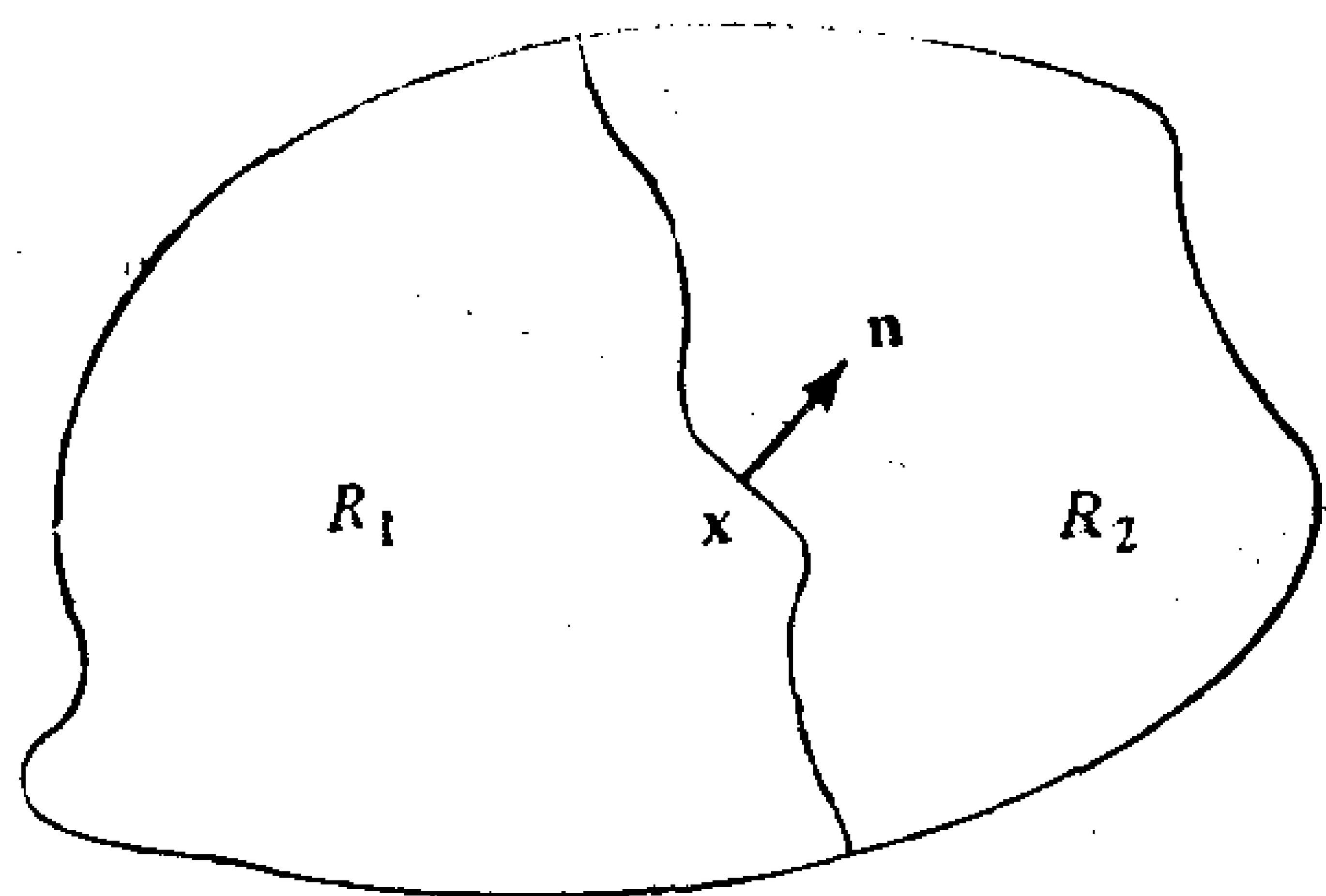


图 14.5　在 $\mathbf{x}$ 处由 R_2 的物质作用在 R_1 上的应力与由 R_2 的物质作用在 R_2 上的应力大小相等方向相反

$$\mathbf{t}(-\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{n}) \tag{12}$$

我们推出了连续介质情况下牛顿第三(作用-反作用)定律的形式.

考虑图 14.5. 时间 t 时, 在 $\mathbf{x}$ 处代表 R_1 外的邻近物质作用在 R_1 上的应力为 $t(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$,我们已证明这个应力与 $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n})$ 在数值上相等,方向上相反,而 $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n})$ 则代表 R_2 外邻近物质在 $\mathbf{x}$ 处对 R_2 的作用.

应力张量

我们现在证明 $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ 可以表示为 $\mathbf{t}(\mathbf{e}^{(1)})$, $\mathbf{t}(\mathbf{e}^{(2)})$ 和 $\mathbf{t}(\mathbf{e}^{(3)})$的线性组合. 为此,我们把 (9) 式应用于图 14.6 的四面体. 互相垂直面积为 S_i 的表面垂直于正交基矢量 $\mathbf{e}^{(i)}$. 这些面相交于 $\mathbf{x}$,"斜"

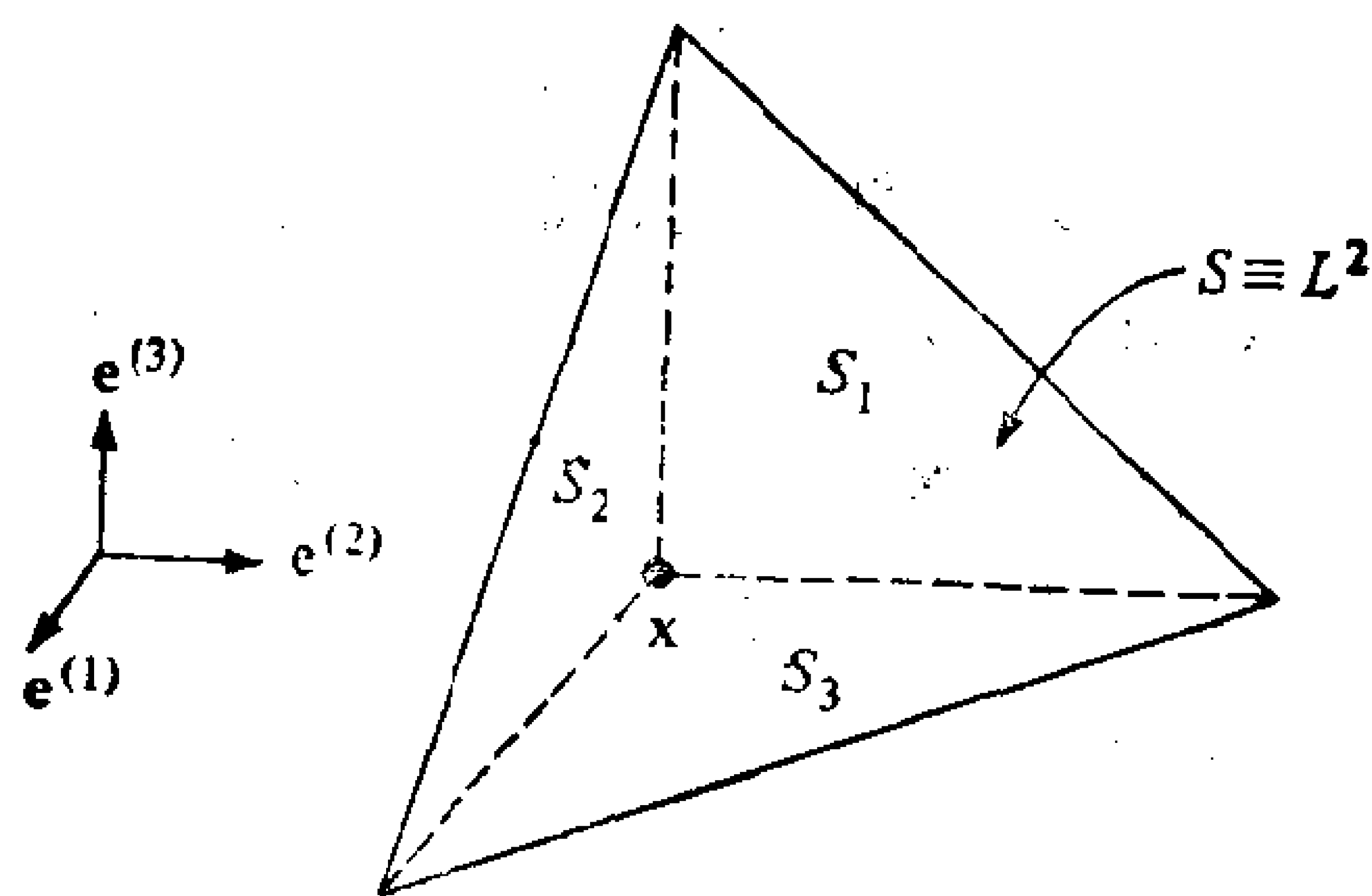


图 14.6　斜面面积为 $S = L^2$ 的四面体. 在 $L \to 0$ 时应用局部应力平衡原则得到应力矢量和应力张量之间的关系(17)式

面的面积为 S,我们把 L 定义为 $L \equiv S^{\frac{1}{2}}$.

按照积分中值定理,作用在面积为 S_i 的表面上的力的第 j 个分量为

$$S_i t_j(\mathbf{x}^{(i)}, t, -\mathbf{e}^{(i)}); \quad i, j = 1, 2, 3,$$

式中 $\mathbf{x}^{(i)}$ 是这个面上的一个点. 令 $\mathbf{n}$ 为垂直于面积为 S 的表面的单位外法线. 于是,对于斜面上的某点 $\mathbf{x}^{(0)}$, $St_j(\mathbf{x}^{(0)}, t, \mathbf{n})$ 是作用在这个面上力的第 j 个分量. 因为 S_i 是 S 在第 i 个坐标面上的投影,所以

$$S_i = [\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}^{(i)}]S = n_i S, \tag{13}$$

式中 n_i 是 $\mathbf{n}$ 的第 i 个分量. 应用(9)式,并利用 $L^2 \equiv S$, 我们得到

$$\sum_{i=1}^{3} n_i t_j(\mathbf{x}, t, -\mathbf{e}^{(i)}) + t_j(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = 0. \tag{14}$$

我们已利用了下列事实: 由中值定理选得的所有 $\mathbf{x}^{(q)}$ 都必须趋向 $\mathbf{x}$; $q = 1, 2, 3$. 利用(12)式,我们可把(14)式改写为

$$t_j(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \sum_{i=1}^{3} n_i t_j(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}^{(i)}), \quad j = 1, 2, 3. \tag{15}$$

我们把 T_{ij} 定义为

$$\boxed{T_{ij}(\mathbf{x}, t) \equiv t_j(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}^{(i)})} \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{16}$$

(参阅图 14.7)现在我们最终把(15)式改写为

$$\boxed{t_j(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \sum_{i=1}^{3} n_i T_{ij}(\mathbf{x}, t)} \quad j = 1, 2, 3. \tag{17}$$

利用点积符号的推广,有时我们可把(17)式写作

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot T(\mathbf{x}, t).$$

(这种直接表示法将在卷 II 中广泛地采用.)

非常重要的关系式 (17) 表明,应力矢量 $\mathbf{t}$ 对单位外法线矢量的依赖性必然具有线性形式. 九个分量 T_{ij}; $i, j = 1, 2, 3$ 称之

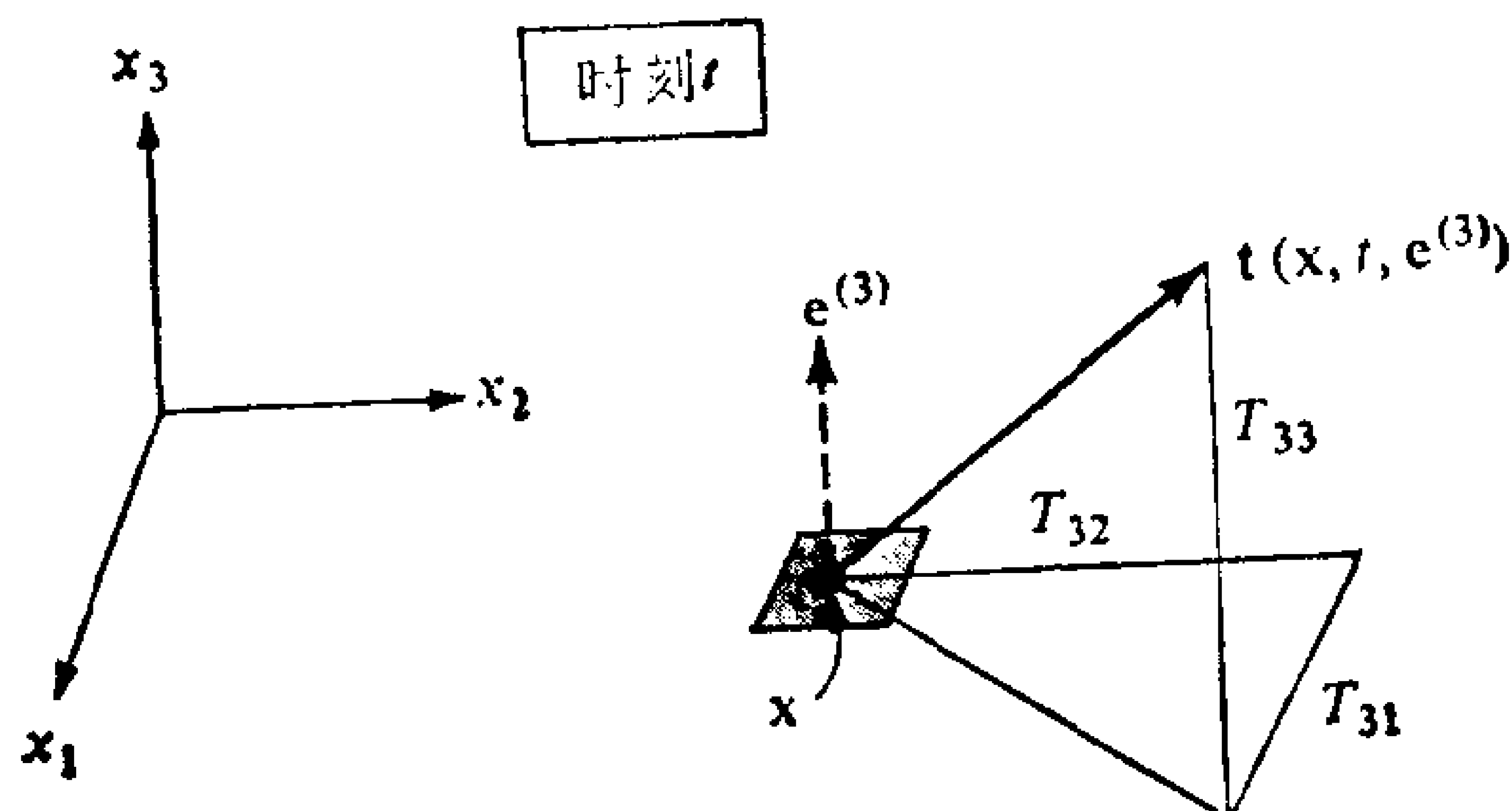


图 14.7　应力张量的某些分量．阴影面积表示在点 $\mathbf{x}$ 处具有单位法线 $\mathbf{e}^{(3)}$ 的面元．时间 t 时面元上面的物质对面元下面的物质的作用为应力矢量 $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}^{(3)})$．这个矢量的三个分量为 T_{31}，T_{32} 和 T_{33}．

为**应力张量 T 的分量**．术语张量的意义将在第II卷第二章中详细讨论．但是，值得记住的是 T_{ij} 的第一个分量，代表垂直于上面作用着用 T_{ij} 的第二个分量表示的应力的面上的单位矢量．［参阅定义式(16)］一个很好地帮助记忆的符号为

First ace　　　**S**econd tress

例如，T_{13} 是表示作用在外法线指向 x_1 增加方向的面（元）上的应力矢量的第三个分量．

微分方程形式的牛顿第二定律

作为(17)式的第一个结果，我们看到动量守恒方程(7)的表面项的第 j 个分量可以写作

$$\iint_{\partial R(t)} t_j d\sigma = \iint_{\partial R(t)} \sum_{i=1}^{3} n_i T_{ij} d\sigma$$

$$= \iiint_{R(t)} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(T_{ij}) d\tau, \tag{18}$$

其中，在最后一个方程中我们已用了散度定理，由此，(7)式可用分量形式写作

$$\iiint_{R(t)} \left[\rho \frac{Dv_j}{Dt} - \rho f_j - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(T_{ij}) \right] d\tau = 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

因为 $R(t)$ 是任意的，如果我们假设被积函数是连续的，我们可写出

$$\boxed{\rho\frac{Dv_j}{Dt}=\rho f_j+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(T_{ij})}\quad j=1,2,3. \tag{19}$$

用方向符号，(19)式写为

$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt}=\rho\mathbf{f}+\nabla\cdot\mathbf{T} \tag{20}$$

关系式(19)和(20)是**柯西微分方程**，表示任何连续介质的线动量平衡[1]. 用来得到这些关系式的仅有的假设是所涉及的函数足够光滑以及[用来得到(6)式的]质量守恒.

练　　习

1. 令 S 表示图14.5画出的区域 R_1 和 R_2 的共同的物质边界. 分别对 R_1、对 R_2 和对 R_1+R_2 写出线动量平衡的积分方程. 推导出

$$\iint_S[\mathbf{t}(\mathbf{x},t,-\mathbf{n})+\mathbf{t}(\mathbf{x},t,\mathbf{n})]d\sigma=0,$$

并因此而得到(11)式的另一种推导方法.（与方程(12.1.45)的推导作比较.）

†2. 在某二维问题中，应力张量具有四个非零分量：T_{11}，T_{12}，T_{21}，和 T_{22}. 用这四个量求在矢量 $\mathbf{i}-\mathbf{j}$ 方向物质作用在外法线方向为矢量 $2\mathbf{i}+\mathbf{j}$ 的面积为 dA 的面元上的力.

3. (a) 试证明，如果没有体力作用，那末

$$T_{11}=T_{22}=T_{33}=T_{12}=T_{21}=0,$$
$$T_{13}=T_{31}=x_2(x_1-1),$$

并且

1) 如果动量是守恒的，那末一个微团的动量仅由于通过它的边界的动量流量而改变. 在(19)式中的体力项提供了一个额外的动量源. 因此习惯上都说“平衡”而不说“守恒”.

$$T_{32}=T_{23}=\frac{1}{2}(x_1^2-2x_1-x_2^2),$$

可以是静止物质应力张量的分量.

(b) 考虑一个无限长的横截面如图 14.8 所示的等角三棱柱体. 如果应力张量就是(a)中给出的,那末作用在这个柱体每个侧面上的力为零

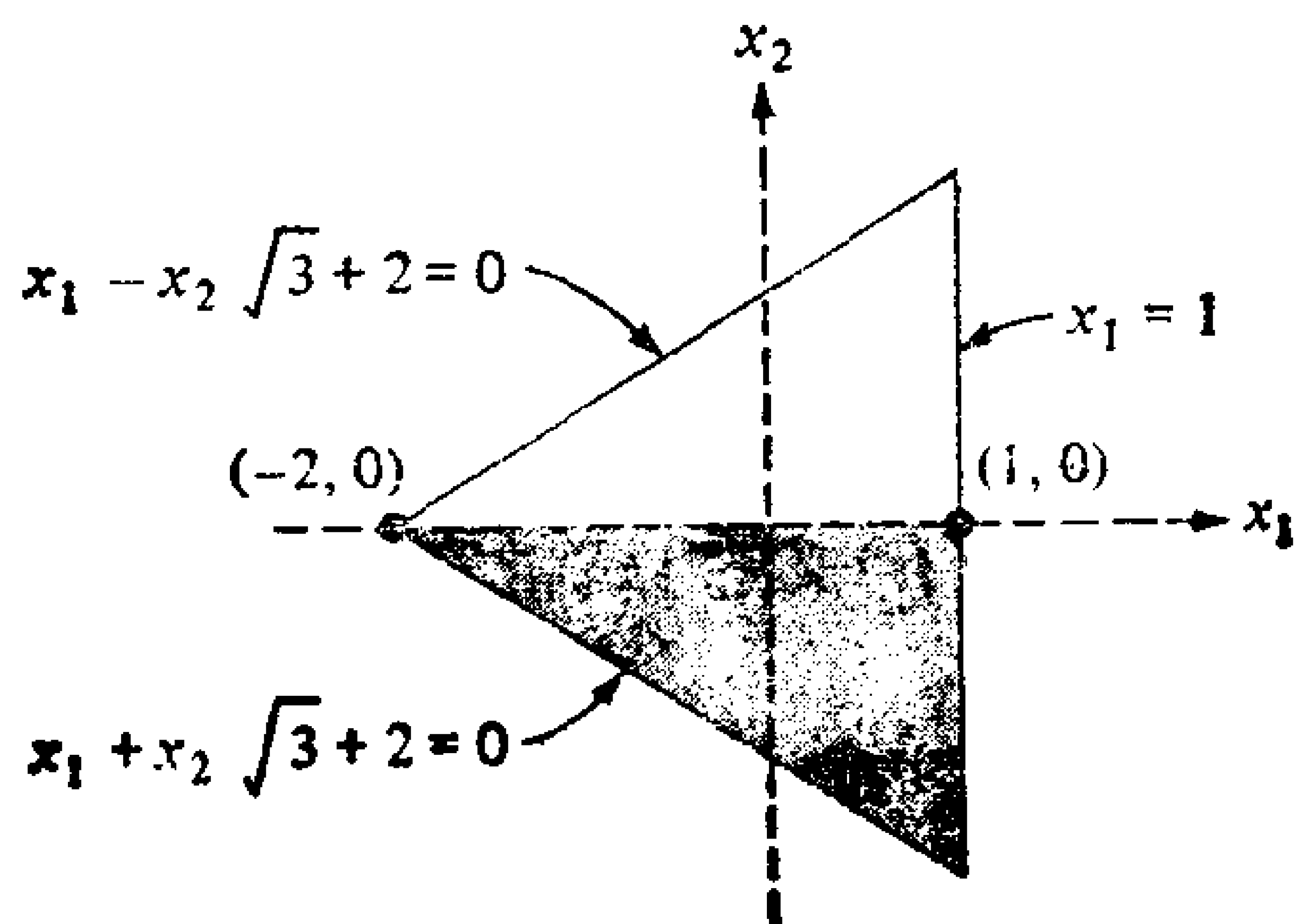


图 14.8 三棱柱体的横截面.

†(c) 求下面的阴影区域作用在上面的无阴影区域(沿 x_3 方向单位长度上)的净力.

4. (a) 利用质量守恒证明 $\rho D\mathbf{v}/Dt$ 的第 i 个分量为

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial(v_j\rho v_i)}{\partial x_j}+\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t}.$$

从(19)式推导线动量交换方程

$$\frac{d}{dt}\iiint_R \rho\mathbf{v}d\tau=\iiint_R \rho\mathbf{f}d\tau+\oiint_{\partial R}[\mathbf{t}-\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})]d\sigma, \quad (21)$$

这里 R 是固定在空间中的一个区域.

(b) $\rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})$ 的第 i 个分量为 $\sum_{j=1}^{3}\rho\mathbf{v}_i\mathbf{v}_j\mathbf{n}_j$. 这九个分量 $\rho v_iv_j(i,j=1,2,3)$ 称为动量流量张量的分量. 为什么这是一个合适的名词? (注意词"动量流量". 张量的意义将在下面讨论. 也可参阅练习 4.5.)

5. 假定流体绕一有界物体作定态运动．令 S 为包围该物体的一个假想的表面（图 14.9）．假定 $\mathbf{f}=0$．设 $\mathbf{K}$ 为作用在该物体上的力．试用线动量交换方程推导 $\mathbf{K}=\oiint_S[\mathbf{t}-\rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})]d\sigma$．（因此作用于浸没在定常流中某物体上的力可从远离这个物体处发生的情况推论出来．参阅练习 6.）

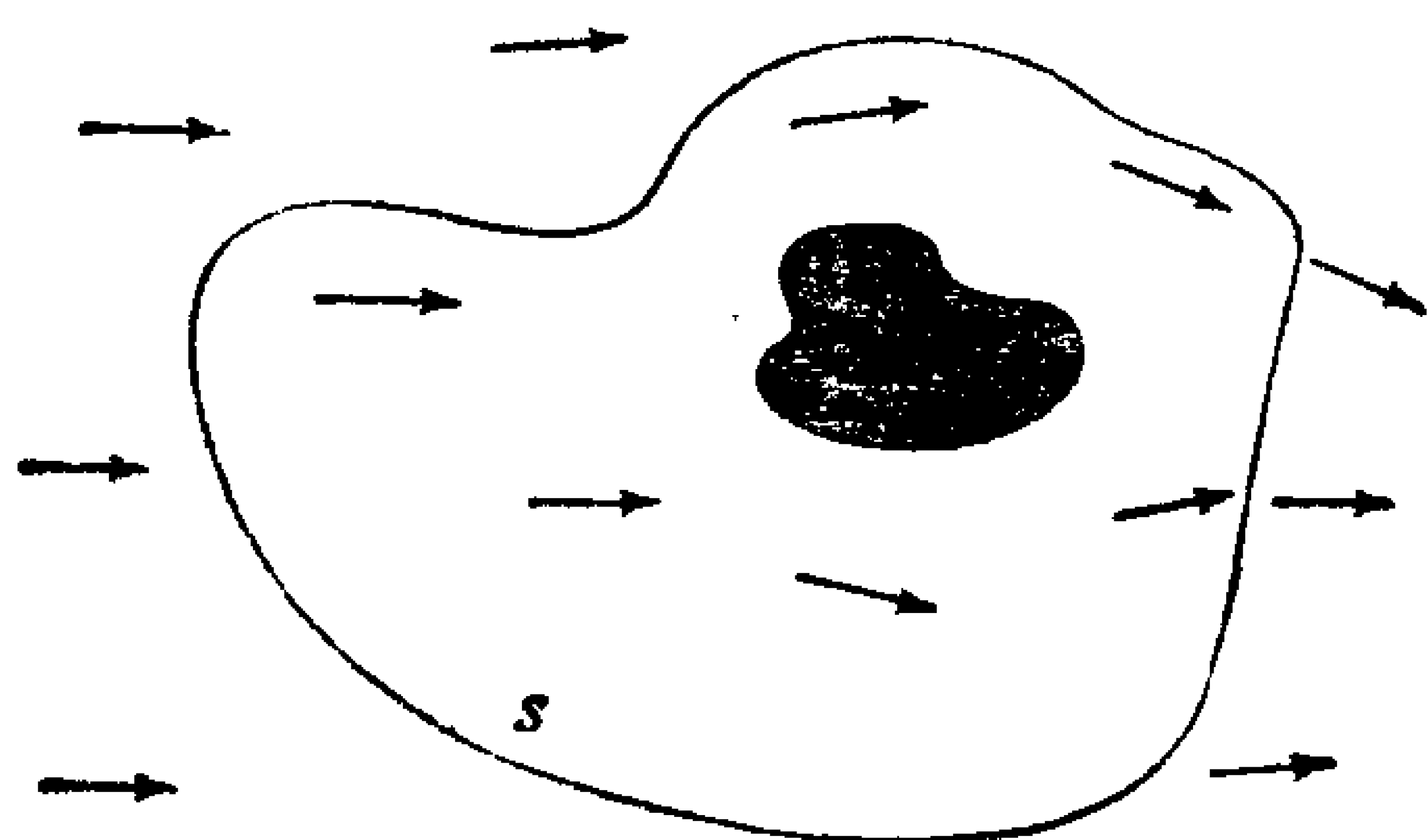


图 14.9 知道了控制面 S 处的应力和速度情况就可以计算作用在物体上的力．

†6. 考虑一均匀的定常流绕物体的流动．假定流体是无粘性的，因此（由 15.1 节）$\mathbf{t}=-p\mathbf{n}$，其中 p 是压强．再假定

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_\infty+O(|\mathbf{x}|^{-3}),\quad p=p_\infty+O(|\mathbf{x}|^{-3}),\tag{22}$$

式中常数 $\mathbf{v}_\infty$ 和 p_∞ 代表 $|\mathbf{x}|=\infty$ 处的常速和常压．[如附录 3.1 所述，（当理解了"$\mathbf{x}\to\infty$"后），$\mathbf{g}(\mathbf{x})=O(|\mathbf{x}|^{-n})$ 表示 $\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty}|\mathbf{x}|^n|\mathbf{g}(\mathbf{x})|=$ 常数．]利用动量交换方程证明作用在物体上的力为零．（参阅附录 15.1．）

7.（a）为了种种目的，值得把柯西方程（19）写成物质坐标下的形式．我们得到

$$\delta\frac{\partial^2x_j}{\partial t^2}=\delta F_j+\left[\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathscr{T}_{ij})\right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{A},t)}.\tag{23}$$

在（23）式右端的体力和应力张量项定义为

$$F_j(\mathbf{A},t)=f_j[\mathbf{x}(\mathbf{A},t),t],$$

$$\mathscr{T}_{ij}(\mathbf{A}, t) = T_{ij}[\mathbf{x}(\mathbf{A}, t), t].$$

用什么方程能证明(19)式左端变换到(23)式左端是合理的?

(b) (23)式的一个弱点是它包含一个对应变量 x_i 的导数，而自变量为 A_i. 用连锁法则作必要的调整. 为此利用连锁法则从结果 $\partial A_i/\partial A_j = \delta_{ij}$ 导出量 $\partial A_j/\partial x_i$ 的表达式.

(c) 对于无粘流体

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathscr{T}_{ij}) \quad 变为 \quad -\frac{\partial}{\partial x_j} p,$$

式中 p 是压强,(23)式变为

$$\rho \frac{\partial^2 x_j}{\partial t^2} = \rho F_j - \frac{\partial p}{\partial x_j}.$$

推导

$$\sum_{j=1}^{3} \rho \left(\frac{\partial^2 x_j}{\partial t^2} - F_j \right) \frac{\partial x_j}{\partial A_k} = -\frac{\partial p}{\partial A_k}, \quad k = 1, 2, 3. \tag{24}$$

8. 假定带撇的坐标系相对于不带撇的坐标系转动了一个角 θ，因而

$$x_1 = x_1' \cos\theta - x_2' \sin\theta,$$
$$x_2 = x_1' \sin\theta + x_2' \cos\theta,$$

和

$$x_1' = x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta,$$
$$x_2' = -x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta.$$

(a) 试求出带撇和不带撇的坐标中二维应力张量的分量之间的关系,证明下列推理

$T_{22}' \equiv$ 在垂直于 2′ 方向的面上作用的沿 2′ 方向的应力分量.

外法线沿 2′ 方向面上的第 i 个应力分量为

$$t_i = -\sin\theta T_{1i} + \cos\theta T_{2i}.$$

因此,

$$T'_{22} = T_{11}\sin^2\theta - (T_{12} + T_{21})\sin\theta\cos\theta + T_{22}\cos^2\theta.$$

(b) 类似地，试证明

$$T'_{12} = -T_{11}\sin\theta\cos\theta + T_{12}\cos^2\theta$$
$$- T_{21}\sin^2\theta + T_{22}\sin\theta\cos\theta,$$

并求 T'_{21} 和 T'_{11} 的表达式.

14.3 角动量平衡

在本节中，我们来建立角动量平衡方程，首先，让我们复习一下初等质点动力学中学过的材料.

扭矩和角动量

由作用在 $\mathbf{x}$ 点上的力 $\mathbf{f}$ 所引起的绕原点 O 的**扭矩** $\mathbf{M}$(或力矩)，其定义为下式

$$\mathbf{M} = \mathbf{x}\wedge\mathbf{f}, \tag{1}$$

式中 $\wedge$ 表示**矢量积**，如果

$$\mathbf{f} = f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{x} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k},$$
$$\mathbf{M} = M_1\mathbf{i} + M_2\mathbf{j} + M_3\mathbf{k}, \tag{2}$$

那末，具体地讲，有

$$M_3 = x_1f_2 - x_2f_1. \tag{3}$$

因此，$\mathbf{M}$ 的第三个分量（绕 x_3 轴的矩）可以用力分量 f_1 和 f_2 与它们各自的"杠杆臂"x_2 和 x_1 相乘的积来计算，其符号采用逆时针贡献为正、顺时针贡献为负的习惯(见图 14.10[1].)类似的结果也适用于 M_1 和 M_2.

如果在 $\mathbf{x}$ 处的一个质点具有动量 $\mathbf{P}$，它绕 O 的**动量矩**或**角动量**定义为 $\mathbf{x}\wedge\mathbf{P}$. 假定一个质点系受到(象重力那样的)互为中心力的作用，所谓**中心力**指的是作用力沿着互相作用着的两个质点之间的连线，那末质点力学中的一个**定理**指出，每个质点动量矩的

---

1) 这个符号也可用右手法则来记忆. 把大姆指指向 x_3 的方向(从纸中出来). 于是，右手指将指向绕这个轴的矩为正的方向.

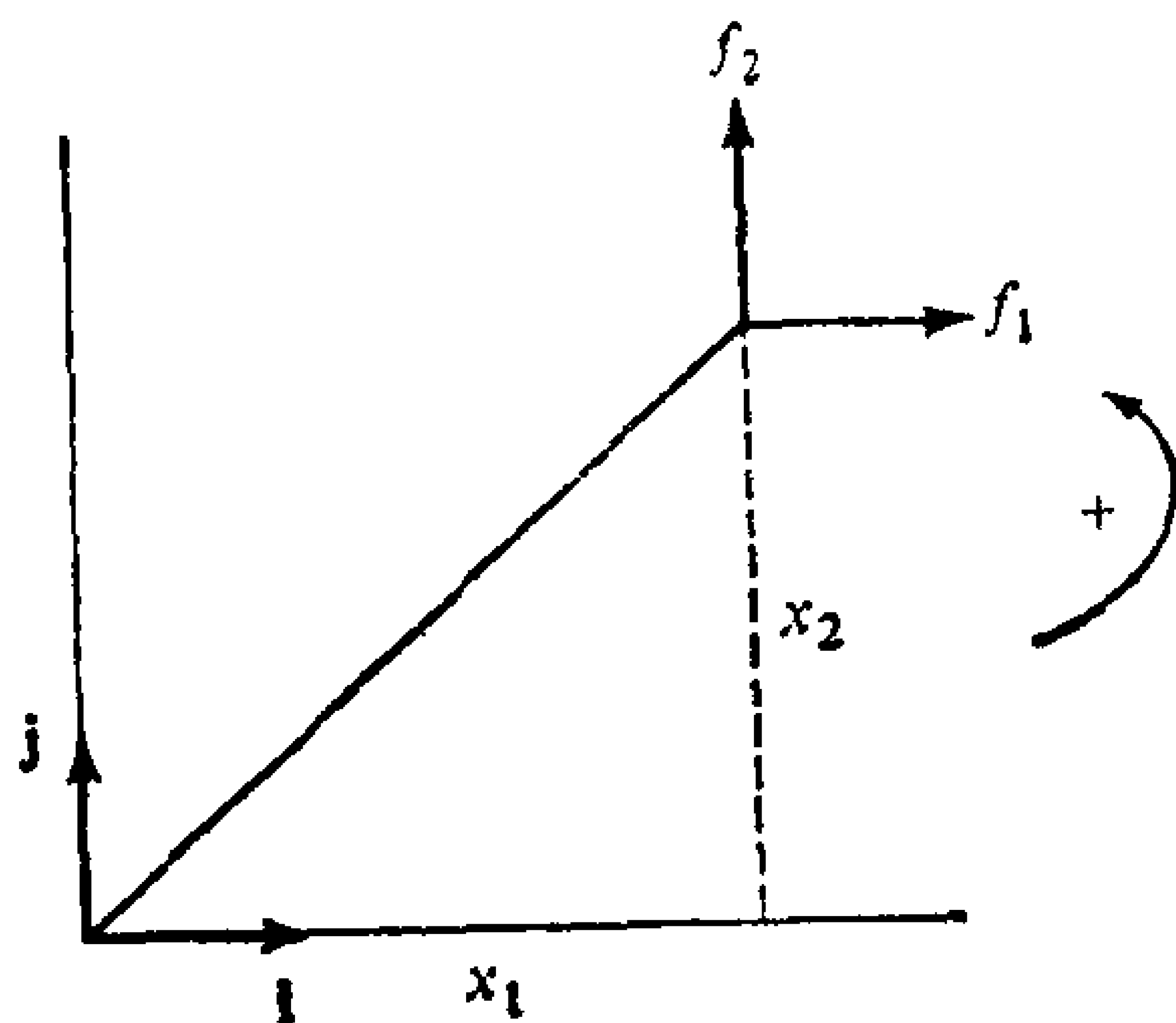


图 14.10 力分量 f_1 和 f_2 的杠杆臂为 x_2 和 x_1。
对绕原点扭矩的逆时针贡献看作是正的。

改变率为作用在质点上的扭矩之和。

在连续力学中，我们不仅讨论象重力那样的有心作用体力，而且也处理材料与材料之间很不相同的接触力。现在，我们必须作如下的假设：在任何"不运动的"或惯性坐标系中，动量矩的改变速率等于体力或表面应力所作用的扭矩。为了把这个假设表述得更精确，我们必须把质点力学中所用的动量矩和扭矩概念加以普遍化，但是这是直截了当的。因此，我们假设

$$\frac{d}{dt}\iiint_{R(\ )}(\mathbf{x}\wedge\rho\mathbf{v})\,d\tau$$

$$=\iiint_{R(t)}\mathbf{x}\wedge\rho\mathbf{f}+\iint_{\partial R(t)}(\mathbf{x}\wedge\mathbf{t})\,d\sigma. \tag{4}$$

极性流体

假设(4)并不显然成立。事实上，在某些情况下，它是根本不成立的。对于极性流体，它一般都包含有长分子，我们必须引进单位质量的内部角动量 **l**。因此，除了通常的线动量矩的贡献外，总的角动量矩还包括内部角动量的贡献。我们在(4)式中假定，动量矩只随改变线动量的同样的体力和表面应力而改变。现在我们允许有单位质量的体扭矩 **g** 和单位面积的应力偶 **c** 的存在。那末，

对于极性流体，代之以(4)式，我们假定

$$\frac{d}{dt}\iiint_{R(t)}(\mathbf{x}\wedge\mathbf{v}+\mathbf{l})\rho d\tau$$

$$=\iiint_{R(t)}(\mathbf{x}\wedge\mathbf{f}+\mathbf{g})\rho d\tau+\iint_{\partial R(t)}(\mathbf{x}\wedge\mathbf{t}+\mathbf{c})d\sigma. \tag{5}$$

只要能够采用笛卡儿张量，(5)式的运算便不困难（参阅第 II 卷练习 2.3.12）。我们引进这个式子是为了抵消因为接受(4)式的自足情绪。因此我们在本节不再进一步考虑 (5) 式。(5) 式可能用来分析液晶实验，示明这些用途的参考文献是 H. Gasparoux 和 J. Proust [*J. Phys*. **32**, 953 (1971)] 和 H. Tseng, D. Silver 和 B. Finlayson [*Phys. Fluids* **15**, 1213 (1972)] 的文章。

应力张量的对称性

在研究质量守恒和线动量平衡时，我们从适当定律的积分陈述出发，并以推导出微分方程为结果。从角动量平衡关系式 (4)，可以推导出一个甚至更叫人惊奇的结果，即

$$T_{ij}(\mathbf{x},t)=T_{ji}(\mathbf{x},t). \tag{6a}$$

换言之，"当动量矩等于由体力和表面应力引起的扭矩之和时，应力张量是对称的。"用直接的记法，对称性可用下列方程来表示。

$$T=T^{\mathrm{Tr}}, \tag{6b}$$

式中 Tr 表示转置。

一旦我们掌握了笛卡儿张量这一工具，那末(6)式的证明便可归为一个练习（第 II 卷练习 2.3.11）。有些人则宁肯暂时认为 (6) 的对称性是理所当然的。

(6)式的另一种证明则是沿着类似于上节的推导方法进行的。建立一个局部力矩平衡的原则。再把这个原则应用于一个立方体便得到所指望的结果。这种论证并不特别短，但却能使我们从中获得熟悉"应力张量"和"力矩"符号的好处。在本节的其余部分便给出这个论证。

局部力矩平衡原则

类似于对线动量的讨论,我们首先把基本的积分假设(4)应用于以长度 L 表征的一族相似区域 R_L. 对于(4)式中的体力项,我们可得到如下的估算:

$$\left|\iiint_{R_L(t)} (\mathbf{x}\wedge\rho\mathbf{f})d\tau\right| \leqslant |\mathbf{x}\wedge\rho\mathbf{f}|_{\max}\cdot \quad R_L(t)\text{ 的体积}, \tag{7}$$

式中 $|\mathbf{P}(\mathbf{x})|_{\max}$ 表示 $\mathbf{x}$ 在 R_L 中取值时,$|\mathbf{P}|$的最大值. [参阅练习 3(a).]

正如我们已经提到的那样,R_L 的体积为 $\lambda_R L^3$ 这里 λ_R 仅依赖于区域 R_L 的形状,而不依赖于它的大小. 令 ϕ 表示 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{f}$ 之间的角度. 因为 $|\sin\phi|\leqslant 1$,

$$\begin{aligned}|\mathbf{x}\wedge\rho\mathbf{f}|_{\max} &= [|\mathbf{x}||\rho\mathbf{f}||\sin\phi|]_{\max}\\ &\leqslant |\mathbf{x}|_{\max}|\rho\mathbf{f}|_{\max}.\end{aligned}$$

因此

$$\left|\iiint_{R_L(t)} (\mathbf{x}\wedge\rho\mathbf{f})d\tau\right| \leqslant \lambda_R L^3|\rho\mathbf{f}|_{\max}|\mathbf{x}|_{\max}.$$

按照练习 3(b),我们可以把(4)式中的惯性项作变换如下

$$\frac{d}{dt}\iiint_{R(t)} (\mathbf{x}\wedge\rho\mathbf{v})d\tau = \iiint_{R(t)}\left(\mathbf{x}\wedge\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt}\right)d\tau. \tag{8}$$

因此,(4)式中的惯性项可以象体力项那样加以处理,它也以正比于 $L^3|\mathbf{x}|_{\max}$ 的表达式为界. 因此我们得到了**局部力矩平衡原则**

$$\lim_{L\to 0}\frac{1}{L^2|\mathbf{x}|_{\max}}\iint_{\partial R_L(t)}(\mathbf{x}\wedge\mathbf{t})d\sigma = 0. \tag{9}$$

一个立方体的局部力矩平衡

现在让我们把(9)式应用于边长为 L 的立方体 C. 我们这样来选择笛卡儿坐标,使得原点位于立方体的一角,三根轴的指向沿它的三条边(图 14.11). 立方体的各个面分别有外法线 $\pm\mathbf{i}$, $\pm\mathbf{j}$,

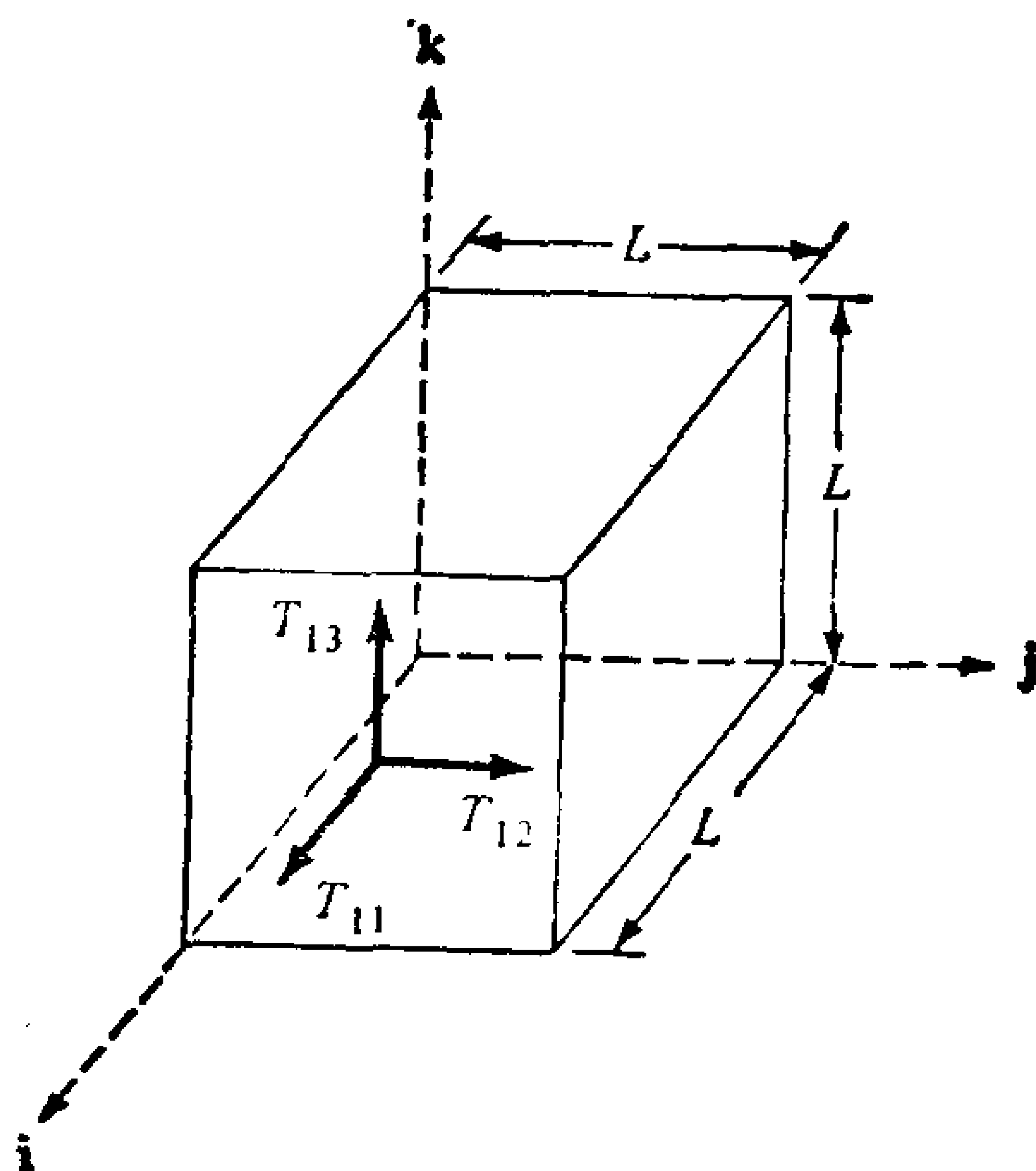


图 14.11 应用于局部动量平衡的立方体. 在最前面面上的三个分量在数值上等于所示出的应力张量的分量.

$\pm \mathbf{k}$，因此作用在这些面上的应力张量的分量就是加上合适的符号后的应力张量 T_{ij} 的分量. 对于 C，$|\mathbf{x}|_{max} = \sqrt{3}\, L$，因此局部力矩平衡原则(9)式变为

$$\lim_{L\to 0} \frac{1}{L^3} \iint_{\partial C} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{t}) d\sigma = 0. \tag{10}$$

我们将详细讨论绕 x_3 轴的力矩，但是，我们却把对其他轴的类似的处理留给读者（练习 5). 因为我们自始至终讨论时间 t 时的情况，在得到最后结果之前，我们将不明确地指出各个量对时间的依赖性.

在 C 的平面 $x = L$ 处的面上，应力矢量 $\mathbf{t}(L, y, z)$ 具有分量 $T_{1i}(L, y, z)$，$i = 1, 2, 3$. 因为有(3)式，这三个分量对绕 $\mathbf{k}$ 的力矩贡献分别为

$$-\int_0^L \int_0^L T_{11}(L, y, z)\, y\, dy\, dz,$$

$$L \int_0^L \int_0^L T_{12}(L, y, z)\, dy\, dz,\ 0, \tag{11}$$

当然，T_{13} 对绕 k 轴的动量没有贡献. 由作用在平面 $x = 0$ 上的应

力所作的贡献为

$$\int_0^L \int_0^L T_{11}(0, y, z)\, y\, dy\, dz,\ 0,\ 0. \tag{12}$$

T_{12} 对(12)式的贡献为零，因为它的杠杆臂长度为零. T_{11} 的贡献，其符号需要仔细地加以考虑. 因为 $\mathbf{t}(\mathbf{i}) = -\mathbf{t}(-\mathbf{i})$, $\mathbf{t}(0, y, z)$ 具有分量 $-T_{1i}(0, y, z)$, $i = 1, 2, 3$. 第一个分量 $-T_{11}$ 指向 $\mathbf{i}$ 的方向，因此，$-T_{11}$ 和它的杠杆臂 y 的乘积前必须冠以负号.

把(11)和(12)式相加，然后应用积分中值定理，我们得到净贡献为

$$\begin{aligned} &-[T_{11}(L, y_1, z_1) - T_{11}(0, y_1, z_1)]y_1 L^2 \\ &+ T_{12}(L, y_2, z_2)L^3, \end{aligned} \tag{13}$$

式中

$$0 \leqslant y_i, \quad z_i \leqslant L, \quad i = 1, 2. \tag{14}$$

利用导数的中值定理，我们得到

$$\begin{aligned} &T_{11}(L, y_1, z_1) - T_{11}(0, y_1, z_1) \\ &= \frac{\partial T_{11}}{\partial x}(x_1, y_1, z_1)L;\ \ 0 \leqslant x_1 \leqslant L. \end{aligned}$$

因此，(13)式中第一项的绝对值小于

$$\left|\frac{\partial T_{11}}{\partial x}(x_1, y_1, z_1)\right|_{\max} L^4.$$

当(10)式的极限适用时，这个 $O(L^4)$ 项将趋向于零.（我们假定 $\partial T_{11}/\partial x$ 和类似的量都是有界的.）

让我们来考虑由作用在 $y = 0$ 和 $y = L$ 面上的应力所造成的绕 $\mathbf{k}$ 的力矩贡献. 我们刚才给出的这类论证表明 T_{2j} 的贡献为

$$-T_{21}(x_3, L, z_3)L^3,\ O(L^4),\ 0;\ \ 0 \leqslant x_3,\ z_3 \leqslant L \tag{15}$$

类似地，$z = 0$ 和 $z = L$ 面上的贡献都是 $O(L^4)$. 把(10)式应用于立方体 C，我们得到

$$T_{12}(0, 0, 0) = T_{21}(0, 0, 0). \tag{16}$$

类似地（练习5），

$$T_{31}(0, 0, 0) = T_{13}(0, 0, 0)$$

和

$$T_{23}(0,0,0)=T_{32}(0,0,0). \tag{17}$$

因为原点取在我们最初考虑时所选择的任意点上，所以(16)和(17)式对任何点都适用．因此，(6)式得到了证明．

练　　习

1. 设 $\mathbf{f}=f_1\mathbf{i}+f_2\mathbf{j}$ 是作用在 $\mathbf{x}=x_1\mathbf{i}+x_2\mathbf{j}$ 处的一个力．试证明公式 $M_3=|\mathbf{f}|d$ 是(3)式的另一种形式，其中 $|\mathbf{f}|=(f_1^2+f_2^2)^{1/2}$．这里 d 是从原点到 $\mathbf{f}$ 的"作用线"的垂线长度，如图 14.12 所示．

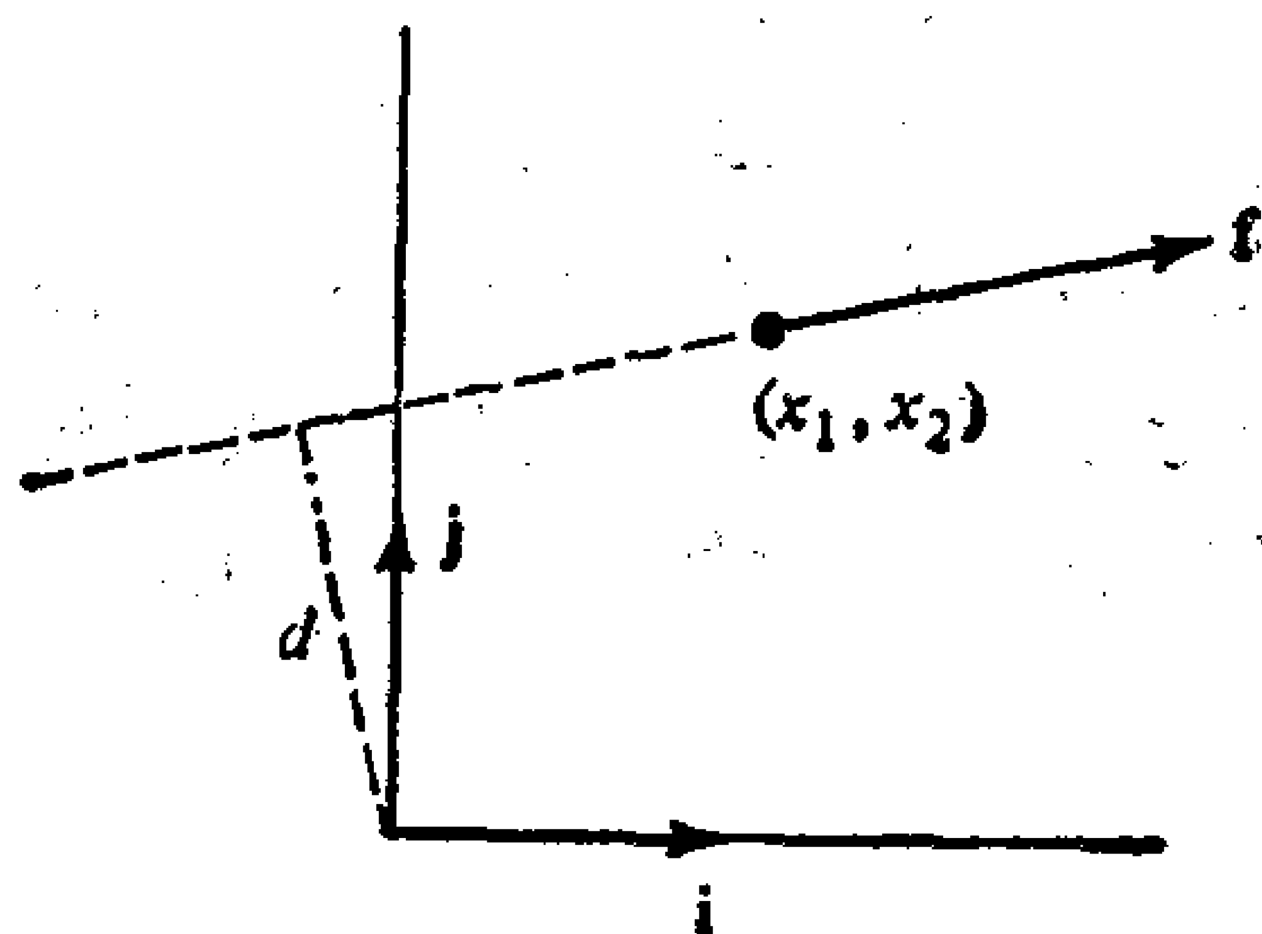


图 14.12　对于绕原点力矩的计算，f 的"杠杆臂"的长度为 d．

2. 试证明如果坐标平移成 $\mathbf{x}$ 变为 $\mathbf{x}+\mathbf{k}$，其中 $\mathbf{k}$ 为一个常矢量，式(4)仍然正确．
3. †(a) 证明(7)式；
   (b) 推导(8)式．
4. (a) 在课文中叙述了关于立方体 C 在平面 $y=0$，$y=L$，$z=0$，$z=L$ 上的面上所造成的对绕 $\mathbf{k}$ 的力矩的贡献，试证明这些结果是正确的．
   (b) 利用练习 2.3 的数据（图 14.8），求 $x_3=0$ 上面的物质对 $x_3=0$ 下面的物质所作用的绕原点的扭矩．
5. 试证明
   (a) $T_{31}=T_{13}$；

(b) $T_{25} = T_{52}$.

14.4 能量和熵

任何连续介质所满足的一组完整的场方程，都需要引进热力学概念．以任何程度的彻底性去做到这一点都需要作出相当的努力，而读者却可能正厌倦一般性的考虑．为了那些由于经常接触具体问题而感到新鲜的读者，我们在本节开始对理想气体这种特殊情况作了讨论[1]．事实上，除了作为练习课题的某些重要普遍结果之外，对于理想流体的题材以后(在 15.3 和 16.3 节讨论声波时)经常要用的仅是它热力学材料．

为了完整起见，必须把能量和熵的考虑包括进来．在应用数学的许多领域里，这种考虑起着重要的作用．那些希望具有连续介质力学的稳固基础的人，有时必须回到本节从标有"平衡热力学"开始的这个主要部分上来．在其中，他能找到对能量平衡的普遍微分方程、吉布斯关系，熵增大的克劳修斯-Duhem 定理等的讨论．

理想气体

实验结果表明，在低压下，n 摩尔[2]气体的压力 P 和体积 V_n 的乘积等于 n、温度 Θ 和对所有气体都相同的常数 $\mathscr{R}$ 的乘积．此外，在低压下内能则几乎完全由温度所决定．由于得到读者可能受到影响的简单的分子运动论的支持，所以便导致人们去定义一种**理想气体**，这是一种满足如下状态方程的"模型"物质:

$$PV_n = n\mathscr{R}\Theta, \quad E = E(\Theta) \quad (\mathscr{R} = 8.3143 \text{ 焦耳/摩尔·度}) \tag{1a,b}$$

如果容许百分之几的误差，那末在 2 大气压以下，通常的气体便可看作是理想气体．

---

1) 这些材料可以在 14.2 节以后阅读．

2) 我们记得，一摩尔的气体具有以克为单位，数值上等于该气体分子量的质量．它包含的分子数等于阿佛伽德罗数: 6.0225×10^{23}．

特别是如果两边除以 M_n，问题(1a)便取更加方便的形式。因此，我们可以写出

$$P=\frac{M_n}{V_n}R\Theta, \tag{2a}$$

式中 $R=n\mathscr{R}/M_n$ 对任何具体的气体，它都是一个常数。我们也注意到，可以证明，(1b)式可以用下列关系来代替：

$$E=C_V\Theta+\text{常数}, \tag{2b}$$

式中 C_V 是定容比热[练习 1(a)]。

就象通常热力学中的基本处理方法那样，我们到此为止的讨论涉及到均匀地充满气体的一个容器。我们的目标在于建立一个其中条件变化的气体理论，但我们可能通过假设(2a)和(2b)式仍然局部成立，以最简单的方式进行处理。于是，我们写出

$$p=\rho R\theta,\quad e=c_v\theta+\text{常数}, \tag{3a,b}$$

式中 $\rho=\rho(\mathbf{x},t)$ 是单位体积的局部质量，$\theta=\theta(\mathbf{x},t)$ 是局部温度，$p=p(\mathbf{x},t)$ 是局部压力，$e=e(\mathbf{x},t)$ 单位质量的局部内能，c_v 是局部比热[1)]。

普通物理教科书给出了证明下列假设的论据：

$$\mathbf{t}(\mathbf{x},t,\mathbf{n})=-p(\mathbf{x},t)\mathbf{n}, \tag{4}$$

因为应力矢量 $\mathbf{t}$ 对理想气体来说是一个合理的矢量。这里我们将接受这个假设。在 15.1 节中将要相当详细地对此进行讨论。

利用(4)式，动量平衡方程(2.20)加上质量守恒方程(1.6)给出了五个未知数的四个方程。这五个未知数是三个速度分量，密度和压力。状态方程(3a)的引进给出了另外一个关系，但却又引进了另一个变量温度。根据(3b)式，温度和系统的内能有关，因此我们需要引进一个新的物理定律、能量平衡原则或热力学第一定律[2)]。

考虑体积为 V 的单位质量的气体，第一定律指出，

---

1) 通常比热可以认为是常数，所以 C_V 和 c_v 之间没有差别。

2) 在很多情况下，流体微团的密度，甚至整个流体的密度，可以看作常数。(例如参阅 15.2 节)于是没有必要引进热力学的概念。

$$dQ = dE + PdV, \tag{5}$$

式中 dQ 是引进单位质量的热，E 是它的内能.

在我们试图把(5)式变换成偏微分方程之前，让我们注意一个重要的关系. 如果我们考虑比值 dQ/Θ，我们(利用 $dE = C_V d\Theta$ 和 $P = R\Theta/V$) 得到

$$\frac{dQ}{\Theta} = C_V \frac{d\Theta}{\Theta} + R \frac{dV}{V}. \tag{6}$$

假定 C_V 为常数. 那末(6)式的右端等于 $d(C_V \log\Theta + R\log V)$. 因此，$dQ/\Theta$ 是用状态参数 Θ 和 V 表示的全微分.（Q 本身不是状态变数.）方程(6)可以看作热力学第二定律的非常特殊的情况，该定律指出，对所有可逆(无穷缓慢)的热交换，量 dQ/Θ 是状态参数的全微分. 因此，如果我们允许可逆过程把介质恢复为初始状态，那末，我们便有

$$\oint \frac{dQ}{\Theta} = 0, \tag{7}$$

式中积分(例如)是沿着(V, Θ)状态平面中某一封闭曲线进行的. 对于可逆过程，我们最后可以用下式定义任何状态 Σ 的一个新的函数熵 S:

$$S - S_0 = \int_0^\Sigma \frac{dQ}{\Theta}, \tag{8}$$

式中的积分是沿状态平面内起点为参考状态 0、终点为 Σ 的任何道路进行的. 特别对于理想气体，如果等容比热与温度无关，则由(8)式得到

$$S = C_V \log\Theta + R\log V + 常数. \tag{9}$$

由(9)式可知，状态方程 $P = R\Theta/V$ 可以改写为下列形式

$$P = Ke^{S/C_V}V^{-\gamma}, \tag{10}$$

这里

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{R + C_v}{C_V} \tag{11}$$

是(等压和等容)比热之比，K 是气体的特征常数.（练习 1.）

现在我们反过来把(5)式当作流场的偏微分方程来重新加以表述．我们把(5)式看作代表一个给定的流体微团，我们引进实质导数．因为单位质量的体积 V 是密度的倒数，这就使我们可以写出

$$\frac{De}{Dt}+p\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)=\frac{Dq}{Dt}, \tag{12}$$

这里我们已用了局部变量． 特别是 e 是单位质量的内能． 同时 Dq/Dt 是把热量引进单位质量气体的速率．根据以前讨论热传导的经验，(在没有辐射效应时)我们指望

$$\frac{Dq}{Dt}=\frac{1}{\rho}\nabla\cdot(k\nabla\theta). \tag{13}$$

如果我们引进单位质量的熵 S 并假设局部过程是可逆的，那末我们也可把(8)式重新表述为

$$\frac{DS}{Dt}=\theta^{-1}\frac{Dq}{Dt}. \tag{14}$$

此外，(10)式变为

$$p=Ke^{s/C_V}\rho^{\gamma}. \tag{15}$$

因为 e 是状态变量的一个函数，把(9)式和(10)式结合起来，则得

$$\frac{De}{Dt}+p\frac{D(1/\rho)}{Dt}\doteq\frac{1}{\rho}\nabla\cdot(k\nabla\theta). \tag{16}$$

该式与连续方程、运动方程一起构成了三个速度变量和两个状态变量的五个微分方程．(3a)、(3b)和(15)式与五个状态变量 p, ρ, θ, e 和 s 有关．

很有希望的是，上面的讨论会使读者比较容易理解一般介质的情形．因此，必须引进能量方程和其他热力学关系，以完成基本方程的表述．为了示明我们可以把整个方程组应用于实际，作为一个例子，(如同上面提到的那样)我们指出，它可用来研究声波．如果我们考虑初始密度为 ρ_0 的均匀气体中如下的小扰动，

$$\rho=\rho_0(1+\sigma)$$

并且

$$\sigma \ll 1,$$

那末我们可以证明，在线性近似中，σ 满足波动的偏微分方程

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2},$$

式中 c_0 是波速，它在介质中为常数. 关于这个问题，读者可能希望作详细的讨论，这将在 15.3 节中给出.

在完成了我们对一个重要问题的讨论以后，我们现在反过来对力学中的热力学考虑作一般的讨论. 我们将以更一般的方式更完整的内容来重复上面所得出的一些观点.

平衡热力学

一般，热力学的初等处理只考虑在空间和时间上性质均匀的材料. 人们曾经引进过**热静力学**这个名词以强调只有无穷小地缓慢的过程才能直接用初等理论加以讨论. 我们将保留**平衡热力学**这一较古老的术语.

我们希望研究性质随时随地改变的材料，因此我们不能把自己限制于平衡的概念. 另一方面这些比较简单的概念又必须为我们的讨论提供基础. 虽然，我们一般地总是承认基本的物理原则方面的知识，但是经验表明，象熵这样的热力学概念是远非象力、功和动能这类相应的力学概念那样为人所熟悉的. 因此，我们在附录 14.1 简要地复习一下平衡热力学[1].

平衡热力学中的一些卓越的热力学概念是: (i)能量守恒: 一个系统内能 E 的增加等于加给该系统的热量减去系统所作的功. (ii) 对于一个可逆过程，除了电和化学效应外 (如同我们始终所做的那样)，一个系统对单位面积所作的元功 dW 可以用压力 P 与物质在压力作用下所移动的距离 ds 的乘积来计算. (把这些贡献加起来，我们得到公式 $dW = PdV$，式中 dV 是体积的改变.) (iii) 如果把热量 Q 可逆地加给一个系统，则相应的熵变 $S_2 - S_1$ 为积分

1) 为了完整起见，必须引进能量和熵的考虑，但是我们所得到的这些概念的进一步应用，只限于我们对压缩波的讨论和各种习题.

$\int\Theta^{-1}dQ$ 所给出，其中Θ是绝对温度．如果熵的改变是不可逆的，则 S_2-S_1 超过 $\int\Theta^{-1}dQ$．(iv) 弧立系统的熵不减少，只有在可逆过程中才保持常数．

非均匀性和运动的影响

性质逐点改变的情况可用类似的方式加以讨论．我们把点函数(强度变量)定义为其积分给出了相应的总体（外延）量的变量．因此，如果 R 是边界为 ∂R 的一个区域，在 R 或 ∂R 中的某点 $\mathbf{x}$ 上，在时刻 t 时，$e(\mathbf{x},t)=$ 单位质量的内能，那末在点 $\mathbf{x}$，时间 t 时，我们便如下地定义 $h(\mathbf{x},t,\mathbf{n})=$ 热流．在时间 t，考虑区域 R 边界 ∂R 上的一点 $\mathbf{x}$，令 $\mathbf{n}$ 为点 $\mathbf{x}$ 处 ∂R 的单位外法线．那末，$h(\mathbf{x},t,\mathbf{n})$ 就是在 $\mathbf{x}$ 处从内到外通过 ∂R 的单位面积上的热流率．

时间 t 时 R 内的净内能为 $\iiint_R e(\mathbf{x},t)d\tau$；净热流为表面积分 $\oint\!\!\oint_{\partial R} h(\mathbf{x},t,\mathbf{n})d\sigma$．

与平衡热力学相反，我们必须考虑运动的一些影响．一个效应是内能必须用运动的能量加以补充．这就是熟知的动能，其单位质量的密度为 $\frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$，其中 $\mathbf{v}$ 是速度矢量．计算净功时也必须考虑运动．把上面的 (ii) 加以推广，我们假定，在某点做功的速率为该点的力与当地速度的乘积．因此对静功的贡献等于体力 $\rho\mathbf{f}$ 乘速度在 R 上的积分和应力 $\mathbf{t}$ 乘速度在边界 ∂R 上的积分之和．

我们不能把自己限制在平衡热力学的均匀态之中，例如，其中单个温度便能表征所研究的整个区域．但是，我们将假定各应变量对空间和时间的依赖足够地弱，以致我们可以把所考虑的区域看成是由许多体元组成的，每个体元处于热平衡之中，但整个区域都可以由于相邻微元之间属性的微小差别而改变．如果这种**局部**

平衡假设可认为是正当的，我们便有点信心假设各种经典的平衡关系便适用于物质的微团，大概推测起来，只要尺度与感兴趣的长度尺度相比很小的微元在比感兴趣的时间尺度短的时间内达到平衡，那末我们的结果便是正确的．为了在研究这些问题时建立起信心来，肯定必须作比较深入的研究工作，但是读者可以确信，在许多情况下，这些关系已得到成功的使用．另一方面，特别是在生物学中出现的"远离平衡态"行为的刺激之下，远距离调整热力学的研究工作一直延续到今天．

能量平衡

考虑到非均匀性和运动，那末我们主张对任何物质区域 $R(t)$ 把能量平衡[1]条件(i)作如下的推广：

$$\frac{d}{dt}\iiint_{R(t)}\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}+e\right)\rho d\tau$$
$$=\iiint_{R(t)}(\mathbf{f}\cdot\mathbf{v})\rho d\tau+\oiint_{\partial R(t)}(-h+\mathbf{t}\cdot\mathbf{v})d\sigma. \tag{17}$$

热流 h 前面冠以负号是由于向内的热流使 R 中的能量增加．

仔细考虑(17)式和极性流体的下列角动量平衡方程(3.5)之间的相似是很有教益的：

$$\frac{d}{dt}\iiint_{R(t)}(\mathbf{x}\wedge\mathbf{v}+\mathbf{l})\rho d\tau$$
$$=\iiint_{R(t)}(\mathbf{x}\wedge\mathbf{f}+\mathbf{g})\rho d\tau+\oiint_{\partial R(t)}(\mathbf{x}\wedge\mathbf{t}+\mathbf{c})d\sigma.$$

两个方程都具有普遍平衡定律的形式，即

量的改变率 = 体积生成率 + 经过表面的通量．

但是，进一步说，每一项[2]都有宏观部分和微观部分组成．例如能量可以分为动能和内能．动能可以看作物质的总体的宏观运动引

1) 我们取非极性流体；否则，就必然有另外的项出现，即偶应力 $\mathbf{c}$ 的作功速率．

2) (17)式中 $\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}$ 还可以用热产生的贡献 r 加以补充．然而，这种贡献在这里是不加考虑的．

起的．而内能可以看作是由于微观的内部自由度引起的．如若作更加认真的推敲，则宏观和微观之间的区别似乎是模糊的，因为所有的连续量都是微观属性的宏观表现形式，这难道不是真的吗？我们所寻找的区别的更深的看法似乎涉及到观察者不变性(invariance)的概念．例如，对于以等速度相对运动的两个观察者来说，内能看起来是相同的；动能则不相同．除了注意下列很明显的事实外，即所有基本平衡的力学定律都可以从能量平衡的假设和对观察者不变性的合适的要求推导出来，(见第II卷练习2.3.13)我们不再进一步深究这些事情了．

象以前平衡律的运算一样，我们希望从积分方程(17)推导微方分程．为了完成这一步，我们必须首先重复得到(2.18)式所用的步骤去写出

$$\oiint_{\partial R} \mathbf{t}\cdot\mathbf{v}\,d\sigma=\oiint_{\partial R}\sum_{i=1}^{3}(t_i v_i)\,d\sigma$$

$$=\iiint_R \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{3}T_{ji}v_i\right)d\tau$$

$$=\iiint_R \nabla\cdot(\mathbf{T}\cdot\mathbf{v})\,d\tau. \tag{18}$$

按照(象(18)式中所用的)通常的方法，我们可以把(17)式左端的时间导数放到体积分中去．于是我们可以对一系列类似的区域R_L去考虑(17)式，并推导出

$$\lim_{L\to 0}\frac{1}{L^2}\oiint_{\partial R_L} h\,d\sigma=0. \tag{19}$$

把(19)式应用于一个薄片和一块四方面体，我们便可证明，存在着下面这样一个**热流密度矢量** $\mathbf{q}(\mathbf{x},t)$:

$$h(\mathbf{x},t,\mathbf{n})=\mathbf{n}\cdot\mathbf{q}(\mathbf{x},t). \tag{20}$$

在(17)式中，利用(18)和(20)式，并假设积分因子连续，我们最后得到**能量平衡的微分方程**:

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}+e\right)=\rho(\mathbf{f}\cdot\mathbf{v})-\nabla\cdot(\mathbf{q}-\mathbf{T}\cdot\mathbf{v}). \tag{21}$$

(19)、(20)和(21)式的详细推导与(2.9)、(2.17)和(2.19)式的推导是非常类似的，因此如同练习 2(a) 中要求读者所作的那样，他应该对补充这些推导毫无困难。

熵、温度和压力

粗略地讲，(21)式是第一定律的平衡形式

$$\frac{dE}{dt}=\frac{dQ}{dt}-\frac{dW}{dt}.$$

对可逆过程的推广．我们也必须把下列两个关系式加以推广，它们是通过温度而把热量输入与熵联系在一起的关系式，以及通过压力而把功与体积改变联系在一起的关系式．

在可逆的情况下，这些吉布斯关系为：对于可逆变化，

$$\frac{dQ}{dt}=\Theta\frac{dS}{dt}, \qquad \frac{dW}{dt}=P\frac{dV}{dt}.$$

因此，第一定律可以写作

$$\frac{dE}{dt}=\Theta\frac{dS}{dt}-P\frac{dV}{dt}. \tag{22}$$

温度 Θ 和压力 P 看作从非正式讨论中已知的概念；按照这种讨论(22)式可由附录 14.1 的 (9b) 式得到．(其他的符号：$E=$ 内能，$S=$ 熵，$V=$ 体积)．得到(22)式的另一种方法是从定义

$$\Theta=\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V, \qquad P=-\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S \tag{23}$$

出发，式中下标表示偏导数过程中保持常数的变量．(这一点并不是没有直觉感的，例如，内能对体积的偏导数是压力的负值．)于是，两个状态函数决定了任何第三个状态函数．特别是，如果 $E=E(S,V)$，那末

$$\frac{dE}{dt}=\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V\frac{dS}{dt}+\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S\frac{dV}{dt}, \tag{24}$$

并且借助(23)式，便能得到(22)式．

为了进行推广，现在让我们用大写字母代表可看作物质变数 $\mathbf{A}$ 和 t 的函数的量. 热力学变数的函数将用上面带划的量来表示. 例如, $E(\mathbf{A}, t)$ 表示初始位于 $\mathbf{A}$ 的质点在时刻 t 时的内能. 另一方面, $\bar{E}(S, V)$ 表示熵和比容分别为 S 和 V 的质点的内能. 我们假设,若某质点的两个状态变量已知,那末任何第三个状态变量便唯一地确定了. 例如,

$$E(\mathbf{A},t) = \bar{E}[S(\mathbf{A}, t),\ V(\mathbf{A}, t)].$$

类似于(24)式,按照连锁法则,我们有[1]

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial \bar{E}}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial t}. \tag{25}$$

我们可以利用下列与 (23) 式相对应的式子来定义温度 Θ 和压力 P:

$$\Theta = \frac{\partial \bar{E}}{\partial S}, \qquad P = -\frac{\partial \bar{E}}{\partial V}. \tag{26}$$

由此,(25)式变为

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \Theta \frac{\partial S}{\partial t} - P\frac{\partial V}{\partial t}. \tag{27}$$

把各变量换成相应的小写字母,让我们回到空间坐标. 例如,单位质量的熵满足

$$s(\mathbf{x}, t) = S[\mathbf{A}(\mathbf{x}, t), t].$$

保持 A 为常数,对时间的偏导数便变成一个物质导数. 于是,在空间坐标下,(27)式就是

$$\boxed{\frac{De}{Dt} = \theta\frac{DS}{Dt} - p\frac{D(\rho^{-1})}{Dt}.} \tag{28}$$

(28)式中,象往常一样, ρ 表示密度. 我们知道, 在连续介质力学中,与单位质量的体积相比,它的倒数单位体积的质量是一个更为

---

1) 因为已示出了对 S、V、$\mathbf{A}$ 和 t 的依赖关系,就没有需要在偏微分中标出保持常数的变量.

自然的变量.

对于忽略了化学效应、电效应和相对论性效应的任何连续介质来说,把能量平衡关系式(21)和吉布斯关系式(28)加进去,那末表示在此情况下成立的基本物理定律的*场方程*表就完整了. 然而,还有另外一条把热静力学的观点加以推广的基本定律,即熵的增加大于或等于加入的热量除以绝对温度这一*不等式*,也就是

$$\frac{d}{dt}\iiint_{R(t)}\rho s d\tau \geqslant -\oiint_{\partial R(t)}\theta^{-1}\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}d\sigma, \tag{29}$$

式中,象往常一样,$\mathbf{n}$ 是物质区域 $R(t)$ 的单位外法线. 假定适当的连续性,我们就能从上式得到微分形式的方程[练习 2(c)]:

$$\boxed{\rho\frac{DS}{Dt} \geqslant -\nabla\cdot(\theta^{-1}\mathbf{q}).} \tag{30}$$

方程(29)和(30)就是有时称之为**克劳修斯-Duhem 不等式**的两种形式.

内能和形变率

基本的能量方程和热力学方程的某些运算使我们能深入地了解这些方程的含意,并给出另外几种更加方便而常用的形式. 这些运算得到了一些表达式,其中包含用下列速度分量导数的组合来定义的量 D_{ij}:

$$D_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right). \tag{31}$$

量 D_{ij} 称之为**形变率张量 $\boldsymbol{D}$ 的分量**. 顾名思义,这些分量给出物质是如何形变以及以什么速率形变的知识. 以后我们要对笛卡儿张量进行研究,以此为基础,我们就可以更加清楚地看到 D_{ij} 的意义. 而 D_{ij} 的这种意义将在第 II 卷 3.1 节中详细地加以讨论. 该节的练习题还要求对阐明形变率与能量改变之间的关系的有关结果作出证明. 其中的一个结果将在下一段中注意到.

动量平衡关系式(2.19)

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho f_i + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(T_{ii})$$

示出了动能的一个关系式．把这个方程与速度矢量作数积，并在物质体积 R 上作积分，我们便得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\iiint_R \frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\rho d\tau &= \iiint_R \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\rho d\tau + \oiint_{\partial R}\mathbf{t}\cdot\mathbf{v}d\sigma \\ &- \iiint_R \boldsymbol{T}:\boldsymbol{D}d\tau,\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{T}:\boldsymbol{D} \equiv \sum_{i,j=1}^{3} T_{ij}D_{ij} \tag{32}$$

（需要作第Ⅱ卷 3.1.7 节中的证明）．因此，一块给定物质中的动能的增加，等于体力和表面应力的作功率减去应力和应变的相互作用项．利用已用过几次的方法可以把上述结果转换为下列微分方程．

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right) = \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{v} + \nabla\cdot(\mathbf{T}\cdot\mathbf{v}) - \boldsymbol{T}:\boldsymbol{D}. \tag{33}$$

从能量平衡定律(21)式中减去(33)式，我们得到

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\nabla\cdot\mathbf{q} + \boldsymbol{T}:\boldsymbol{D}. \tag{34}$$

这个方程指出，热流和出现在(3.3)式中的应力-应变项 $\boldsymbol{T}:\boldsymbol{D}$ 是如何引起内能的增加的，因此，这一项可以看作是代表动能向内能的转变．

流体中的能量和熵

流体力学中的热力学关系是特别重要的．因此仍然值得抛弃完全的普遍性再去推导一些关于流体的能量和熵的关系．这就需要对以后要给出的流体的特性作出预先的考虑，但这并不应该造

成困难.

我们把应力张量的分量分裂为两部分，一部分正比于克罗内克尔 δ_{ij},“其余的”部分为分量 V_{ij}

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + V_{ij}. \tag{35}$$

对于可压缩流体，p 可以与压力相同. 当粘性效应可以忽略时，$V_{ij} = 0$. 把(35)式代入(34)式得到

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p\nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi, \quad \Phi \equiv \boldsymbol{V}:\boldsymbol{D} \tag{36}$$

由此我们可以推得［练习 3(b)］

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = -\theta^{-1}\nabla \cdot \mathbf{q} + \theta^{-1}\Phi, \tag{37}$$

上式示出了物质微团的熵是如何改变的. 右端的两项大体上可以看作由于热流除以温度而引起的熵的改变. 因而,在第二项中,Φ 必然代表由形变而产生的热. 事实上，**耗散函数 Φ** 代表单位体积中机械能耗散为热能的速率.

把(7)式与热力学第二定律的微分方程形式(30)加以比较便得到如下的要求

$$\theta^{-1}\Phi - \theta^{-2}\mathbf{q} \cdot \nabla\theta \geqslant 0. \tag{38}$$

满足这个要求的充分条件，因此也就是使第二定律成立的充分条件为

$$-\mathbf{q} \cdot \nabla\theta \geqslant 0, \quad \Phi \geqslant 0. \tag{39}$$

第一个条件表明热总是逆着温度梯度流动，第二个条件则表明形变决不能把热量转换为机械能.

练　　习

1. (a) 一般地,**比热** C_V 和 C_P 分别定义为等容和等压下热随温度的改变速率. 这就是说，

$$C_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial \Theta}\right)_V, \qquad C_P = \left(\frac{\partial Q}{\partial \Theta}\right)_P,$$

式中我们用带下标的括号表示在偏导数中保持不变的量,

试利用第一定律证明，$C_V=(\partial E/\partial\Theta)_V$. 推论理想气体满足(26)式.

(b) 试证明，在等压下考虑温度的改变，会给出结果 $dQ=C_p d\Theta$；因而 $C_p=C_V+R$. [利用(a).]

2. (a) 给出方程(19)、(20)和(21)的详细推导.

(b) 试证明(33)和(34)式

(c) 推广 Dubois-Reymond 引理，推导(30)式.

3. (a) 证明(36)式.

(b) 利用连续方程和(28)式，推导(37)式.

(c) 试证明(38)式.

†4. 如果对于一个数量函数 ϕ，速度 $\mathbf{v}$ 满足 $\mathbf{v}=\nabla\phi$，那末运动称为是**无旋的**. 假定一团物质密度为常数，并占据着单连通区 R. 令 K 为这一团物质作无旋运动的动能，K^*是它作其他运动但在边界上具有相同法向速度时的动能. 证明 $K\leqslant K^*$.

5. 请注意，质量守恒定律、动量和能量平衡定律的微分形式的方程，都具有下列形式

$$\rho\frac{DF}{Dt}=\rho Q-\nabla\cdot\mathbf{J}. \tag{40a}$$

(a) 这种形式的方程的一般解释是什么？特别是，为什么 Q 项在质量守恒方程中消失了，而在其他两个平衡方程中却没有消失？

(b) 为什么 $\mathbf{v}$ 可以解释为质量通量矢量，而 $-\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{V}$ 可解释为能量通量矢量？(一个数量的通量是矢量. 在某种意义上讲，动量矢量的通量必然是一种“较高”的量，与其他方程的类比表明，这个通量是负应力张量 $-\boldsymbol{T}$ 给出的.)

(c) 解释为什么

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{R(t)}\rho F\,d\tau=\iiint\limits_{R(t)}\rho Q\,d\tau+\iint\limits_{\partial R(t)}j(\mathbf{n})\,d\sigma \tag{40b}$$

是一般平衡定律的积分形式；特别是，$j(\mathbf{n})=j(\mathbf{x},t,\mathbf{n})$ 是什么？证明，$j(-\mathbf{n})=-j(\mathbf{n})$，因此，对于某矢量 $\mathbf{J}$ 有

$j(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$. 推论连续性假设允许我们从(40b)式推导出(40a)式. [练习 8 指出有间断存在时会发生些什么.]

场方程最初是作为任意物质区域的积分方程来表述的. 当被积函数连续时，便可导出微分方程. 当被积函数不连续时(这是可能的情况)，我们可以推导出各种间断之间的关系. 下面四个练习就来推导这些关系.

6. 设 $Q(t)$ 为时间 t_0 时位于某给定区域 $Q(t_0)$ 中、其运动由某函数 y 给出的一组点 $\mathbf{x}$. 这就是说,

$Q(t) = \{\mathbf{x} |$ 对于 $Q(t_0)$ 中的每个 $\mathbf{Y}$ 有 $\mathbf{x} = \mathbf{y}(\mathbf{Y}, t)$,这里 $\mathbf{y}(\mathbf{Y}, t_0) = \mathbf{Y}\}$. 证明如果 F 和 ρ 是空间和时间的光滑函数,并且如果 f 的定义为

$$f(t) = \iiint\limits_{Q(t)} F\rho d\tau,$$

那末

$$\frac{df}{dt} = \iiint\limits_{Q(t)} \frac{\partial}{\partial t}(F\rho)d\tau + \iint\limits_{\partial Q(t)} F\rho w_n d\sigma, \tag{41}$$

式中 $\mathbf{w} = \partial \mathbf{y}/\partial t$, $w_n = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$, $\mathbf{n}$ 是 ∂Q 的单位外法线.

这个结果类似于雷诺输运定理(1.10). 本问题研究在某个区域上加以积分的某变量的改变. 这个区域按照不名函数 $\mathbf{y}$ 给定的前后无关法则作运动，而式(1.10)处理的情况是 $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{A}$, 因而这个区域按照变换 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{A}, t)$ 运动. 我们记得,当采用这个特别的符号时,我们就把 Q 称作*物质区域*，并认为连续介质以速度 $\mathbf{v} = \partial \mathbf{x}/\partial t$ 运动.

方程(41)的解释如下,把 $F\rho$ 在运动区域 $Q(t)$ 上加以积分得到的量,它在时间 t 时的瞬时改变速率由两个因素引起:

(a) 时间 t 时包含在区域 Q 中所有点上的 $F\rho$ 随时间的改变.

(b) 由于边界以速度 $\partial \mathbf{y}/\partial t = \mathbf{w}$ 运动而造成的 Q 的净改变. 局部地讲，边界的切向运动并不给积分增加新点；因此，(41)式中只出现法向分量 w_n.

7. 令 R 为一个物质区域，它由一个任意的运动表面分成子区域 R^- 和 R^+，经过 Σ 的包括密度和速度的应变量可能是间断的．令 $S^-(S^+)$ 是 R 的边界 ∂R 的一部分，它也是 $R^-(R^+)$ 的边界．因此，

$$\partial R = S^- + S^+,\ \partial R^- = S^- + \Sigma,\ \partial R^+ = S^+ + \Sigma.$$

令 $\mathbf{n}$ 为 $\mathbf{R}$ 的外法线，$\mathbf{n}_\Sigma$ 是 Σ 的指向 R^+ 的法线．令 $\mathbf{n}^-(\mathbf{n}^+)$ 是 $R^-(R^+)$ 的外法线(见图 14.13)．

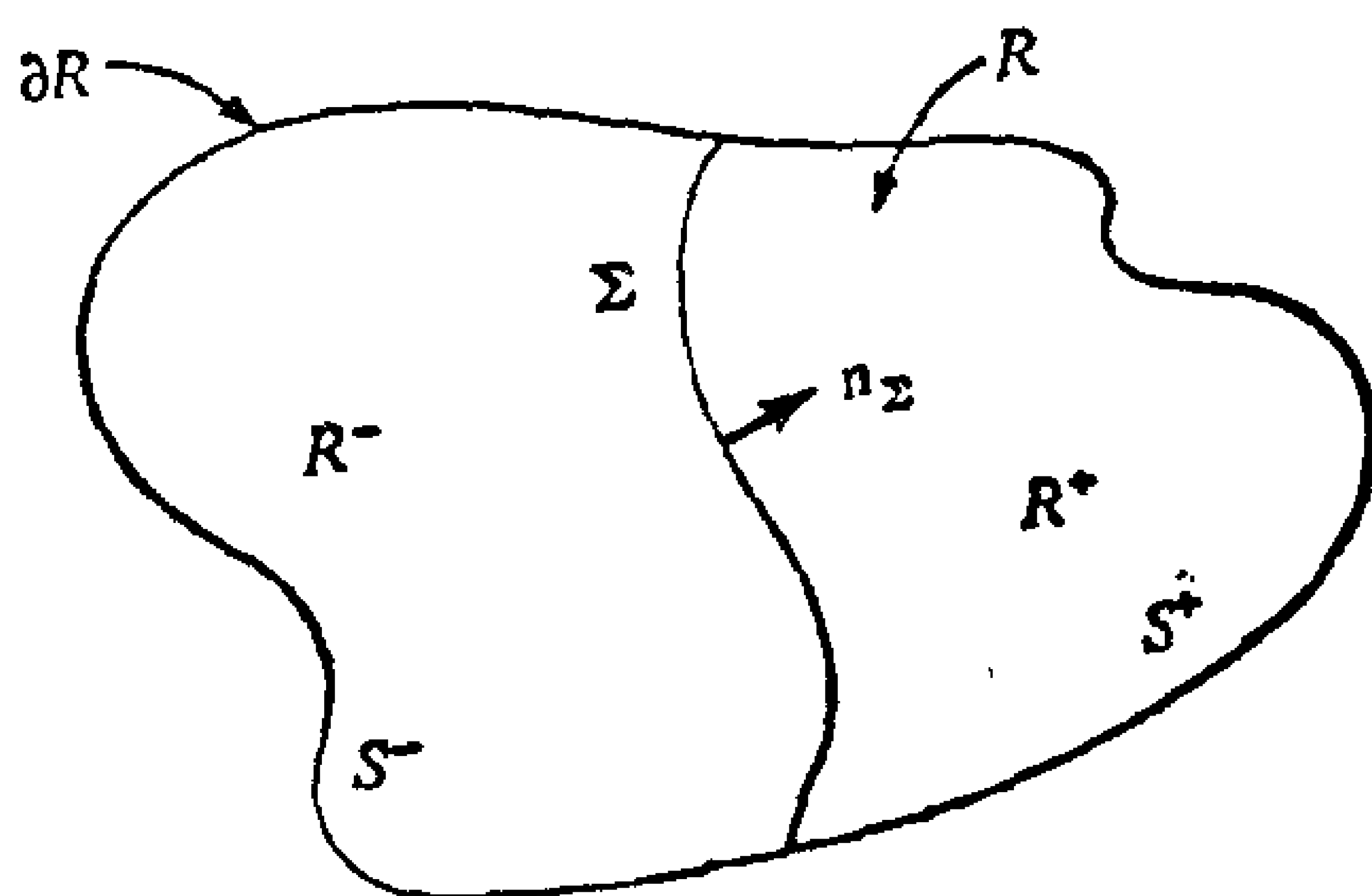


图14.13 计算经过曲面 Σ 的间断量之间的关系时所用的示意图．

如果 $\mathbf{a}$ 是 Σ 上的一点，对于任何数量和矢量 E，我们定义

$$E^+(\mathbf{a}) \equiv \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a}\\ \mathbf{x}\text{在 } R^+\text{中}}} E(\mathbf{x}),\quad E^-(a) \equiv \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a}\\ \mathbf{x}\text{在 } R^-\text{中}}} E(\mathbf{x}),$$

$$[\![E(\mathbf{a})]\!] \equiv E^+(\mathbf{a}) - E^-(\mathbf{a}).$$

(a) 把练习 6 的结果应用于 R^+ 和 R^-，然后相加．(小心法线.)推导

$$\frac{d}{dt}\iiint_{R(t)} F\rho d\tau \equiv \iiint_{R(t)} \frac{\partial}{\partial t}(F\rho)d\tau + \oiint_{\partial R} F\rho v_n d\sigma - \iint_{\Sigma} [\![\rho F]\!] w_n d\sigma, \quad (42)$$

这里 $v_n = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$，其中 $\mathbf{v}$ 是质点的速度．

(b) 令 $v_n^\pm = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}^\pm$．对于 Σ 上的 $\mathbf{a}$，引进间断面的相对法向速

度 $s_n^{\pm}(\mathbf{a}) \equiv [w(\mathbf{a}) - v^{\pm}(\mathbf{a})] \cdot \mathbf{n}_\Sigma$. 试推导

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{R(t)} F\rho d\tau \equiv \iiint\limits_{R(t)} \frac{\partial}{\partial t}(F\rho)d\tau + \oiint\limits_{\partial R^+} F^+\rho^+ v_n d\sigma + \oiint\limits_{\partial R^-} F^-\rho^- v_n^- d\sigma - \iint\limits_{\Sigma} [\![s_n\rho F]\!] d\sigma. \tag{43}$$

(c) 假定除了经过 Σ 外没有间断面. 现在用 ρ 来表示密度，最终推导

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{R(t)} F\rho d\tau = \iiint\limits_{R(t)} \frac{DF}{Dt}\rho d\tau - \iint\limits_{\Sigma} [\![\rho F s_n]\!] d\sigma. \tag{44}$$

8. (a) 把 $[\![j]\!]$ 定义为

$$[\![j(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})]\!] \equiv j^+(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}_\Sigma) - j^-(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}_\Sigma), \tag{45}$$

式中我们已用了练习 7 的符号，推导在间断面的每点处有

$$[\![\rho F s_n]\!] + [\![f]\!] = 0 \tag{46}$$

(b) 推导下列“跳跃条件”.

质量守恒: $[\![\rho s_n]\!] = 0.$ (47a)

线动量平衡: $[\![\rho \mathbf{v} s_n + \mathbf{t}]\!] = \mathbf{0}$ (47b)

能量平衡:
$$\left[\!\!\left[\rho\left(e + \frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right) s_n \right]\!\!\right] + [\![\mathbf{t}\cdot\mathbf{v} - h]\!] = 0. \tag{47c}$$

(c) 试证明对于无极性材料，动量矩平衡并没有增加新的限制.

9. (a) 假定间断面实际上是物质表面. 试证明从上面的练习中的质量守恒导出的跳跃条件不再是一种限制，并且允许密度的任意间断面.

(b) 假定一个物质表面把两种无粘性流体分开，其中 $\mathbf{t} = -p\mathbf{n}$. (这里 p 是压强; 参阅 15.1 节.) 试证明动量平衡跳跃条件导致压强经过间断面连续的条件.

关于跳跃条件的更多的应用，请参阅 15.3 节的练习.

14.5 本构方程、协变性和连续介质模型

本节比较广泛地考察连续介质力学. 我们首先扼要地再述一下到现为止所推导的场方程. 我们看到方程比未知量少很多. 我们列举本构方程的几个简单例子，它们是用物质行为的性质来填补方程数不足所需的.

在表述本构方程时，也许仅有的一般性的限制是要求方程本质上与许多可能的等价坐标系的选择无关. 这是协变性原则的一例. 在简要讨论这个原则时,作为一个基本的例子,我们针对互相作相对运动的系统，从光速相同的假设出发“推导”了洛伦兹变换.

最后,我们考察连续介质模型的适当性,以此结束本章是适宜的. 我们将看到，这个模型只是在分子碰撞之间的距离比感兴趣的尺度小时才能应用.

场方程的扼要再述

让我们扼要地再述一下我们已经得到的无极性单相连续介质的方程,这种介质并不呈现电效应、磁效应或化学效应.

质量守恒:

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla\cdot\mathbf{v}=0. \tag{1.6}$$

线动量平衡:

$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt}=\rho\mathbf{f}+\nabla\cdot\boldsymbol{T}. \tag{2.20}$$

动量矩平衡:

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{Tr}}. \tag{3.6}$$

能量平衡:

$$\rho\frac{D}{D}\left[\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}+e\right)\right]=\rho(\mathbf{f}\cdot\mathbf{v})-\nabla\cdot(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v}). \tag{4.21}$$

吉布斯关系：

$$\frac{De}{Dt}=\theta\frac{Ds}{Dt}-p\frac{Dv}{Dt}; \tag{4.28}$$

$$v\equiv\rho^{-1};\quad \theta=\frac{\partial e(s,v)}{\partial s};\quad p=\frac{-\partial e(s,v)}{\partial v}.$$

热力学第二定律：

$$\rho\frac{Ds}{Dt}\geqslant-\nabla\cdot(\theta^{-1}\mathbf{q}). \tag{4.30}$$

运动边界条件：

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\quad 在边界上给定. \tag{13.22}$$

未知数为密度 ρ，速度 $\boldsymbol{v}$，压力 p，比容 v，热流矢量 $\boldsymbol{q}$，温度 θ，比内能 e，比熵 s 和应力 T. 看作已知量的是比体力 f.

把 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{q}$ 的三个分量以及应力张量 T 的九个分量计算在内，共有 21 个未知数. 有12数量方程，一个不等式和一个边界条件. 我们必须使方程的数目与未知数的数目之间的差异一致起来，因为我们认为，如果介质的初始状态已知，那末一般来说，力学定律应该唯一地确定介质如何运动和变化.

即使对于线性代数方程组，从计算方程和未知数的个数来预测解的存在性和唯一性也是危险的. 我们的方程组更是非常复杂，但是，这并不是解释未知数数目过多的方向.

本构方程引论

显然，象任何其他关于物质世界的陈述一样，还必须有其他的方程来完整地描述对给定物质运动的限制. 火车通过一座铁路桥时产生的形变，湾流的蜿蜒曲折，两者都受到常见的质量守恒、动量平衡和能量平衡等共同的必要条件的限制. 但是，还必须有不同的约束来描述形变过程中钢保持钢，水保持水的这些事实. **本构方程**就是用来从数学上描述各种固体的固性，液体的液性和稀有物质的稀有性的术语.

下面是本构方程的几个例子. 在一个**刚体**中，任何两个质点

间的距离保持常数．在一种**不可压缩介质**中，每个微团的密度是常数．因此，$D\rho/Dt=0$．对于(比热为常数的)**完全气体**，压力 p 和密度由 $p=\kappa\rho^{\gamma}$ 相关联，对给定气体来说，κ 和 γ 为常数．对于普通的物质，热流矢量 **q** 和温度 θ 通过**牛顿-傅里叶冷却定律** $\mathbf{q}=-\kappa\nabla\theta$ 相联系，式中，数量热传导系数 κ 依赖于 θ，而且(通常)对压力 p 稍有依赖．在第十五章中，我们考虑**无粘性流体**，对于这种流体，应力矢量 **t**，法向矢量 **n** 和压力的关系为 $\mathbf{t}=-p\mathbf{n}$．

某些本构方程，象刚体和不可压缩物质的本构方程，相当明显是一种理想化．其他一些本构方程，例如牛顿冷却定律，一般看作是从实验得到的[1]．

但是，为了得到象普通弹性体和粘性流体那样的本构方程，我们首先去作一些回顾起来也几乎并不明显的假设，然后再用某些合理而复杂的数学运算去加以简化．利用张量工具这些运算大都很容易进行．这个工具并非必要的．这可以用下列事实加以说明：最初表述弹性体和粘性流体本构方程的人并没有使用这一工具．然而在寻找比较稀有物质的本构方程的近代努力之中，张量好象确实是一个必要的概念上的工具．因此，我们把关于本构方程的大部分讨论推迟到第 II 卷中引进张量后再去进行．

协变性原则

对本构方程的研究，也许最强烈地集中到需要强调协变性原则上去．事实上，近代有很多人试图基于这个原则去寻找比较稀有的物质的本构方程．

协变性原则用张量微积分最容易表示．在第 II 卷中详细讨论了协变性及其与笛卡儿张量的关系．这里我们只是简短地解释一下这个原则．

---

1) 这往往是一种过于简单的看法．例如参阅 J. A.Ruffner 的文章 "Reinterpretation of Genesis of Newton's Law of Cooliny". *Arch Hist Exact Sci*. 2, 138—52 (1964)．(请注意，如上所述，傅里叶这个名词也往往与这条冷却定律联系在一起．)

从根本上来讲，协变性(或不变性)原则指出，在对观察者等价的坐标系中，所有物理定律的陈述都必须具有相同的形式．因此，如果选择互相**固定**的两个不同的坐标系，那末，对于同一物理定律，观察者肯定应该得到同一形式的陈述．练习 1.8 到 1.11 给出了一些例子．作为另一例，我们考虑在**两维空间**中的热传导方程

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\kappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \tag{1}$$

如果第二个观察者采用另一个笛卡儿坐标系，他将得到

$$\frac{\partial T'}{\partial t}=\kappa\left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2}\right). \tag{2}$$

然而，坐标系(x, y)和(x', y')之间也有某种数学关系 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}')$ 和 $\boldsymbol{x}'=x'(\boldsymbol{x})$．因为 $\kappa^{-1}\partial T/\partial t$ 与所选的坐标系无关，由此必然得到

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y'^2}\right]_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}'(\mathbf{x})}, \tag{3}$$

这实际上是可以证明的(练习 1)．

当涉及有方向的量时，情况就变得更为复杂．矢量分析的形式主义则避免这个问题．不过，这仅仅是很肤浅的说法．人们必须弄清楚，某些量(例如速度)是一个矢量．并非每一种具有方向和大小的量都是矢量． 例如无穷小的转动或者角速度是一种矢量． 但是有限的转动却不是．(我们以后要看到，它是一个张量．)

除了张量分析以外，协变性原则还可以作为其他理论的基础．因此力学的变分表述示明了一门范围宽广的应用数学分支，它是以与坐标无关的方式发展起来的．这就导致了采用普遍化的正则坐标发展这个课题．在力学的文献中，可以找到拉格朗日、哈密顿、雅可比和其他人对这个理论的经典的推导．

作为协变性原则用途的一例，我们来考虑迈克耳逊-莫·雷实验．这个实验证明，无论坐标系等速还是不等速运动，光都是等速运动的．我们现在来证明，洛伦兹变换是唯一的线性变换，它使波

动的传播对互相处于均速相对运动的两个(相对论性等价的)坐标系是不变的.

在观察者所在的坐标系(x, t)中,波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{4}$$

描述光的传播.现在,如果另一个观察者以速度 v 运动,当他试图在自己所在的坐标系(x', t')中描述同一现象时,他会发现,光波也以同一速度 c (而非 $c \pm v$) 传播. 如若这两个坐标系 (x', t') 和(x, t)以洛伦兹变换

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{5a}$$

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{5b}$$

相关联,那末我们希望证明上述论点是正确的.

我们观察到在新坐标系中,$u'(x', t') = u[x(x', t'), t(x', t')]$的波动方程取如下的标准形式:

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial t'^2} - c^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} = 0 \tag{6}$$

我们很容易证明,线性变换(5)确实把(4)式变成了(6)式(练习2).不过,我们希望来"发现"(5)式.

我们记得,正如我们上面关于热传导方程所提到的那样,坐标轴转动时拉普拉斯算符保持不变. 因此,如果我们作定义

$$y = ict, \quad y' = ict', \tag{7}$$

只要变量是以(x, y)系统与(x', y')系统之间的转动相关的话, 即只要对某个角 θ,有

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta, \tag{8a}$$

$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta, \tag{8b}$$

那末(4)式和(6)式就会互相变换为对方. 如果方程(8)代表(x, t)和 (x', t') 之间的实数关系, 那末 θ 必然是复数. 事实上, 如果$\theta = i\phi$, ϕ 是实数,我们由(8)式可推得实数关系

$$x' = x\cosh\phi - ct\sinh\phi, \tag{9a}$$

$$ct' = -x\sinh\phi + ct\cosh\phi. \tag{9b}$$

为了得到ϕ的物理解释，我们注意到对于一个利用(x, t)坐标系的观察者来说，在(x', t')中某固定的点$x =$ 常数满足

$$\frac{dx}{dt} = c\tanh\phi.$$

因此

$$\tanh\phi = \frac{v}{c},$$

式中v是坐标系(x, t)中测得的坐标系(x', t')的速度．相反，把x固定，我们由(9)式可以证明

$$\frac{dx'}{dt'} = -c\tanh\phi = -v,$$

该式证明两个系统是对称的．现在易于把方程(9)改写成形式(5)(练习3)．

我们都熟知狭义相对论所造成的基本概念的革命性变革，其基本的数学基础是洛伦兹变换．这对于物理问题必须在纯粹数学的形式之外来加以考察和认识是一个强有力的说明．同时，它又说明表面上看来无害的协变性原则可以导致重要的结果．

经典连续介质力学的有效性

既然连续介质力学的基础已经奠定，那末就宜于重新考虑一下物质的连续介质模型和粒子模型之间的关系．对这种关系的完全理解仍然是一个尚未达到的目标；这里我们将限于一些定性的结论．

犹如我们在13.1节中指出的那样，倘若粒子间的典型距离比所研究现象的典型长度尺度小，那末事先或用平均过程，我们就可给诸如密度和速度这样的连续介质的变量作出定义．其他的连续介质变量则可用同样的方式去定义．例如，可以把某点处应力张量的分量与动量流量的平均值关联起来．但是，为了使连续介质

的描述有用，不仅连续介质变量必须是可定义的，而且还必须能够用完全确定这些变量的方程把它们联系起来.

在经典的连续介质理论中，在空间和时间的某给定点上，各变量的值是由一组偏微分方程来确定的. 这些方程把感兴趣的空间和时间区域中各点中每个点上的未知量及其导数值联系起来. 于是，这些方程隐含着这样的假定：平均变量是**局部确定的**. 因为如果每个点处平均量的改变受到远方位形的影响，那末在这一点就没有一组方程能够完全确定这些量了.

局部确定论要求微团并不长久地"记忆"它们的过去. 更精确地讲，如果要用通常连续介质的理论，那末与感兴趣的时间尺度相比，"遗忘时间"必须很短. 造成超声波现象[1]的很高频率的波动为我们提了一个说明情况并非如此的例子.

有效地"遗忘"过去位形的细节，这一过程是靠分子间的相互作用来完成的. 我们可以想象把一群人蒙上眼睛放在一间拥挤不堪的房间中去的情形. 经过同其他人的几次碰撞，每个蒙着眼睛的人都将迷失方向. 类似地经过几个内部粒子的相互作用（这通常称为**碰撞**），一组给定粒子的最终结果是难以用它们的初始位形来预测的[2]

名词**平均自由程**是用来表示碰撞之间的典型距离的. 叙述"遗忘时间"必须比感兴趣的时间尺度短的另一种方法是与感兴趣的尺度相比，平均自由程必须很短.

现在我们来概括一下我们的全部的太简短的讨论. *为了使连续介质可以应用，典型的粒子间的距离和平均自由程都必须比感兴趣的长度尺度短.* 当第一个条件成立，但第二个条件不成立时，如同在1.2节中研究恒星动力学时那样，可采用一种修正的连续介

1) 人们作了大量的努力，去推广经典连续介质理论，以便在诸如超声波中所发现的那些情况下给出改进的预测. Ph. Selwyn 和 I. Oppenheim 的文章［*Physica* **54**, 161—94, 195—222 (1971)］为我们提供了一个很好的说明.

2) 在原则上，一组粒子的未来的位形将完全由初始条件所决定. 然而经过几次碰撞以后，在规定初始条件时不可避免的误差将引起大的积累误差，以致进一步的计算将成为没有意义的.

质的办法.

练　　习

1. 利用(8)式证明(3)式.

2. 试证明如果变量变换如(5)式所述,那末(4)式变换成(6)式.

3. 试证明(5)式是(9)式的一种等价的形式.

附录 14.1　空间均匀物质的热力学

我们这里讨论空间均匀连续物质的热力学[1]. **空间均匀**物质一词,我们指的是可以看作用温度、压强等这些变量的单值便能加以表征的物质. (因此我们说物质的这个温度,物质的这个压强.) 在这里,均匀也可看作意味着分子运动没有优先方向,因此我们只讨论没有运动的物质. 一种物质保持在同一均匀状态时称为处于**平衡态**.

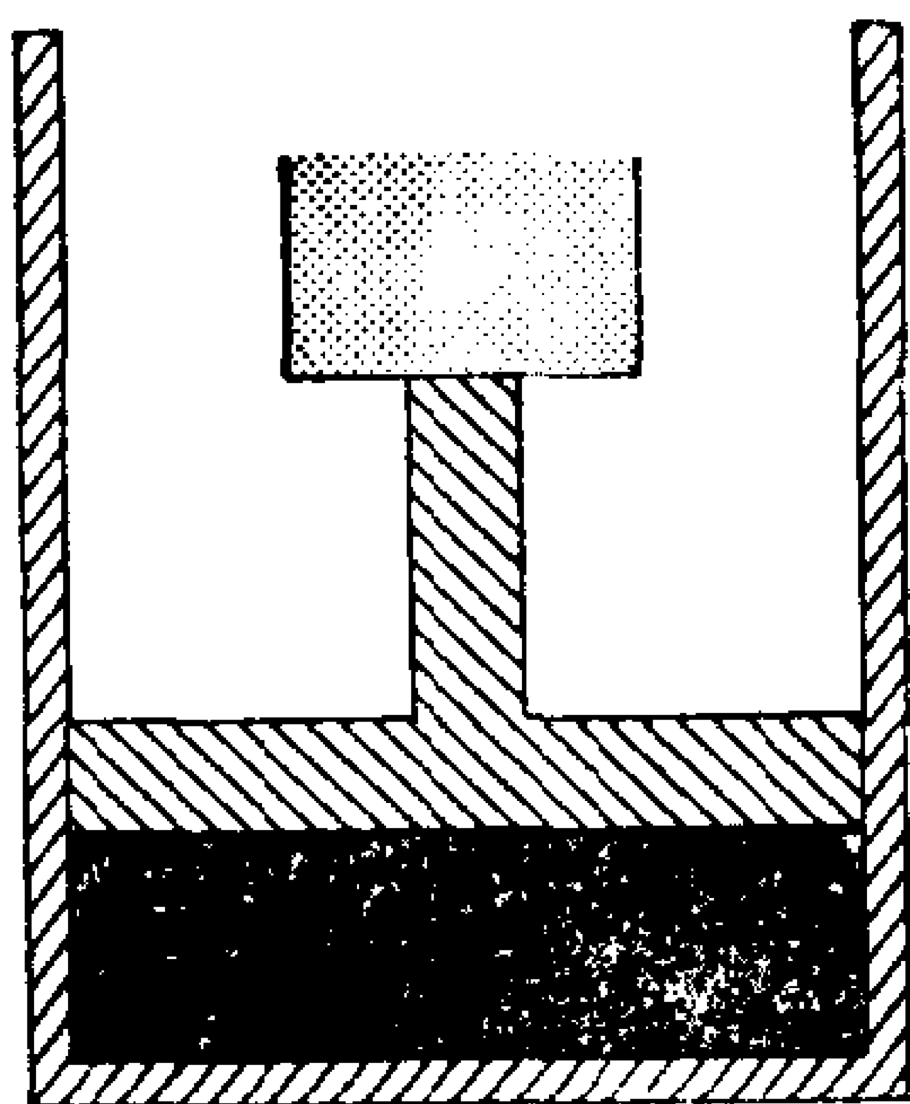


图 14.14　气体装在有活塞的容器里,上面加沙子使活塞下降. 该系统可看作完全绝热,因此没有热量从气体流出流进

图 14.14 示出了要作考虑的这类系统的一个例子. 那里绝热壁面和绝热活塞之间包含着一团静止的气体. 可以把各种量与气体联系起来,例如它的体积 V,它所作用的压强 P,它的温度 Θ (我们把字母 T 留给了应力) 和内能 E. 实验事实指出,这些变量中任何两个具有相同的值,那末物质的所有其他变量也具有相同的值. 相反,有些可测量,例如热量 Q,它们不由这些变量中的两种来确定. 这些量与物质所受

1) H. C. Van Ness 在《*Understanding Thermodynamics*(New York: McGraw-Hill, 1969)》中对热力学概念作了极好的简单解释. 我们这里的表述深受这本小册子的影响.

到的操作的历史有关.

活塞实验

考虑在图 14.14 的结构上进行的几个思想实验. 那里往下推的重量一部分是由图中画出的放在容器里的细沙子提供的. 假定把一颗沙子移走. （我们并不希望考虑克服重力所作的功使我们的讨论复杂化,因此,我们想象沙子不改变高度而被输运到一个架子上.)由于拿走了一颗沙子,活塞就会向上移动一个小量(假定活塞没有摩擦). 于是在很短时间内给系统引进了一点点不均匀性. 如果剩下的沙子一颗一颗地被移走,那末活塞便会渐渐地升高.这种升高是气体对活塞和沙子作了功W的缘故. 现在 $W=\int dW$,按照定义,其中 $dW=Fds$,这里F是力, ds是反抗这个力移动的距离微元. 因为此过程的每个微小的一步仅仅是扰动了一下系统的均匀性，所以我们可以几乎没有误差地继续说，在每个体积V下，系统的压强为P. 正是这个压强才造成作用在活塞上的力. 如果活塞的面积为 A，那末力的大小为PA. 假定气体的初始体积为V_1,最终体积为V_2,于是 $Fds=PAds$，并且 $Ads=V$ 为体积元. 因此，

$$\begin{array}{l}\text{气体缓慢地从 } V_1 \text{ 膨胀}\\ \text{到 } V_2 \text{ 时所作的功}\end{array}=\int_{V_1}^{V_2}P(V)dV. \tag{1}$$

如果一颗一颗地把沙子放回到活塞上去,我们可以断定,会发现活塞回到了与其初始位置无法区别的位置上. 虽然会发现气体的温度在膨胀时下降,但当沙粒放回后温度会回到它的初始值.

相反,假定突然把所有的沙子移走,活塞会迅速上升,落下来,再上升一点,也许会振荡几下. 最后在一个新的高度上稳定下来. 在这一过程中，整个气体的压力和温度不会保持均匀. （请注意，热流因为绝缘而受到阻止.)特别是在给定体积V下，并无压力p可谈. 我们就不能用公式(1)去计算所作的功. 除了定性结果外，我们还会看到活塞不会像上一段所考虑的非常缓慢的过程中那样

上升得那么高，同样温度也不会降低得那么低．如果把沙子突然倒回活塞，这个装置便不会回到实验开始前所在的位置，温度也不会回到它的初始值，温度事实上要高些．

我们以后将回过头来对把所有的沙子突然移走所出现的这类**不可逆过程**加以讨论．现在我们则限于注意到这种过程的路径不能用限制在均匀密度的这一系统来加以描述．另一方面，进行一个不可逆过程，然后等待足够长的时间，这样得到的最终结果是一种均匀态，并且是可以描述的．我们将能够描述这种极限无穷缓慢的可逆过程的路径．这里"极限"本质上是用它的数学意义，因而不能吹毛求疵说一个无穷缓慢的过程将永远达不到某种改变．一个实际的过程越慢，它将越接近用极限可逆过程对它所作的近似．

为了简单起见，我们考虑一个绝热的圆筒，其中没有热量加进这个系统，也没热量从中移走，因而是一个**绝热过程**．但是，我们可以考虑本质上可逆的过程，这时，热量是靠容器内外的温度的微小差别缓慢加人的．

我们现在来阐述平衡热力学的两个主要公理中的第一个公理．与所有物理定律一样，这两个公理是不能用实验"证明"的．相反，它们宁可是对一定量的实验和经验已揭示了具有普遍性质的结果的推测．这些推测的正确性是建立在从它们得到的推论与实验进行比较之上的．因此，对导致这些推测的直觉推理进行严格的推敲是不合适的．然而，如果只因为放在那里的"定律"没有支持它的讨论就几乎没有心理上的感染力，那末对直觉有某种感性知识也必然是需要的．

对于每一个热力学"定律"，将给出两种形式．第一种形式将是两种均匀状态之间的比较，第二种是关于缓慢变化过程行为的一种陈述．

平衡热力学的第一定律

第一种形式． 令一个系统的两种均匀状态分别具有内能 E_1

和 E_2，那末如果 $\Delta E = E_2 - E_1$，

$$\Delta E = Q - W,$$

式中 Q 是加给系统的热，W 是系统从状态 1 到状态 2 所做的功.（注意，根本没有说到从状态 1 到状态 2 所经过的过程，这个过程可以是不可逆的，因此在过程的路径中有非均匀状态存在.）

第二种形式. 对于可逆过程，需要计算由于传导的热量和所作的功引起内能变化所需计算的短写形式[1]是

$$dE = dQ - dW. \tag{2}$$

方程 (2) 使我们回忆起计算 E 的改变所需的线积分. 在现在的讨论中，让我们把 p 和 V 看作独立状态变量. 假设系统经过具有内能 E_1、压力 p_1 和体积 V_1 的状态 Σ_1 到达具有内能 E_2、压力 p_2，体积 V_2 的状态 Σ_2. 假定 Σ_2 是从 Σ_1 沿一条规定所经过 p-V 值的状态曲线 Σ 到达的（见图 14.15），那末第一定律告诉我们

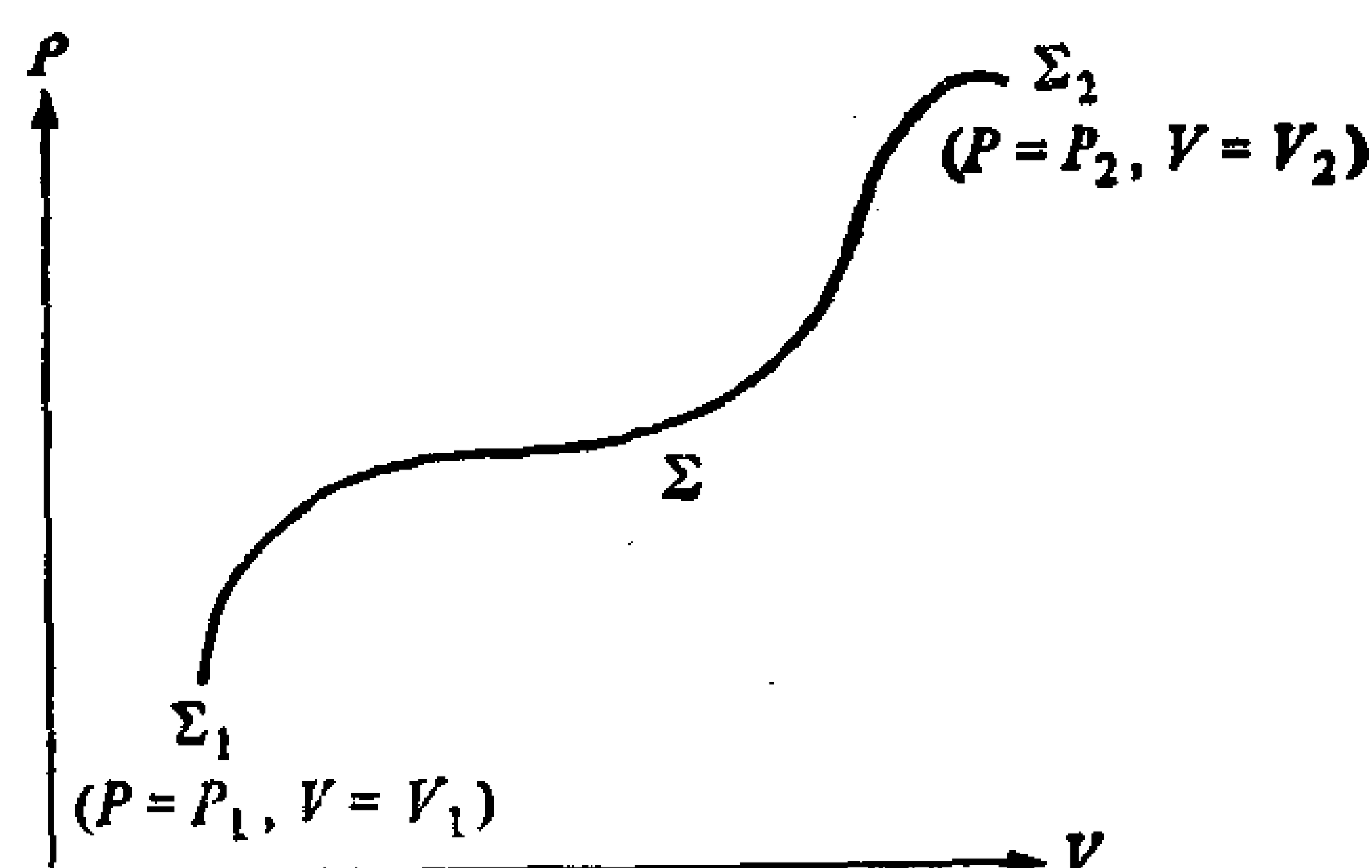


图 14.15 P-V 状态平面，系统经过状态 Σ_1 到达状态 Σ_2 完全由规定的状态曲线 Σ 所给出

$$E_2 - E_1 = \int_\Sigma \frac{\partial Q}{\partial p} dp + \frac{\partial Q}{\partial V} dV - \int_\Sigma \frac{\partial W}{\partial p} dp + \frac{\partial W}{\partial V} dV. \tag{3}$$

---

1) "短写形式"类似于平面曲线弧长的公式 $ds^2 = dx^2 + dy^2$. 如果曲线为 $x = x(t), y = y(t), t_1 \leqslant t \leqslant t_2$，那末，"长写形式"当然是 $s = \int ds = \int_{t_1}^{t_2} [(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2]^{1/2} dt$.

与通常一样，如果曲线 Σ 可以参数化的话，那末，线积分可以转换成一个普通的单重积分. 假定这样一个参数化的方法为

$$P=\bar{P}(t),\ V=\bar{V}(t),\ \text{式中 } t \text{ 是时间},\ t_1\leqslant t\leqslant t_2. \tag{4}$$

于是，

$$E_2-E_1=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{d\bar{P}}{dt}+\frac{\partial Q}{\partial V}\frac{d\bar{V}}{dt}\right)dt-\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial W}{\partial p}\frac{d\bar{P}}{dt}+\frac{\partial W}{\partial V}\frac{d\bar{V}}{dt}\right)dt \tag{5}$$

[在(5)式中，$\bar{P}(t)$ 和 $\bar{V}(t)$ 是用来代替 $Q(P,V)$ 和 $W(P,V)$ 的导数中的宗量 P 和 V 的.]

因为，例如，在(5)式中

$$\frac{d}{dt}Q[\bar{P}(t),\bar{V}(t)]=\frac{\partial Q}{\partial P}\frac{d\bar{P}}{dt}+\frac{\partial Q}{\partial V}\frac{d\bar{V}}{dt},$$

我们可以用一个变量上限 t 去代替 t_2，因此，对于 t 作导数，就可得到微分方程形式第一定律

$$\frac{dE}{dt}=\frac{dQ}{dt}-\frac{dW}{dt}. \tag{6}$$

这个方程只在非常缓慢改变的极限情况下成立.

在图 14.14 的活塞系统中，我们已看到 $dW=PdV$. 象气球这样的一些系统，若把我们早先的论证加以推广，便可建立相同的膨胀功的表达式. 更一般性的系统可以完成化学功和电功，但我们在此不引进这种普遍性.

非常重要的一点是热量 Q 和功 W 都不是状态变量. 可以用实验证明，一个可逆过程中的 Q 和 W 不仅与初终态有关，而且还与过程有关. 特别是，试图确定一块物质的“热的含量”这是没有益处的，因为假定建立了一个参考点，物质在此时刻便看作具有的热量为零. 物质的“热的含量”的以后的值大概就等于可以测量的量“加入的净热量”. 但是如果整个历史的精确的细节一旦失去，那末这个热的含量值就不能检验，这是因为系统目前的状态并未给出在过去把热量加给物质的方式. 这同一论据表明，试图给一块

物质规定"功的容量"也同样无益处的.

因为W和Q不是状态变量，对于不同的状态曲线 Σ，线积分 $\int_{\Sigma}dW$ 和 $\int_{\Sigma}dQ$ 给出不同的值. [但是第一定律保证，这两个积分之差 $\int_{\Sigma}(dW-dQ)=\int_{\Sigma}dE$ 只与Σ的起始和终止点有关，因为 E 是一个状态变量.]换句话说，dW 和 dQ 都不是恰当微分. 然而请注意，(在可逆过程中)dW 乘以积分因子 P^{-1} 后却是一个恰当微分，因为 $P^{-1}dW=dV$[1]. $P^{-1}dW$ 是一个状态函数的微分，这一事实的确定是通过非常缓慢地作功强迫某种物质以各种方式从状态 Σ_1 到达状态 Σ_2 来完成的. 假定我们不断地测量压强，因此可以如图 14.16 所示地画出 P^{-1} 对W的曲线. 因为

$$\int_{\Sigma}P^{-1}dW=\int_{\Sigma}dV=V_2-V_1, \tag{7}$$

所以在这些曲线下的面积都相同，而且体积之差与系统从初始状态到终止状态所经过的过程无关.

熵

一个重要的观察结果尚未在我们的理论结构中反映出来. 这就是过程有一个"自然的"方向. 例如，如果把一个冷的金属杆放到一间房间里，在杆的温度与房间温度相等之前，热量总是流进金属杆的. 没有丧失能量，能量只是均匀地分布了. 但是均匀地分布的能量并不能让它流去作有用功. 事实上为了恢复原来的非均匀状态，必须(例如靠致冷机)做功. 伟大的物理学家 Richard Feynman 把能量与刚从浴池里出来的人身上的水作了比较，生动地[2]概述了观察结果. 两块小巧的毛巾是干的. 这个人先用其中的一块轻拍自己，然后再用另一块轻拍自己，经过一会以后，(在这种理想化的模型下)就不再有水的交换发生，这个人与两块毛巾都

---

1) 因为对于可逆过程，$dW=PdV$，只有V的改变才引起W的改变. 因此，在(3)和(5)式中，$\partial W/\partial P=0$.

2) 见《*The Character of Physical Law* (Cambridge, Mass: *MIT Press*, 1967)》.

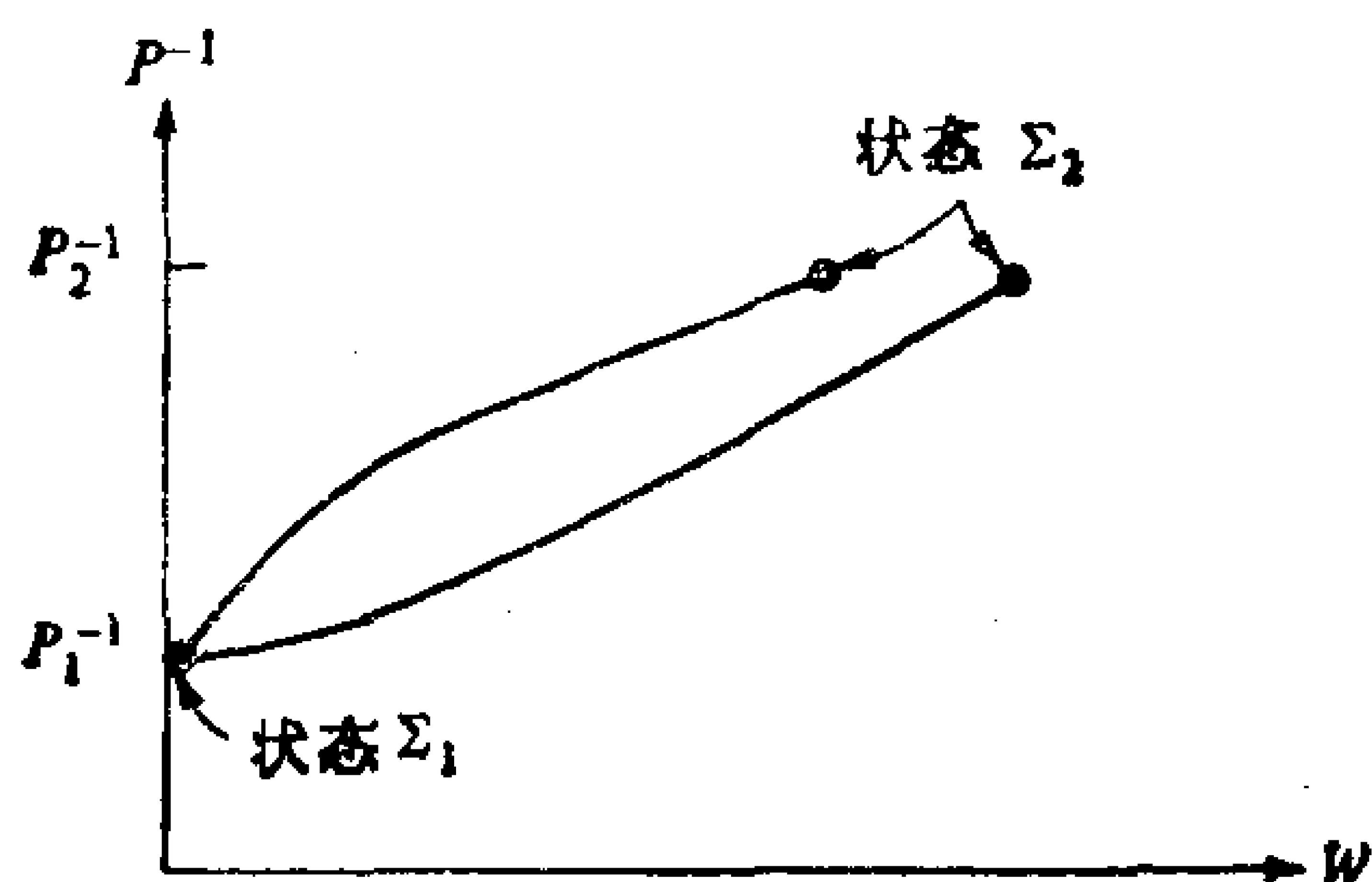


图 14.16 以 $1/P$ 对 W 的曲线画出的假想可逆实验的结果. 虽然在同一状态 Σ_2 下得到了 W 的两个不同的值,这两条曲线下面(到它们各自终点为止)的面积是相同的,但如果 $\int_\Sigma P^{-1}dW$ 只与Σ的初终态有关,那末 $P^{-1}dW$ 就是一个状态函数(体积 V)的恰当微分.

是同样潮湿. 所有的水(能量)仍然在那里,但不再有进一步的自然流动发生.

我们已讨论过的状态函数中还没有一个以单向方式改变的函数. 至少在事后可以自然地推测到还缺少一个状态函数,而这个状态函数确实是以定向的方式改变的. 在上一段中我们已经指出了关于发现这个函数的方法. 乘上一个积分因子 P^{-1} 就把 dW 变成一个恰当微分. 即状态函数体积的微分. 除了 dW 外, 第一定律还包另一个非恰当微分 dQ. 确实,可逆过程的实验表明, 如果 dQ 乘上一个积分因子就构成了一个恰当微分,在这种情况下积分因子为 Θ^{-1}(图 14.17). 由 $\Theta^{-1}dQ$ 给出的微分的状态函数称之为**熵** S,于是

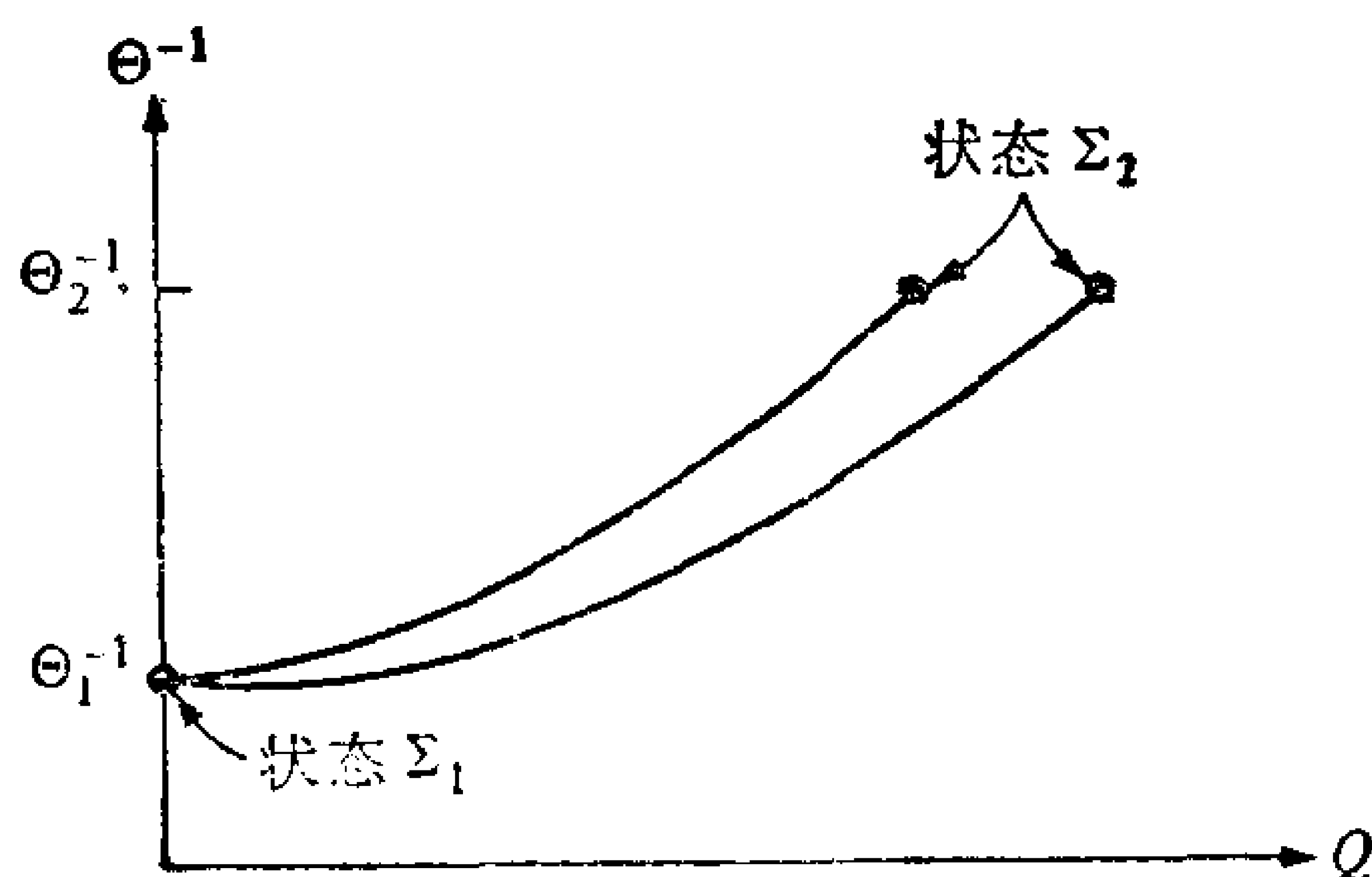


图 14.17 以 Θ^{-1} 对 Q 曲线画出的两个假想可逆实验得到的结果. 两条曲线下面的面积相同,因此 $\Theta^{-1}dQ$ 是一个状态函数(熵)的恰当微分.

$$dS = \Theta^{-1}dQ \text{（可逆过程）} \tag{8}$$

注释，为了使(8)式成立，温度必须相对于最低的可能温度处的零度来测量．因此在所有热力学计算中，给温度 Θ 赋值时，都采用绝对尺度(例如开尔文尺度)．我们要强调，**只有对于可逆过程，(8)式才给出用线积分计算熵改变方法的短写形式．**

有了(8)式和表达式 $dW = PdV$（适用于可逆的膨胀和压缩过程)，第一定律可写作

$$dE = \Theta dS - pdV \tag{9a}$$

或者，对于缓慢的改变，

$$\frac{dE}{dt} = \Theta\frac{dS}{dt} - p\frac{dV}{dt}. \tag{9b}$$

S 的改变有方向性吗？为了得到某种理解，考虑图 14.14 上用绝热活塞所做的那两个实验．在这两个实验中，我们把沙子从活塞移走，因而气体从初态 Σ_1 膨胀到终态 Σ_2． 因为活塞是绝热的，所以膨胀是绝热膨胀．

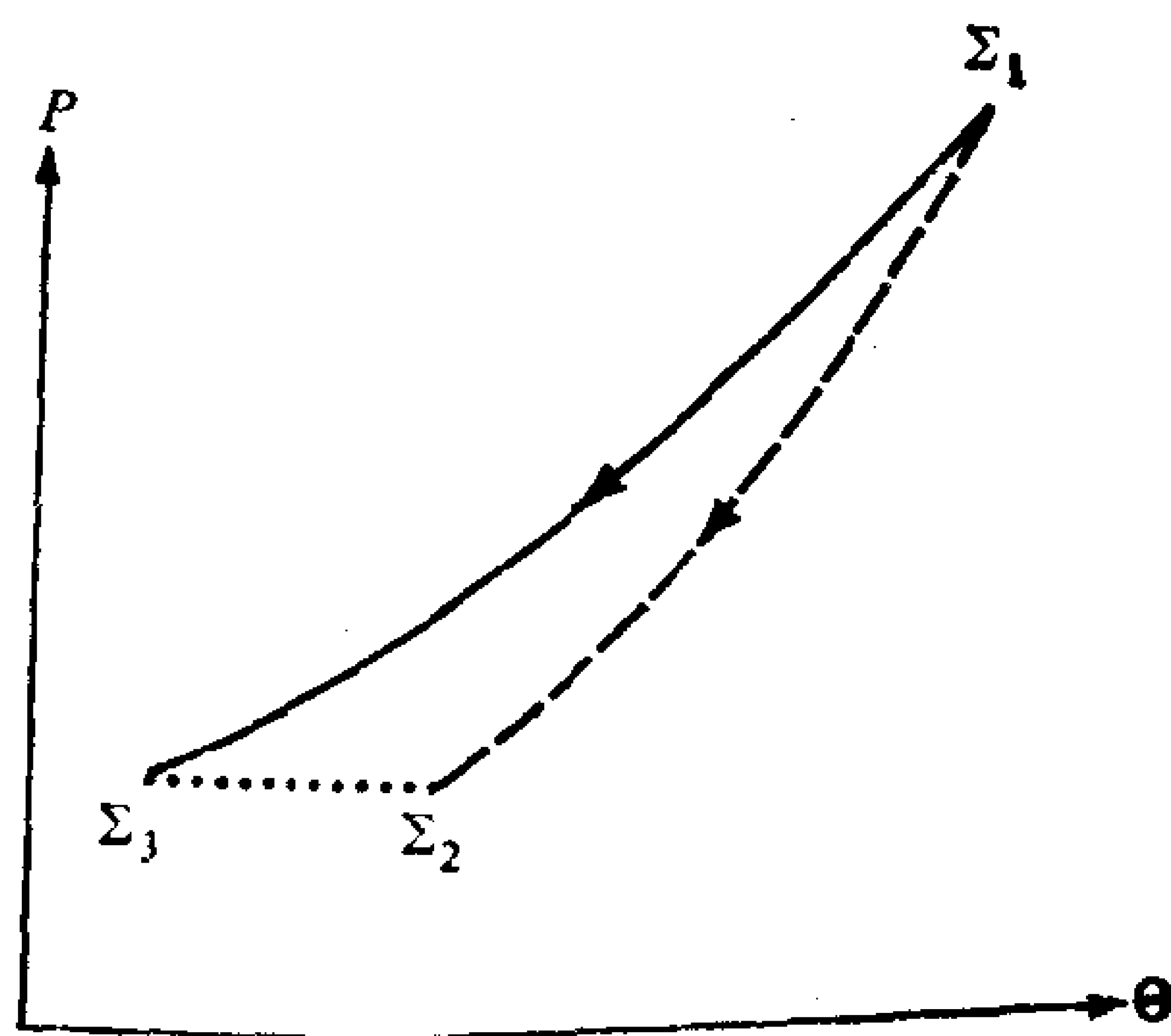


图 14.18　从 Σ_1 到 Σ_3 的曲线代表活塞的可逆膨胀．虚线代表最终使气体的状态 Σ_2 与 Σ_3 具有相同压力的不可逆膨胀的平均路径．Σ_2 的性质可以从使系统由 Σ_2 到 Σ_3 (虚线) 所必需的假想的可逆冷却效应推导出来．

情况 1.　缓慢的可逆绝热过程．这里，

$$S_2 - S_1 = \int \frac{dQ}{\Theta}.$$

系统是绝热的;所以肯定没有加热. 于是 $S_2 = S_1$,熵不改变(因此过程称为**等熵的**).

情况 2. 不可逆绝热过程. 考虑图 14.18 的 P-Θ 图. 为了参考起见, 我们用实线画出了缓慢地把沙子移走所造成的从状态 Σ_1 到 Σ_3 的可逆膨胀. 不可逆过程的路径不能完全用曲线来表征,因为在给定时间内没有单个的 P 和 θ 值来表征这个系统. 考虑图中用点线表示出来的 P 和 θ 的平均值是有益的. 但是,只有 Σ_2 的终点才是重要的. 因为已经移走了同样多的沙子, 这个点的 P 坐标与可逆过程的相应的坐标是相同的. 但是实验指出, 在很快的不可逆膨胀中,有"浪费的"额外加热存在, 因此在 Σ_2 点温度坐标比较高.

为了确定系统在 Σ_2 时的状态,我们采用设想可逆过程时常用的策略, 这就会使系统具有一种已知性质的状态. 系统的状态可以用缓慢的冷却从 Σ_2 变成 Σ_3,因为热量必须从系统移走,所以 $dS = dQ/\Theta$ 中的 dQ 是负的, 相对于均匀的熵值, 冷却造成熵的减少,这是沿 Σ_1 和 Σ_3 之间可逆曲线的状态的特征. 这一推理表明, 从 Σ_1 到 Σ_2 的不可逆绝热膨胀中熵是增加的.

这同一推理适用于绝热压缩. 如果压缩是可逆的, 那末过程便等熵. 但是, 不可逆绝热压缩使熵增加 (练习 1). 利用与环境绝热因此在边界上没有热交换的系统(象活塞)所作的其他实验或理想实验,可以得到类似的结果. 的确,大概我们必须把经过边界的所有东西的交换排除掉. 于是,在孤立系统中,我们会得到这样的假设,熵永不减少,而且只在可逆过程中才保持不变.

一个有关的假设是宇宙中的熵永不减少, 因为在没有东西可从"其他地方"进入,从这个意义上来说,宇宙是"孤立"的. 但是, 我们必须谨防把我们的尘世经验推广得太远. 在大多数热交换实验中,在实验中很难从进行实验的建筑物(或者也许是城市)更远的地方去寻找任何环境影响. 因此也许并不奇怪, 还有涉及到真

正的宇宙热力学的没有回答的问题.[1] 为了迴避这些问题,我们假设一个系统加上它的环境的熵永不减少,并且让"环境的定义有些含糊".

上一段加了着重号的句子包含着熵的一个有用的性质. 这个性质适用于不可逆但却改变得足够缓慢因而它们仍可用单一温度 Θ 来表征的系统. (有一个例子是由两种允许混合的成分组成的系统, 还有一个例子是具有缓慢移动但却"无摩擦"的活塞的系统.)我们知道,如果改变是可逆的,那末熵变为 $\int \Theta^{-1}dQ$. 我们断定在不可逆过程中,熵变超过这个量.

为了支持我们的论断, 我们从如下的观察结果开始: 进入系统的热流的作用,应该与环境的类型无关. 因此,我们可以把环境想象为具有均匀的、任何时候都与系统相等的温度 $\bar{\Theta}$[2]. 在我们所设想的环境中,不允许有不可逆的情况,这样环境温度的缓慢改变将是可逆的.

令 S_1 和 S_2 表示系统初终态的熵值, 并用 $\bar{S}_1$ 和 $\bar{S}_2$ 表示相应的环境的熵. 流入系统的热量正在可逆地从环境中流出, 利用这一点,我们得到

$$\bar{S}_2 - \bar{S}_1 = \int \bar{\Theta}^{-1}dQ.$$

按照上面楷体的句子的意思,

$$S_2 + \bar{S}_2 - (S_1 + \bar{S}_1) \geqslant 0.$$

因此,因为 $\Theta = \bar{\Theta}$,便有

$$S_2 - S_1 \geqslant \int \Theta^{-1}dQ.$$

我们的讨论可以用另一个定律性质的公设来综述.

---

1) 参阅,例如, B. Gal-or, "The Crisis About the Origin of Irreversibility and Time Anisotropy," *Science* **176**, 11—7(1972).

2) 没有温差就没有热流. 因此更精确的说法是把这个极限看作是环境的热传导率无限地增加的情况, 这样系统和环境之间只需要趋向于零的小温差便可产生 dQ.

第一种形式. 假设一个孤立系统从熵为 S_1 的均匀状态改变到熵为 S_2 的均匀状态. 那末 $S_2 \geqslant S_1$，而且等号只适用于可逆变化.

第二种形式. 假设一个非孤立系统缓慢地从熵为 S_1 的均匀状态改变为熵为 S_2 的均匀状态. (改变足够缓慢，以使任何时刻系统总是可以用单一温度 Θ 来表征.)于是

$$S_2 - S_1 \geqslant \int \Theta^{-1} dQ,$$

其中的等号只在可逆变化时才成立.

关于熵和可作功能量之间的联系，我们要提到开尔文爵士的一个展示性的推论. 开尔文考虑过在温度为 Θ_0、Θ_1、Θ_2、$\cdots$ 的各个热库间工作的过程，这里 $\Theta_0 \leqslant \Theta_1 \leqslant \Theta_2 \cdots$. 他证明，这样的一个过程所造成的不能进一步作功的能量等于 Θ 的大小与过程所引起的熵的改变的乘积.

练　　习

1. 利用图 14.14 画出的绝热活塞装置所作的不可逆和不可逆膨胀实验，课文中讨论了熵的改变. 试给出相应于压缩实验的类似的讨论.

2. 如果 $S = S(E, V)$，从(i) $dS = \Theta^{-1} p dV + \Theta^{-1} dE$ 是一个恰当微分，(ii)二阶偏微商的次序是不重要的(如果这些导数都是连续的)，试推导下列方程:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial V} + \Theta \frac{\partial P}{\partial E} - P \frac{\partial \Theta}{\partial E} = 0 \ (V, E \text{ 为自变量}).$$

(当把其他变量看作自变量时，类似的关系也成立. 对这些关系中的一些进行推导为我们提供了偏导数方法的一个很好的实践. 参阅附录 13.1)

附录 14.2 一些历史记注

在下面几段中，我们将非常简要地概述一下连续介质力学早期发展历史中的一些情况，使读者可以开始看到这门学科只是经过了卓有才华的人们多年的努力才发展起来的. 在这样做时，我们大量地根据 Clifford Truesdell[1]的一篇有特色的透彻而雄辩的文章[1]，为了了解更多的细节，同时也对力学发展中实验所起作用作出评价，我们让读者去参阅这篇文章.

牛顿定律在连续介质力学的发展中仅仅是极其重要的第一步. 从牛顿并没有能解决这门学科中的许多重要问题这一事实来看，这是很明显的. 事实上，这些问题中有许多至今尚未解决.

例如，牛顿考虑过弹性体经过弹性质点等距点阵的运动，他试图以此计算放置在空气流中的物体上的作用力. 所得的理论给出的阻力正比于空气的密度、物体的横截面积和速度平方. 它只是很差地算出了作用在物体前面的力，根本没有计及物体后面作用着的比较低的压强，而后者是造成物体阻力的主要部分. 在十九世纪末，牛顿的理论用来"证明"飞机的飞行是不可能的，因为飞机会碰到很大的阻力. 二十世纪建筑规范所需的风压计算中，还残留着这个理论的影响[2]. 这并不奇怪，因为是普朗特在十二世纪初才打开了很好地理解我们今天才有的流线型物体的阻力的道路. 即便这样一种理解也是不完全的，而钝体阻力问题在很大程度上仍然是一个未解决的问题.（参阅第 II 卷第三章.）

牛顿并没有试图寻找由他的定律所得到的某些微分方程的近似解，以确定物体的阻力. 相反，他尝试着用各种具体的假定和特有的理解去解决问题. 这是很有代表性的. 只有在有了多年处理问题的经验以后，才能清楚哪一个假设是正确的，哪一个假设是不

1) "A Program Toward Rediscovering the Rational Mechanics of the Age of Reason", *Arch Hist Exact Sci* 1(1), 3—36(1960).

2) P.F. Nemenyi, "The Main Concepts and Ideas of Fluid Dynamics in Their Historical Development", *Arch. Hist Exact. Sci.*, 2(1), 52—86(1960).

正确的；在有可能讲出哪一条正确的假设是基本的，哪一条又可以从基本假设推导出来之前，则必须做更多的研究．最最困难的是把“看问题的方法”提炼成为清楚地下了定义的原理．

有一个后来弄清楚是很重要的一般原理，对它的认识为我们提供了一个“失败”的例子，这就是英国数学家 B. 泰勒关于振动着的弦的工作．1713 年，泰勒把牛顿定律应用于弦线的一个微元，他并不明白把牛顿第二定律应用于物体的无穷小的微元就可以推出运动方程．“他并不把这个结果认作运动的微分方程，因此他（进一步）的工作便建立在混乱和部分错误的假设之上”（Truesdell）．

把牛顿定律应用于无穷小微元从而首先把运动方程明确推导出来的工作，出现在 J. 伯努利的*水力学*(1739)之中．在研究不可压缩无粘性流体的一维运动时，伯努利引进了一个他称之为内力而我们现在称为压强的应变量．壁面或流体静力学中的液柱所作用的压强，以前已有人用过．不过，虽然他把这一概念解释得很不好，也几乎没有利用过它，但是，J. 伯努利由于引进了*未知的*内力而取得了重要的概念上的进展．

现在我们来说巨人 L. 欧拉（1707—1783），他“计算起来毫不费劲，就象人呼吸或鹰在风中翱翔一样”（Arago）．欧拉的工作有很多卷，整理了大量前人的材料，对他那个时代所懂得的各种数学作了深刻的贡献．“他的记号几乎是最新的，或者也许我们最好说我们的记号都是欧拉的记号”（Struik）．在欧拉生命的最后十七年中，即使完全是盲目的，也几乎只能使他的工作性质更加出色[1]．

我们只能触及欧拉的几个最重要的发现．十八世纪五十年代，他作出了两个非常重要的贡献．首先，对运动学和动力学之间的差别的深刻认识使欧拉理解了质量守恒．其次，他把 J. 伯努利几乎没有利用的一维流动的内力的概念应用到泵和涡轮上去，然后把这个概念推广为我们现在在三维流动中所用的内部法向压力

1）但是，即使是天才也不能没有错误．例如，在试图计算声速时，牛顿和欧拉都做过不正确的物理假设．参阅 15.3 节．

的概念.

多年来，欧拉一直尝试着把柔线理论和弹性范围内的理论统一起来，前者利用力的平衡，后者利用力矩的平衡，1771 年，他弄明白对于计算作用在一根弹性线的某微元上的力来说，剪切和拉伸都是必须的. 这是普遍应力矢量的第一次应用.

似乎是欧拉在上面提到的工作和 1744 年他关于许多平面连杆的工作导致了动量矩守恒的假设. 因此是积累了几十年的努力才在 1776 年发表了欧拉的力学定律.

虽然在研究弹性理论时欧拉引进了未知的应力矢量，但是应力矢量这个重要的普遍概念是一直到再过了五十六年才被引进的. 这恰恰就是柯西这个人来完成的. 柯西在复变函数方面也作了基本的工作，他把这门微积分表述成为我们现在学习的样子，并且对有限群作了许多重要的早期研究.

对于某些历史情况，即使我们只写了很少的几段，但这也足以证明，连续介质力学的发展需要最有能力的人们去做许多年的工作. 还要提及一点，这就是虽然连续介质力学的原则现在可以归纳成几行，但这应该感谢天才人们的提炼，尽管对它的确实理解需要作很多的研究.

相反，计算方法却是我们很容易弄懂的巧妙发现之一例. 例如，考虑欧拉的发现、常系数线性常微分方程有指数形式的解，一个能干的大学二年级学生在几个小时内便可学会有关这个问题要知道的一切. 而一个新的物理概念则是另一回事. 对于一个学生，一开始看问题的新方法往往看起来很简单，很自然. 然而经验表明，如果一个人要对来之不易的概念得到透彻的理解，那末他就必须亲自经历某些得到这个概念所花费的费劲的智力上的斗争. 一本讲义或一本教科书，只能指出这一道路.

因此，"直觉上很明显"这个词不应纳入连续介质力学基本原理或任何一门现代科学的讨论中去. 我们有时在办公室和实验室里贴上一些幽默的条幅，从中可以找到一条比较合适的暗语："在所有这种混乱中保持平静的人，简直就是不明白发生了什么."

第十五章　无粘性流体的流动

如同 14.5 节中所讨论的那样，场方程描述象质量守恒那样的为所有连续介质都共有的性质，而本构方程则描述一种具体的连续介质有别于另一种具体的连续介质的属性，我们在本节中首先讨论一种最简单的本构方程，即无粘性或理想流体的本构方程.(如我们将要看到的那样，如果没有运动，这个方程也适用于所有的流体.)然后我们再转向某些特殊问题的表述和求解. 这样便会使我们开始明白无粘流体模型的威力和缺点.

在所处理的具体问题中，第一类问题讨论在密度随高度变化的静止的流体层上小扰动在水平方向传播的情况. 引进了重要的稳定性概念后，采用线性化的方法，对所得到的特征值问题的定性行为作了研究，或者在特殊情况下作了求解. 我们看到，无粘性流体模型对一些物理上有意义的情况给出了合理的预测.

其次我们考虑气体中的压缩波. 我们的讨论论及了小振幅声波和大振幅的激波. 我们碰到了传播时形状不变的线化波动方程的解. 我们讨论了适当的非线性偏微分方程组的不断变形的简单波解. 后面这类解的改变发展得非常快，实际上就形成了间断的激波. 所有这些预测的流动状态都在实验上得到了很好的验证.

最后，我们利用变数分离法去求解均匀流绕一个圆柱的二维流动. 这种流动似乎并不与经验相符，因为计算表明作用在圆柱上的净阻力为零. 进一步的研究指出，这同一结果也适用于均匀流绕相当一般的物体的流动. 那末对于这个问题，无粘性模型似乎并不能令人满意. 关于粘性如何造成阻力的讨论是第II卷第三章的中心论题.

15.1 静止流体和无粘性流体中的应力

本节的主要目的是描述静止流体中的应力矢量，并证明所得的结果对运动中的某一类流体也是有用的. 还用一种分子模型为我们最初的推断提供基础.

分子观点

考虑一个没有优选方向来回迅速运动并作弹性碰撞的很多微小的质点所组成的系综. 这是一个合理而且熟知的静止气体的"理想气体分子"模型.(在运动气体中分子具有优选的运动方向.)象在普通物理教科书中那样,按照这个模型,我们推论出这样的结论: 某表面元上的分子碰撞是这个面元上纯粹法向应力的来源. 因为没有优选的方向,切向力分量加起来为零, 由于同一原因, 一个面元上的**压强**大小(单位面积上的法向力)应该与该面元的方向无关,因而我们假定,应力矢量 $\mathbf{t}$ 满足

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, n) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}, \tag{1}$$

式中 p 是压强.

上一段中的弹性质点模型对液体显然是不合适的. 关于更合适的分子模型的研究, 其进展的摘要可以在（例如）Seeger 和 Temple（1965）的书中找到. 但是, 未深入研究液体的分子运动论以前, 我们可以猜想某种形式的拥挤将代替完全气体的弹性碰撞. 仍然没有优先的方向,因而可指望在静止的流体中,(1) 式仍适用.

虽然固体并非我们现在的研究对象, 但是我们也许应该提一下固体分子结构所引起的非常不同的性质. 通常束缚在或多或少占优先位置的分子, 一般可能以某种固定的位移对与时间无关的任何力作出调整,同时伴之以各种分子相互作用的改变. 因此,正因为固体是静止的,就没有理由指望其中有简单的应力分布.

在这里也宜于作如下的回忆,很多物质是不容易按照"固体"、"液体"或气体分类的. 儿童们的玩具橡皮泥 (toy Silly Putty), 如

果把用它做成的球掷到地面上，它就反跳回来，但是如果让它不受扰动，它便会慢慢地流成容器的形状．这里我们将不去讨论这种模棱两可的问题．我们按照普通讲话中的含义来使用“固体、液体和气体”这几个词．（因此，流体既可以是液体也可是气体．）我们的本构关系将适用于每一类材料的典型代表：固体钢，液体水和气体空气．

连续介质观点

让我们再考虑静止流体中的应力，这次我们利用通常把液体看作一种连续介质的经验．在这样做时，我们将发现把沿垂直于法向 **n** 的方向作用在微元上的**剪应力**和沿 **n** 方向作用的**法应力**区分开来是很有用的．

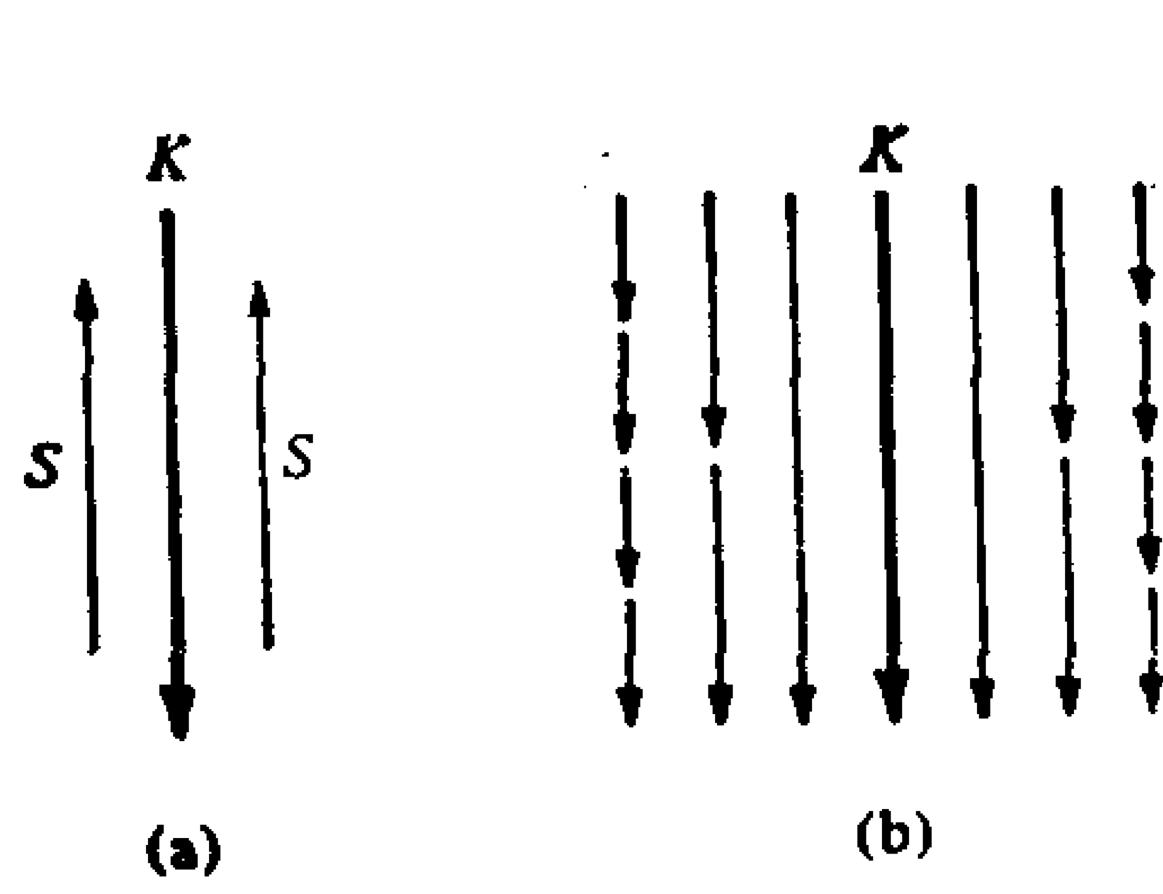


图 15.1　刀片 K 向下切过冷蜂蜜．
(a) S 表示流体作用在刀片上的阻尼剪应力，
(b) 箭号表示典型的流体速度．

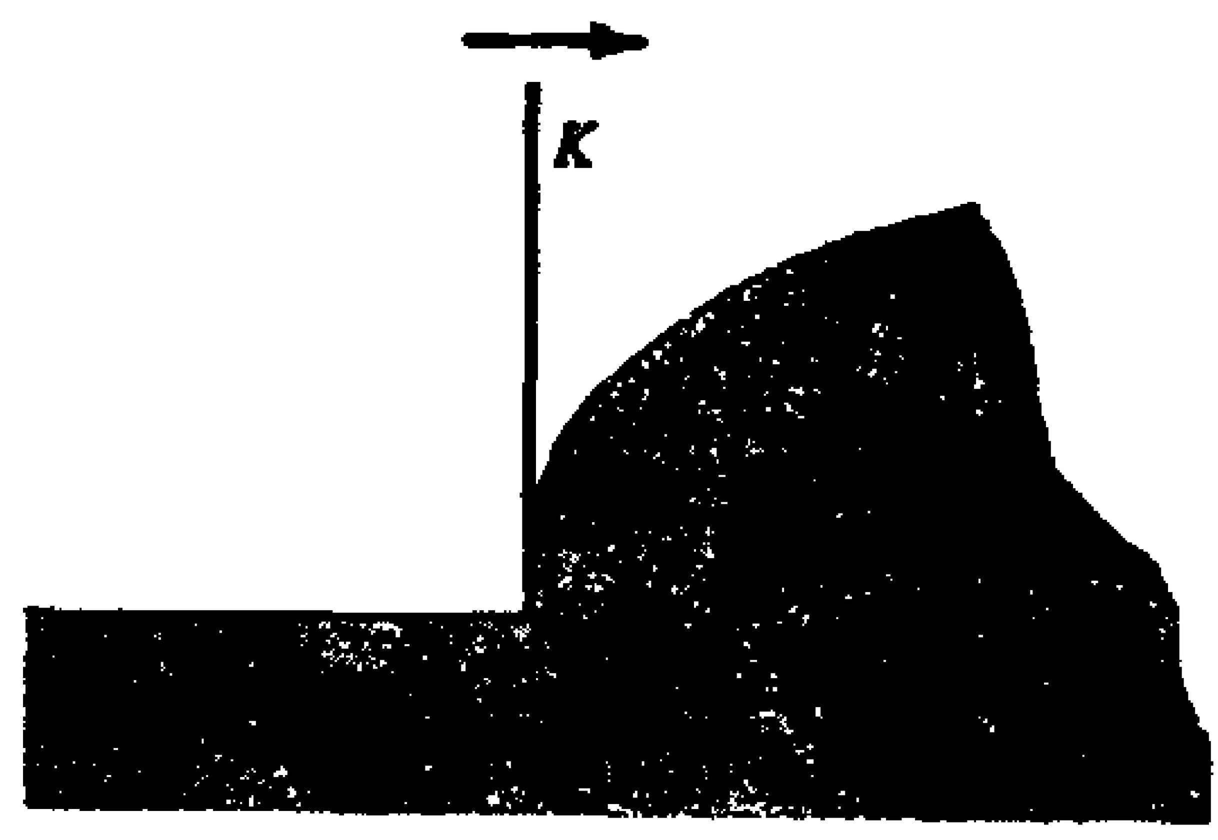


图 15.2　向右运动并把蜂蜜铺开的刀片 K．流体中的箭号表示典型的速度矢量．

值得注意的是剪应力在象冷蜂蜜那样的液体中是特别明显的，我们把这种液体称为“非常粘的”．作为一个示例，设想一下用一把刀切过冷蜂蜜时是多么困难．刀片的边缘是多么薄，以致这种阻力必然由作用在刀片平面部分上的剪应力引起的．你切得越快，就越艰难．

如果你把刀片转成侧向，并试图把蜂蜜铺开，你想使一层蜂蜜在另一层上流得越快，你就必然推得越费劲（图 15.2）．这些观测结果可以用图15.3中的定性曲线加以概述．请注意小的相对速度

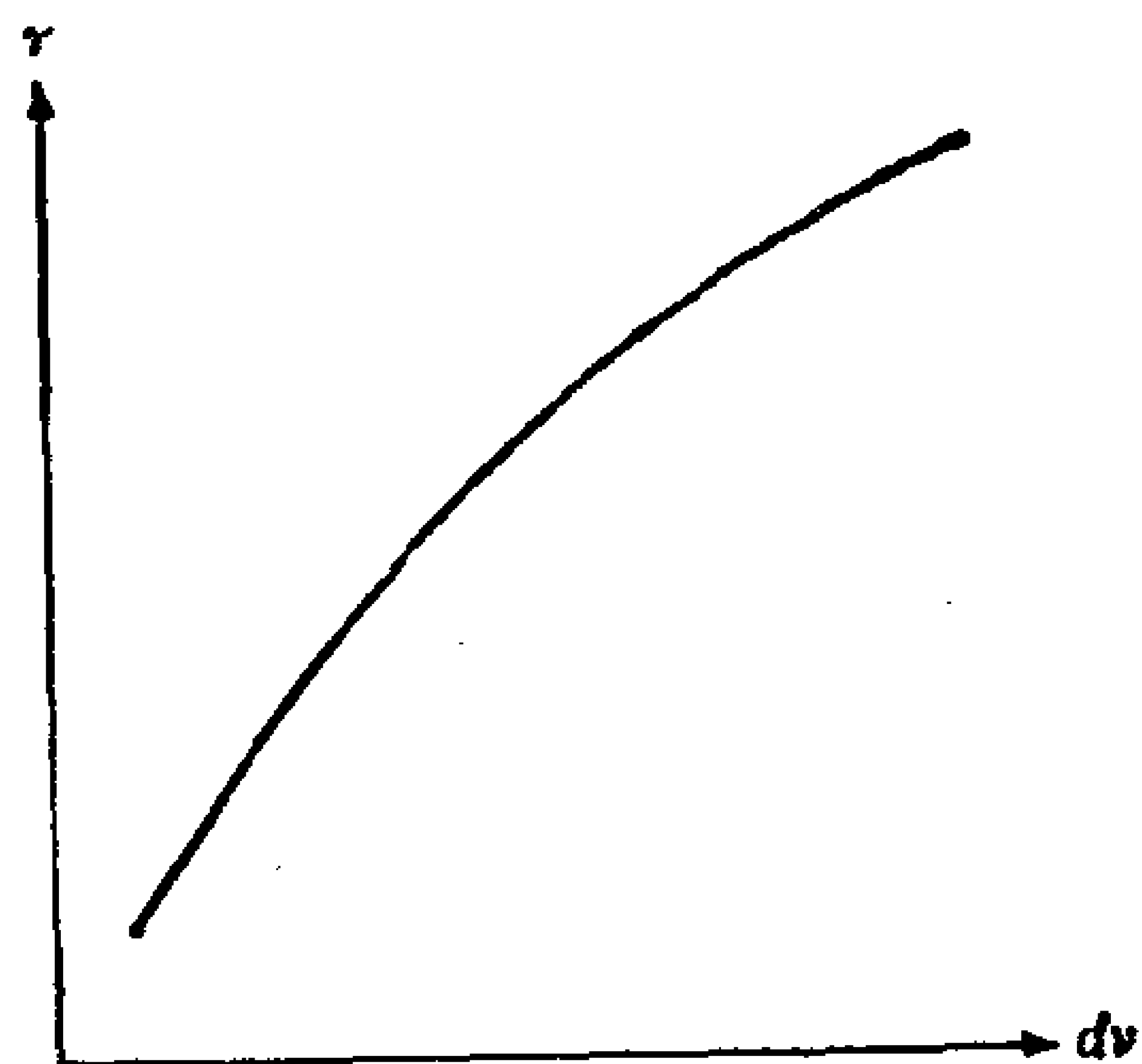


图 15.3 从日常经验推导出来的剪应力 τ 与流体相邻两层间相对速度 dv 之间的定性曲线.

是与小的剪应力是联系在一起的. 我们指望静止流体中的剪应力将会消失,因为在这里,相邻物质的相对速度总是等于零的.

由此我们可以假设**静止流体的应力是纯法向的**. 这就是说,$\mathbf{t}$ 必然在 $\mathbf{n}$ 的方向. 因此对于数量函数 p 有

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = -p(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})\mathbf{n}. \tag{2}$$

所以,除了暂时我们不能排除 p 对 $\mathbf{n}$ 的依赖外,现在关于连续介质的讨论导致了一种与(1)式相同的假设. 但是从应力矢量和应力张量之间的关系

$$t_j(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \sum_{i=1}^{3} n_i T_{ij}(\mathbf{x}, t),$$

利用(2)式我们得到

$$-p(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})n_j = \sum_{i=1}^{3} n_i T_{ij}(\mathbf{x}, t).$$

这意味着

$$T_{ij}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})\delta_{ij}, \tag{3}$$

式中 δ_{ij} 是克罗内克尔 δ. 因为(3)式的左端与 $\mathbf{n}$ 无关,$p(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ 实际上必须与 $\mathbf{n}$ 无关. 因此,我们从连续介质的观点发现,位于 $\mathbf{x}$ 处的面元上的压力 p 必须与法矢量 $\mathbf{n}$ 无关,这就跟我们上面从分子运动没有优先方向的前提推导出来的结果一样.

注释. 气化饮料中的气泡是球形的. 这就证实了我们的看法：静止流体中的压强大小是与应力所作用的面元的方向无关.

流体静力学

因为 p 不依赖 $\mathbf{n}$，所以静止流体中的本构方程最终的形式如下：

$$T_{ij}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\delta_{ij}. \tag{4}$$

当然，对于静止流体我们有

$$\mathbf{v} = 0. \tag{5}$$

利用(4)和(5)式，线性动量守恒方程(14.2.19)简化为

$$\rho\mathbf{f} - \nabla p = 0, \tag{6}$$

这就是流体静力学方程. 很容易看出，除了热效应以外，其他的场方程都是自动满足的.

作为流体静力学的一个简单应用，让我们对如下的说法作一验证：我们的结果是与人们从未见到过一块流体静止地停留在一个固体表面上的这一事实是一致的. 假设有这样一块静止的流体，高 H，宽 W，坐标原点位于其一边的中心（见图 15.4）. 我们来求

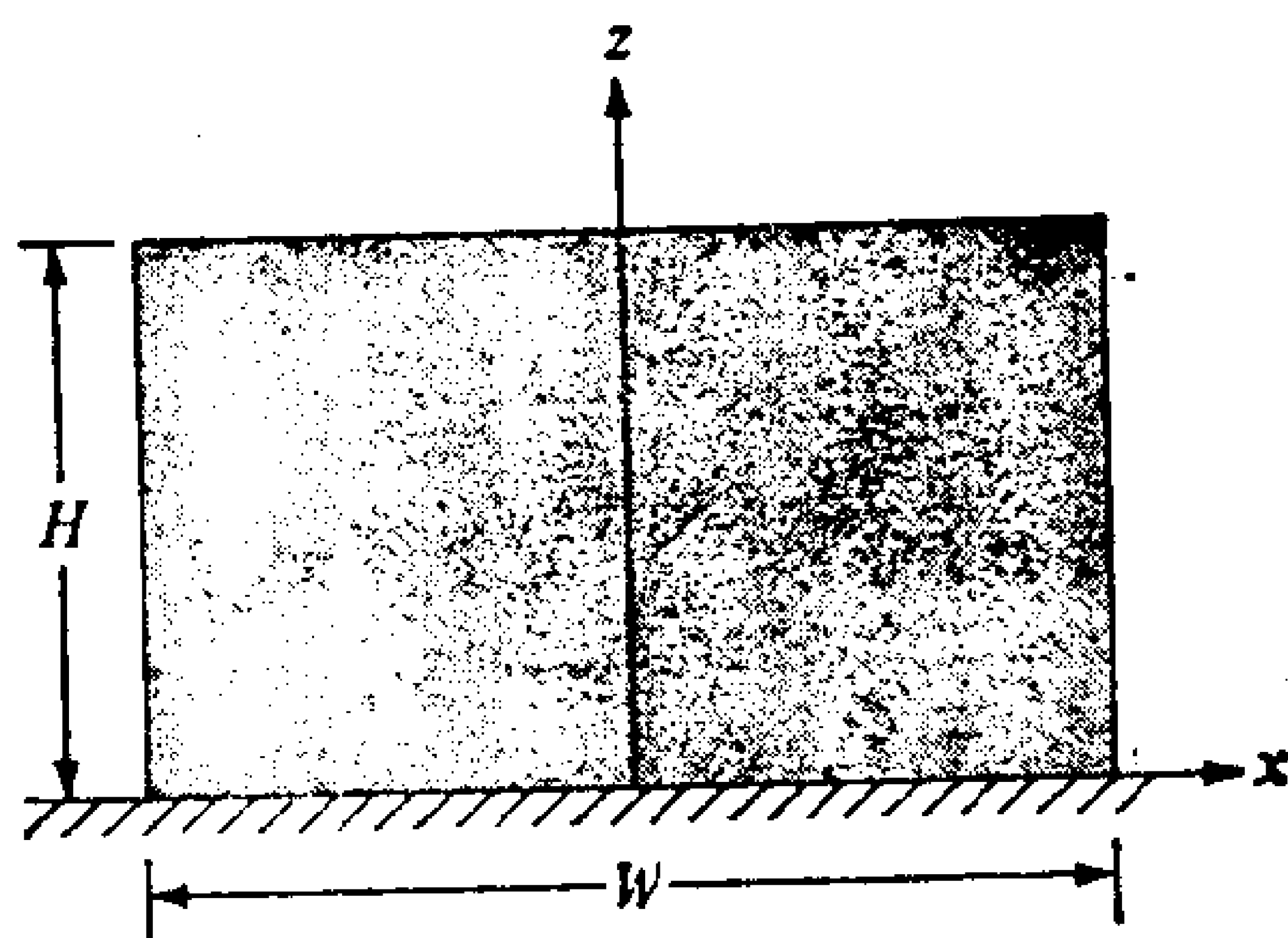


图 15.4 假设静止地停留在固体上的一块流体.

解(6)式，其中体力为重力：

$$\mathbf{f} = -g\mathbf{k}, \tag{7}$$

流体受到均匀的大气压强 p_a 的作用：

当 $0 \leqslant z \leqslant H$, $x = \pm \frac{1}{2} W$ (在侧面)时, $p = p_a$　　(8a)

当 $z = H$, $-\frac{1}{2} W \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} W$ (在顶面)时, $p = p_a$ (8b)

作为一种习惯，当求解具体问题时，我们采用 x, y 和 z 作为空间坐标，而不用比较麻烦的 x_1, x_2, x_3.

如果我们利用(7)式，(6)式便变成

$$-p_x = 0, \quad -\rho g - p_z = 0, \tag{9}$$

方程 (9) 和 (8b) 要求 $p = -\rho g(z - H) + p_a$, 但是，利用这个压强，我们不能使 (8a) 式得到满足. 如所指望的那样，我们的方程组表明，图 15.4 不能描述静止流体. 另一方面，如果在 $x = \pm \frac{1}{2} W$ 处存在一个壁面，此时(8a)式的情况应该删去，流体静力学方程以及其边界条件便会得到满足.

假定有一块物质放在一张桌子上不发生形变. 我们的讨论似乎允许我们排除掉这是一块流体的假设. 但是，如果长时期进行观察，这一块物质会经受类流体的形变. 我们应该说，"在受到几个小时重力的作用这一块物质的行为并不象流体". 这种更为精确的术语使我们想起抽象观念"流体"对于理解某种范围的现象是很有用的. 这就使我们对听到下列说法时不会感到惊异：在研究地质时标下出现的形变时，通常可以把"固体岩石"看作流体[1].

---

1) 在 *Physics Today* (Vol 17, p62, 1964) 上的一篇评论中，M. Reiner 把岩石流动的知识归于 Prophetess Deborah. 在战胜腓力斯人后，在她的一首著名的歌中，她唱道："山脉在基督面前是流动的". 在三百年之前当圣经翻译成英语时，译者们……把这一段翻译成"山脉在基督面前熔化". 并且因此而成为权威版本. 但是 Deborah 知道两件事情. 第一、如同一切东西都流动一样，山脉是流动的. 第二、山脉是在基督面前流动，而不是在人面前流动. 其简单的理由是人在他短暂的一生中，不能看到山脉的流动，而上帝的观察时间是无限的. 我们因此而可以很好地定义一个称之为 Deborah 数的无量纲数

$$D = \frac{\text{松弛时间}}{\text{观察时间}}.$$

于是固体和液体之间的差别由 D 的大小所确定.

那末从科学的观点来看，我们不应该问某一块给定的物质是固体还是液体. 如果 Deborah 数大，物质应该看作固体，否则它就应该看作液体.

无粘性流体

关于切开冷蜂蜜的讨论，我们把大的剪应力与通常称之为"高粘性的流体"联系在一起. 相反，很容易用一把刀切过水和空气. 因此，作为一级近似，无论如何可以假设在这些不重要的流体剪应力总是为零. 因此，我们定义一类**无粘性流体**. 对于这种流体来说，即使它们处于运动状态，应力张量也满足本构方程(4). 线性动量守恒方程(14.2.19)现在便变成著名的**无粘性流动的欧拉方程:**

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{f}. \tag{10}$$

本章其余部分包含有几个表明无粘性[1]假设成功与失败的例子. 我们将把刚才推导的欧拉动量方程，质量守恒方程和(在研究压缩波时)合适的状态方程作为基本方程. 我们将要求没有流体穿越边界. 但是在没有剪应力存在时，我们没有理由对无粘性流体可以怎样在边界上滑动提出任何限制.

练　　习

†1. 试证明，对于完全浸没在液体中的物体，作用在上面的净压力大小，等于物体所排开液体的重量. 证明力的方向向上(与重力方向相反).

2. 假定重力沿与 z 轴方向相反的方向作用，从第一原则详细推导流体力学方程

$$\frac{dp}{dz} + \rho g = 0.$$

让作用在水平流体薄片上的净垂直力等于零，从而完成这个推

1) 名词"理想"过去常常用于满足(10)式的流体. 这个名词也许反映了十九世纪的一种乐观主义的观点，即只有造物主的失败，才能使自然界与它比较容易接受数学分析的行为有偏离.

导.

下面两个练习讨论一个很有用的概念**流函数**

3. (a) 考虑二维定常流体流动. 试证明连续方程意味着 $\nabla\Lambda(-\rho v\mathbf{i}+\rho u\mathbf{j})=0$. 因而存在一个函数 ψ 满足 $\rho u=\psi_y$, $\rho v=-\psi_x$. 为什么? 试证明,当 $\rho=$ 常数时,这个关系式也适用于非定常流动.

(b) 通过证明曲线 $\psi=$ 常数是流线,证明把 ψ 称做"流函数"这个名词是合理的. (因此, ψ 的确定与得到流动的流线是等价的: 只要经过微商也可求得 ρu 和 ρv.)

†4. (a) 令 C 为连续二维流动的一对流线 ψ_0 和 ψ_1 的曲线. (见图 15.5)设当 C 与这两条流线相交时 C 的弧长 s 的值为 s_0 和 s_1, $s_1>s_0$. 试证明

$$\int_{s_0}^{s_1}\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}ds=\psi_1-\psi_0,$$

式中 $\mathbf{v}$ 是速度矢量,并且

$$\mathbf{n}=\frac{dy}{ds}\mathbf{i}-\frac{dx}{ds}\mathbf{j}.$$

从物理上作解释.

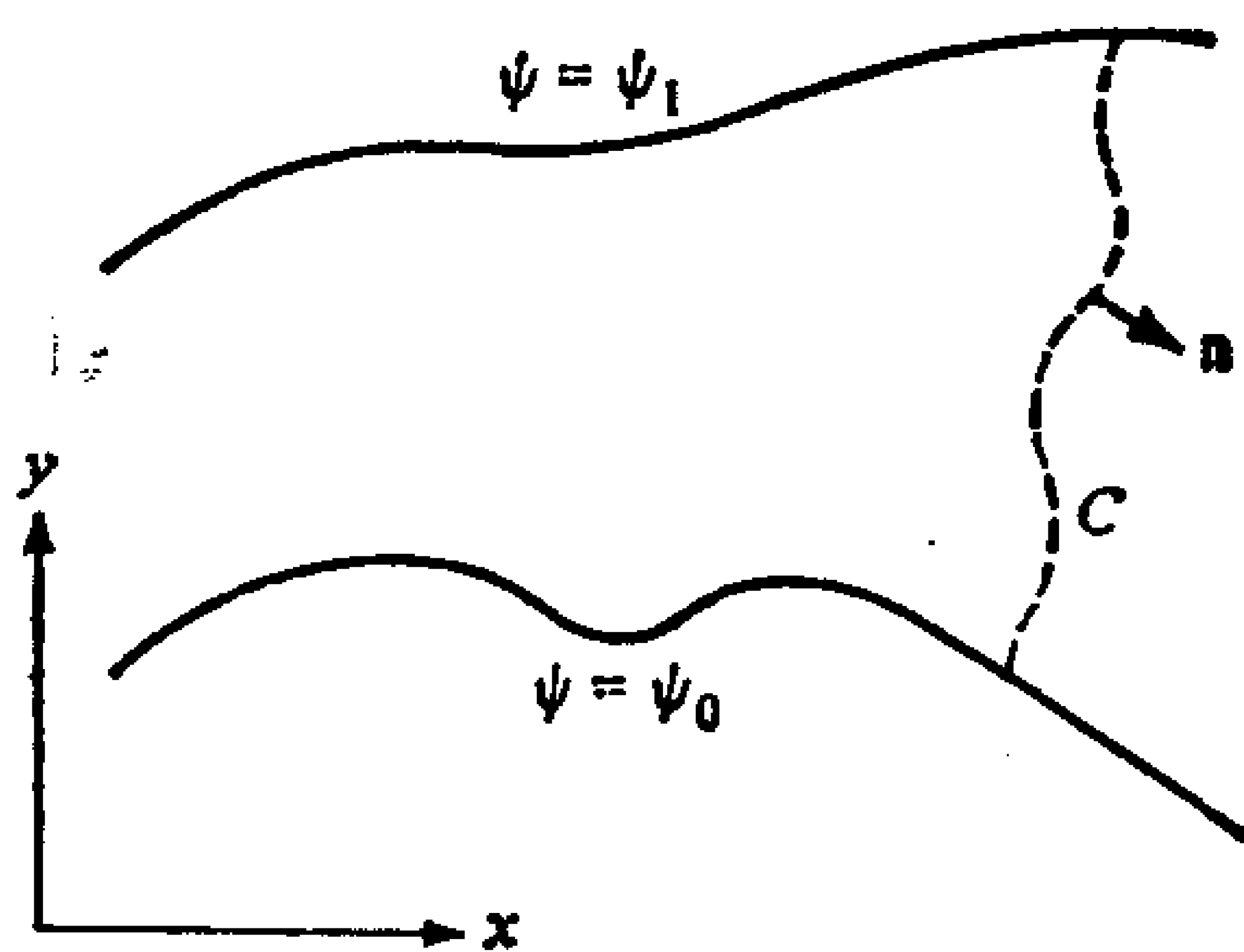


图 15.5 两条流线 $\psi=\psi_1$ 和 $\psi=\psi_0$. 计算沿任意曲线 C 的积分(C 的法线为 $\mathbf{n}$),从而给出差 $\psi_1-\psi_0$ 的物理解释

(b) 考虑密度为常数的无粘性流体的二维运动、设保守体力 $\mathbf{f}$ 用位势 Φ 给出, $\mathbf{f}=\nabla\Phi$. 取动量方程的旋度,试证明

$$\frac{\partial(\nabla^2\phi)}{\partial t}+\frac{\partial(\nabla^2\phi,\phi)}{\partial(x,y)}=0,\quad \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

(于是,矢量方程的三个分量便为一个数量方程所代替.)

†5. **正压流体**定义为其中压强只依赖于密度的流体: $p=p(\rho)$. (等熵流中的理想气体便是一例.) 在这样一种流体中,试证明 $\nabla\Lambda(\rho^{-1}\nabla p)=0$. 如果 $\nabla\Lambda q=0$, 那末对某个 r, $q=\nabla r$. 高等微积分书给出了确定 r 的方法. 利用这样一个方法去确定在正压流体中 $\rho^{-1}\nabla p$ 是其梯度的数量函数.

6. 本练习证明,对于在保守体力作用下的无粘正压流体的一部分,如果速度势在这部分流体中一开始便存在的话,那末这个速度势将继续存在. 这就说明在很多问题中假定存在速度势函数的合理性. 特别是那些其中的运动可以看作从静止状态开始的流体. (在第 II 卷 2.3.10 要求用张量运算对这个重要结果进行另一种推导.)

(a) 出发点是练习 14.2.7 中得到的用物质变量表示的无粘性流体的下列运动方程:

$$\sum_{j=1}^{3}\rho\left(\frac{\partial^2 x_j}{\partial t^2}-\mathscr{F}_j\right)\frac{\partial x_j}{\partial A_k}=-\frac{\partial p}{\partial A_k};\quad k=1,2,3.$$

假定外力是保守的,因此力矢量是某些标量势 Ω 的梯度 ($\mathscr{F}_j=-\partial\Omega/\partial A_j$). 进一步假定流体是正压的 $[p=p(\rho)]$. 对时间在 0 到 t 之间积分上述方程,证明它们可以写成

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial x_j}{\partial t}\frac{\partial x_j}{\partial A_k}-V_k^{(0)}=-\frac{\partial \chi}{\partial A_k};\quad k=1,2,3.$$

式中

$$\chi=\int_0^t\left[\int\frac{dp}{\rho}+\Omega-\frac{1}{2}(V_1^2+V_2^2+V_3^2)\right]dt,$$

$$V_k = \frac{\partial x_k}{\partial t}.$$

为了做到这一点，利用分部积分，并证明

$$\left.\frac{\partial x_k}{\partial A_k}\right|_{t=0} = 1.$$

可直接从偏导数的定义得到.

(b) 假定对于有限体积的流体，$t = 0$ 时存在着速度势

$$d\phi_0 = \sum_{i=1}^{3} V_i^{(0)} dX_i; \quad V_i^{(0)} = V_i|_{t=0}.$$

推导

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x_k}{\partial t} dx_k - \sum_{i=1}^{3} V_k^{(0)} dA_k = -d\chi,$$

从而证明在所有其他时间内在同一部分流体中存在着速度势.

7. 这个练习证明，无粘性流体的动量方程在某些情况下可以积分，得到伯努利方程. 如同后面一个练习所指出的那样，伯努利方程给出了速度和压力之间的一种非常有用的关系.

(a) 比较方程两端的分量证明下列等式

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla(|\mathbf{v}|^2) - \mathbf{v} \Lambda (\nabla \Lambda \mathbf{v}).$$

(这个结果是第 II 卷 2.3 节定理 7. 那里利用张量计算方法给出了一个更为精巧的证明.)

(b) 满足 $\nabla \Lambda \mathbf{v} = 0$ 的流体运动称为**无旋的**. (第 II 卷 3.1 节开头有一个讨论指出为什么这个术语是合适的.)对于无旋流体，存在某个速度势 ϕ，$\mathbf{v} = \nabla\phi$. 同样，如果力场 $\mathbf{F}$ 是保守的，那末对于力势 Φ 有 $\mathbf{F} = -\nabla\phi$.

对于保守体力作用下的无粘性正压流体，推导无旋运动的**非定常伯努利方程**

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + \int \rho^{-1} dp + \Phi = \text{一个时间的函数}.$$

注释：一个重要的特殊情形是均匀密度的定常流动，这时，伯努利方程显然变为

$$\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + \frac{p}{\rho} + \Phi = 常数.$$

†**8.** 均匀密度的无粘流体沿变截面水平管道作定常无旋流动．假定在任何给定截面上速度均匀．如果 Δp 是连接横截面分别为 s_1 和 s_2 的差分压力计上所指示的压强差，试找出单位时间流过的液体质量的公式．答案是某个量的平方根．这个量可能是负的，因而质量流量是虚的吗？

9. 考虑某个锡罐（正圆柱）以等角速度 ω 旋转．流体象固体一样旋转的速度为

$$u = -\omega y, \quad v = \omega x, \quad w = 0.$$

（这是在普通的笛卡儿坐标中——不是极坐标.）上述速度场在锡罐上满足边界条件．试证明具有重力的无粘性不可压缩流动的运动方程也得到满足．假定流体表面的压强等于大气压强 A（A 为常数），试求出自由表面的形状．

10. 一个轴对称计时水漏的设计使它所容纳的不可压缩无粘性液体的表面以等速度 V 下降（见图 15.6）．试证明 $y \sim x^4$，并求出比例常数．

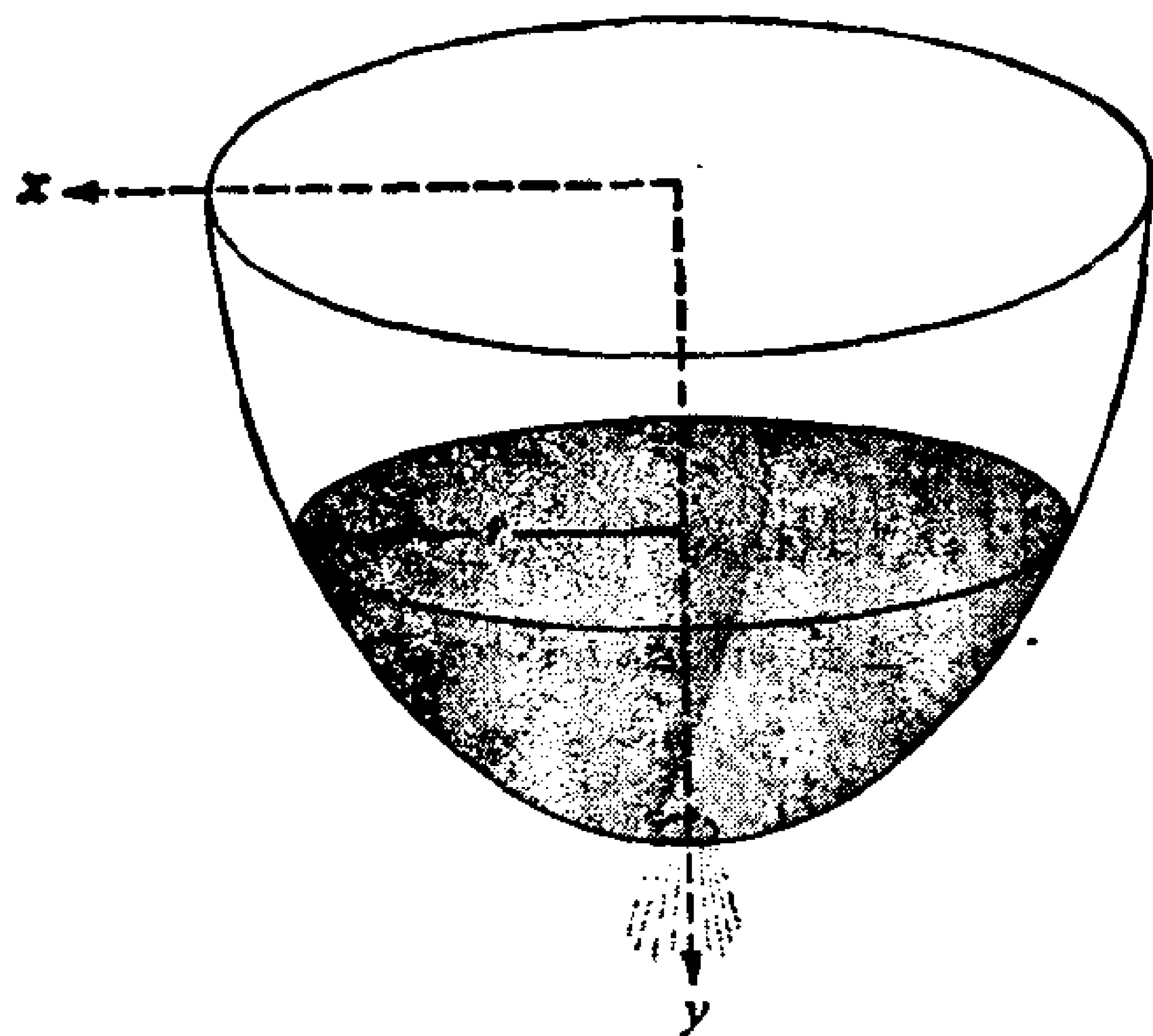


图 15.6　旋转图形式的容器．在每个 y 处横截面为半径 r、面积 $S = \pi r^2$ 的圆．液体经过底部一个小孔外漏，容器设计得使它的表面以常速 V 下降．

15.2 分层流体的稳定性

粘菌阿米巴在耗尽了食物供应以后，突然开始集聚到比较规则、彼此留有一定间隔的聚集点上．如果驱动压力增加得很大的话，光滑地流过管道的流体会发展出强烈的随机旋涡．如果把少量额外载荷加到一个金属结构上去，它就会崩塌，所有这些以及其他更多的现象都可看作是**平衡失稳**的例证．所谓**平衡态**，我们指的是问题的基本方程所允许的定常态．如果把一个系统置于多少偏离平衡态的状态，我们就说这个系统从平衡态**受到了扰动**．**扰动**就是为了取得扰动状态我们必须加给平衡态的东西．如果在系统在演变的意义上，平衡态的初始扰动在变大，那末我们就说**平衡态对扰动是不稳定的**．

1.3 节简要地讨论了具有生物学兴趣的一个失稳问题．如果至少已经浏览过这段讨论的话，那么在动机上将是有帮助的．更重要的是在进行下面的讨论前，读者熟悉 11.1 节中（与其他材料无关地）叙述的单摆的失稳计算．因为在这里我们将研究与单摆的稳定性理论有关但却更为复杂的材料，这就是研究底重流体层和顶重流体层的稳定性．

单摆是一个只具有单个自由度的力学系统．它的状态可以用一个变量来描述，即杆与参考值的角偏离．因此单摆随时间的演变只为一个常微分方程所制约．相反，流体层可以说具有无数个自由度．在这种情况下，在给定时刻描写流体的状态需要在流体层的每一点给定三个速度分量、压力和密度．这个系统随时间的演变为一个偏微分方程组所制约．但是除了这些深刻的差别外，我们(正确地)猜测到，顶重流体的行为与倒置摆，底重流体的行为与处于“正常”位置上的单摆，存在着许多相似之处．

我们之所以如此细致地对单摆的运动进行研究，这不仅因为它的直接的技术上的重要性，而且还因为它为许多物理情形提供了一个比较熟悉和容易为人们理解的范例．类似地，下面要研究的无粘性流体运动，虽然它本身具有不小的意义，但是当把它看作

用来说明连续分布系统失稳的自然现象的范例时，它还获得很大的附加重要性.

这种问题的一个极端情形是我们将要考虑的涉及两种互不相溶流体(譬如说油和水)的运动. 分开来看,这两种流体中,每一种都可看作具有均匀密度,但这对于它们的混合物却并非如此. 在运动过程中,空间某特殊点的密度可能首先是水密度,然后是油密度,再是水密度,如此等等. 尽管如此，与给定的流体微团小包相联系的密度在小包来回运动时仍然是常数. 推而广之，我们将在本节考虑不可压缩但密度不均匀的流体.

我们将看到,如果重力垂直向下作用,那末，对于只依赖于垂直坐标 z 的任何密度分布，在原则上不可压缩的水平流体层可能保持静止. 因此,我们在本节的标题下论述**分层流体**，即(密度不同的)"以薄层形成的"流体. 假定流体是无粘性的,我们来研究水平分层的流体层的稳定性. 我们将对各类分层得到某些一般的结果，而对特殊的情形得到某些特殊的结果. 我们分析的第一个目的是得到速度和密度扰动的一组线性偏微分方程. 因为平衡解只依赖于垂直坐标，于是我们就把问题归结为一个函数 z 的偏微分方程.

基本方程及其精确平衡解

那么我们来考虑位于 $z^*=0$ 和 $z^*=d$ 的两块刚体平面之间变密度的不可压缩无粘性流体. (这里 z^* 是垂直坐标;x^* 和 y^* 将是水平坐标.)基本方程如下:

质量守恒:

$$\frac{D\rho^*}{Dt^*}+\rho^*\nabla\cdot\mathbf{v}^*=0. \tag{1a}$$

无粘性流体线动量平衡:

$$\rho^*\frac{D\mathbf{v}^*}{Dt}=-\nabla p^*-\rho^* g\mathbf{k}. \tag{1b}$$

不可压缩性:

$$\frac{D\rho^*}{Dt} = 0. \tag{1c}$$

水平平面的不渗透性:

$$\text{对于} \quad z^* = 0, d, \quad \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{k} = 0 \tag{1d}$$

除了已加上星号以强调变量不是无量纲的之外，所有变量都具有它们的习惯上的含意．跟平常一样，$\mathbf{k}$ 是"垂直"坐标矢量，g 是重力加速度，因此 $-\rho^* g\mathbf{k}$ 是用来代表垂直向下作用的重力为常数的正确的一项．

为了把明显地出现的参数数目加以减少．（参阅 6.2 节关于量纲分析的讨论．）可供我们使用的是长度 d 和重力加速度 g（量纲：长度/时间²）．为了得到质量的量纲，我们使用"标准"密度 R_0（量纲：质量/长度³）．因为尚未有明显的方法赋给常数 R_0 以确定的值，我们暂时对它不作规定．

我们选择 d、g 和 R_0 的组合使没有星号的变量定义为如下无量纲[1)]量:

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}^*}{d}, \quad t = \frac{t^*}{(d/g)^{1/2}}, \quad \rho = \frac{\rho^*}{R_0},$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}^*}{(dg)^{1/2}}, \quad p = \frac{p^*}{R_0 dg}.$$

如果我们引进这些变量，并且再用(1c)式来修正式(1a)，我们得到

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p - \rho\mathbf{k}, \tag{2a,b}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0; \quad \text{对于} \ z = 0, 1, \ w = 0, \tag{2c,d}$$

这里 w 是速度的垂直分量，算符 ∇ 和 D/Dt 用新的（无星号）变量来解释．方程(2)本质上与方程(1)相同，只是在方程(2)的无量纲变数中边界平面间的距离和重力加速度都具有值 1．

1) 距离与层的厚度 d 相比较．因为因子 $2^{1/2}$ 会把方程弄乱，所以把它略去了，要不时间可与 $(2d/g)^{1/2}$ 相比较，后者是从静止开始的粒子自由地落过这层流体所用的时间．类似地，速度在本质上是以末速度 $(2dg)^{1/2}$ 为参考量，这是一个粒子从静止开始下落距离 d 所达到的速度．

一个静止层是否相应于方程(2)的一种可能的解呢？在 $\mathbf{v}=0$ 时，(2a)和(2d)自动满足，而剩下的方程变为

$$p_x=0,\quad p_y=0,\quad p_z=-\rho,\quad \rho_t=0,\quad (3a, b, c, d)$$

式中下标表示偏微商. 方程(3a)和(3b)要求 p 与 x 和 y 无关，而(3d)要求 ρ 与 t 无关. 有了这些知识，(3c)变为

$$p_z(z, t)=-\rho(x, y, z), \tag{4}$$

这里我们已明显地示出了 ρ 和 p_z 的其余的可能的自变量. 如果对任何时间 t_1 和 t_2，我们有

$$p_z(z, t_1)\neq p_z(z, t_2),$$

那末与(4)式便有矛盾. 因而 p_z 不能随 t 而变. 类似地，ρ 不能随 x 和 y 而变. 因此 p_z 和 ρ 只能依赖于 z.

令

$$\rho\equiv R(z), \tag{5}$$

式中 $R(z)$ 是 z 的一个任意函数. 于是由(4)式

$$p(z)=-\int R(z)dz. \tag{6}$$

在不定积分(6)中所隐含的（可能与时间有关的）积分常数可以在某高度 $z=z_0$ 处用来使 $p(z)=0$. 这仅仅意味着 $p(z)$ 是相对于在参考水准 z_0 处的零值而测量的. 请注意，把参考水准改变意味着在 p 的定义上加一个常数. 因为 p 只以形式 ∇p 出现，这并不影响运动. 也请注意，现在似乎有几种切合实际的方法来定义参考密度 R_0，即 $R_0=R\left(\frac{1}{2}\right)$（在流体层中央的密度）或 $R_0=\int_0^1 R(z)dz$（平均密度）.

我们已经证明，

$$\mathbf{v}\equiv 0,\quad \rho=R(z),\quad p=-\int R dz \tag{7}$$

是任何(可积)变量的基本方程 (2) 的精确解. 我们现在以类似于研究单摆平衡态稳定性的方式来讨论这个精确解对小扰动的稳定性.

扰动的线化方程

我们首先把对精确解(7)的扰动规定为 $\mathbf{v}'$, $\boldsymbol{\rho}'$ 和 p':

$$\mathbf{v}=\mathbf{0}+\mathbf{v}',\ \rho=R+\rho',\ p=-\int R dz+p'. \tag{8}$$

把(8)式代入基本方程(2)，我们得到一组扰动量的非线性偏微分方程. 例如,不可压缩条件(2)变为

$$\begin{aligned}0&=(R+\rho')_t+u'(R+\rho')_x+v(R+\rho')_y\\&\qquad+w'(R+\rho')_z\\&=\rho'_t+u'\rho'_x+v'\rho'_y+w'[R_z+\rho'_z].\end{aligned} \tag{9}$$

与单摆的情况一样，即使我们只限于扰动很小的情况，以致当二个扰动项的乘积项与一个扰动项相比很不重要时，我们可以忽略乘积项,这样仍然可以获得有意义的知识. 应该清楚地理解，我们限于小扰动并非因为只有这些扰动在物理上才有意义，而是因为只有这种限制才能使我们得到可以求解的比较简单的问题.

把**线化步骤**[1)](舍去非线性项)应用于(9)式得到

$$\rho'_t+\frac{dR}{dz}w'=0, \tag{10}$$

而当这个步骤应用于动量平衡条件(2b),得到三个数量方程

$$Ru'_t=-p'_x,\ Rv'_t=-p'y,\ Rw'_t=-p_z-\rho'. \tag{11a,b,c}$$

不作近似,连续方程(2a)就可化成线性方程

---

1) 熟悉尺度化(6.3节)的那些读者,可以较好地理解线性化. 在(9)式中，如果所有的扰动项都比1小,那末(例如)象 $u'\rho'_x$ 和 $v'\rho'_y$ 那样的项就可以忽略，而象 ρ_t 项就保留下来. 但是，我们所有的无量纲化过程是以与描述质点自由下落的尺度可比较的长度为基础的. 因此,如果扰动流的实际速度比自由落体的终端速度小,那末无量纲垂直速度 v' 就比1小. 这一论证以及与此类似的论证给出了"小扰动"所表示的概念.

如果我们希望完全采用尺度化方法，我们就会选择 $(dg)^{1/2}\varepsilon$ 作为一个速度尺度，$0<\varepsilon\ll1$. 这便明显地指出，我们在考虑一种情况，其中最大的预期速度比自由落体的终端速度小. 类似地把小参数 ε 引进其他自变量的尺度中去,就会使基本方程的所有非线性项前出现 ε. 这样我们就为一种扰动分析建立了步骤，而这个分析所得到的一阶方程构成了课文的主要部分中不很正式地推导出来的非线性问题.

$$u'_x + v'_y + w'_z = 0. \tag{12}$$

边界条件(2d)要求

$$对于\ z = 0, 1, \quad w' = 0. \tag{13}$$

方程(10)—(13)构成了扰动的线性问题. 对于五个未知函数u'、v'、w'、p'和ρ'，有五个偏微分方程.

在线性偏微分方程组(10)、(11)和(12)中，自变量x、y和t只以导数形式出现. 换句话说，就这些变量而言，偏微分方程具有常系数. 把具有常系数的线性常微分方程所用的方法加以推广，我们就得到对变量x、y和t中的每一个都以指数形式依赖的解，而且，把这个解代入方程后每个项都会有一个最终可以相消的指数因子.

上面这一段部分地推动着我们去寻找如下形式的解

$$\begin{bmatrix} u'(x, y, z, t) \\ v'(x, y, z, t) \\ w'(x, y, z, t) \\ \rho'(x, y, z, t) \\ p'(x, y, z, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{u}(z) \\ \hat{v}(z) \\ \hat{w}(z) \\ \hat{\rho}(z) \\ \hat{p}(z) \end{bmatrix} e^{i(k_1x+k_2y)+\sigma t}. \tag{14}$$

在这里，似乎我们只在考虑非常小的一类扰动. 然而，即使这些扰动是真的，我们的方程也只简化为常微分方程，这就使它们的求解比较容易[1]. 我们下面将要讨论的一个更有力的观点是我们的特殊扰动方法可以"加起来"，从而得到一个相当一般的扰动.

我们注意到，如同经常对线性问题那样，我们既可取复数解(14)的实部，也可取它的虚部作为我们的最后的解，以满足速度、压强和密度都是实数的要求.

在(14)式中，σ可以是复数，但我们却把k_1和k_2取作实数，如果k_1和k_2两者之一的虚部不为零，那末当$x \to \pm\infty$，或$y \to \pm\infty$时，扰动将无界地增长. 例如，如果

---

1) 花费大量的工作去得到一个特殊的解是不明智的. 但是如果只需比较少量的工作，考虑一种特殊情况可能是值得的. 这是应用数学中方法的一个一般规则.

$$k_1 = k_1^{(r)} + ik_1^{(i)}, \quad k_1^{(i)} \neq 0,$$

那末

$$|\exp ik_1x| = \exp(-k_1^{(i)}x) \to \infty \begin{cases} \text{如果 } k_1^{(i)} < 0, \text{ 当 } x \to +\infty \text{时}, \\ \text{如果 } k_1^{(i)} > 0, \text{ 当 } x \to -\infty \text{时}. \end{cases}$$

把 k_1 和 k_2 限制为实值，这就限制了所讨论的这组扰动，但是这一组扰动似乎足以把足够多的成分包括进来以合成感兴趣的所有扰动．考虑一下长管进口处产生的形成对比情况的扰动可能是很有帮助的．这里"感兴趣的扰动"时间上有限但空间上是增长的[1]．

在建立了要加以考虑的扰动形式以后，我们可以进行计算．把(14)式代入(10)、(11)和(12)式，并消去公有的指数因子，我们便得到线性常微分方程

$$\sigma\hat{\rho} + \frac{dR}{dz}\hat{w} = 0, \tag{15}$$

$$R\sigma\hat{u} = -ik_1\hat{p}, \quad R\sigma\hat{v} = -ik_2\hat{p},$$

$$R\sigma\hat{w} = -\frac{d\hat{p}}{dz} - \hat{p}, \tag{16a,b,c}$$

$$ik_1\hat{u} + ik_2\hat{v} + \frac{d\hat{w}}{dz} = 0, \tag{17}$$

和边界条件

$$\hat{w}(0) = \hat{w}(1) = 0. \tag{18}$$

把增长率 σ 表征为一个本征值

因为把边界条件应用在 $\hat{w}(z)$ 上，我们就试图消去其他变量．做法如下[2]．求解(16a)和(16b)，用 $\hat{p}$ 表示 $ik_1\hat{u}$ 和 $ik_2\hat{v}$，再代入(17)式，我们便得到

---

1) 在最后的分析中，只有完全规定了的初边值问题才能确定应该加以考虑的那类扰动，但是，对象现在这个问题的初步研究中，采用一种较为非正式的方法是合适的．

2) 在一个给定问题中，发现一种有效的消去方案之前，可能要作大量的试凑．

$$\hat{p} = -R\sigma k^{-2}\frac{d\hat{w}}{dz}, \tag{19}$$

式中

$$k^2 \equiv k_1^2 + k_2^2. \tag{20}$$

这样利用(15)和(19)式，我们便可完全用 $\hat{w}$ 来写出(16c)，为了把我们的符号作简化，我们写成 $W = \hat{w}$. 最后得到[1]

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d}{dz}\left(R\frac{dW}{dz}\right) + k^2\left(\sigma^{-2}\frac{dR}{dz} - R\right)W = 0, \quad (21a)\\ &W(0) = W(1) = 0. \quad (21b)\end{aligned}}$$

我们立即从(21)式注意到，k_1 和 k_2 只以组合 $k^2 = k_1^2 + k_2^2$ 出现. 现在，我们正在考虑的扰动正比于

$$\exp[i(k_1x + k_2y)] = \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$$

式中 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, $\mathbf{k} = k_1\mathbf{i} + k_2\mathbf{j}$.

但是[练习 1(a)],

$$\exp\left[i\mathbf{k}\cdot\left(\mathbf{r} + \frac{2\pi}{k}\frac{\mathbf{k}}{k}\right)\right] = \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}).$$

因此，扰动沿直线 $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} =$ 常数(垂直于**波数矢量** $\mathbf{k}$ 的直线) 是常数. 它们具有空间周期 $2\pi/k$，式中 $k = (k_1^2 + k_2^2)^{1/2} = |\mathbf{k}|$. 只有 k 进入(21)式意味着稳定性行为只与扰动的空间周期有关；与扰动的方向无关. 这是可以预期到的，因为问题中没有优选的方向，但是，请记住，这里没有考虑的非线性问题，可能会在波数矢量的某些组合所形成的模式中表现出优选性来.

注释. 名词**全波数**或**水平波数**有时用 k 来表示 $\mathbf{k}$ 的大小.

似乎不可能找到一个用函数 $R(z)$ 表示方程(21)的显式解. 不过，我们确实知道，二阶线性常微分方程(21)具有如下形式的通解

---

1) 方程组(21)构成了斯图姆-刘维问题. 我们将重复 5.2 节中对这个问题的一些一般性的讨论. 这种重复有双重的目的：用一个特殊的问题说明一般性的概念；使本节自洽.

$$W = C_1 W^{(1)}(z;k^2,\sigma^2) + C_2 W^{(2)}(z;k^2,\sigma^2), \tag{22}$$

式中 $W^{(1)}$ 和 $W^{(2)}$ 是方程(21)的线性无关的解.（我们已经明显地指出过，解对参数 k^2 和 σ^2 的依赖性.）

应用边界条件(18)便得常数 C_1 和 C_2 的一对线性代数方程：

$$\begin{aligned} C_1 W^{(1)}(0;k^2,\sigma^2) + C_2 W^{(2)}(0;k^2,\sigma^2) = 0, \\ C_1 W^{(1)}(1;k^2,\sigma^2) + C_2 W^{(2)}(1;k^2,\sigma^2) = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

相应于 $W \equiv 0$，这些方程具有平庸解 $C_1 = C_2 = 0$. 情况应该如此，因为 $W \equiv 0$ 意味着 $u \equiv v \equiv p \equiv \rho \equiv 0$，而恒等于零的扰动对精确解来说肯定是允许的. 为了式(23)有非平庸解，我们必须有

$$\begin{vmatrix} W^{(1)}(0;k^2,\sigma^2) & W^{(2)}(0;k^2,\sigma^2) \\ W^{(1)}(1;k^2,\sigma^2) & W^{(2)}(1,k^2,\sigma^2) \end{vmatrix} = 0, \tag{24}$$

或者，如果定义函数 F，则有

$$F(k^2,\sigma^2) = 0. \tag{25}$$

当且仅当参数 k^2 和 σ^2 之间有某种关系，那末（齐次方程及边界条件（21）才构成一个具有非平庸解的**本征值问题**. 如果 k 看作已知，那末(25)式便以隐式确定了 σ^2. 一般地讲，相应于每个 k，有许多 σ 的允许值.

稳定性的结果如下. 给定扰动在 x 和 y 方向的波数 k_1 和 k_2，我们由(20)式来确定 k. 对于一个给定的 k，原则上可从(25)式得到 σ^2 值. 假定对于某些 k 值，存在着一个相应的具有实部的 σ：

$$\sigma = \sigma^{(r)} + i\sigma^{(i)}, \quad \sigma^{(r)} > 0.$$

因为

$$|\exp \sigma t| = \exp(\sigma^{(r)} t), \tag{26}$$

扰动速度、压强和密度将随时间指数地增加. 如果我们发现，静止流体层中至少有一个这样不断增长着的扰动，那末我们就把静止状态称为**不稳定的**. 如果对某一类扰动所有可能的 $\sigma^{(r)}$ 值都是负的，我们就把静止状态称为**对这类扰动是稳定的**. 如果对于某一扰动，所有的 $\sigma^{(r)}$ 值都满足 $\sigma^{(r)} \leqslant 0$，并且至少有一个值满足

$\sigma^{(r)}=0$,那末我们就把静止状态称为对**这类扰动是随遇稳定的**[1].

让我们回到所研究的具体问题。这就能使我们说明我们在前面四段中所作的一般性讨论，并为下节末尾多少比较全面的讨论打下基础.

定性的一般推导

给定特征值问题(21)，有两种做法. 第一种做法实际上不对方程进行求解，而是尝试着对各类初始密度分布 $R(z)$ 去做关于特征值 σ 的行为的某些一般的推论. 第二种做法是选择特殊函数 R，对问题作详细的求解，因而对某个具体问题的 σ 的行为得到一个完整的分析. 让我们从第一种做法入手

方程(21a)可能具有复数解，作为最终的结果，我们将只取(14)式的实部或虚部，因此没有物理上的理由要求W本身是实数，考虑到复数解的可能性，于是，我们用它的复共轭 $\overline{W}$ 乘(21a)式，并从0到1积分:

$$\int_0^1 \overline{W}\frac{d}{dz}\left(R\frac{dw}{dz}\right)dz+h^2\sigma^{-2}$$
$$\times\int_0^1 |W|^2\frac{dR}{dz}dz-k^2\int_0^1 R|W|^2dz=0, \qquad (27)$$

这并非一件明显要做的事，不过，如同我们将要看到的那样，它将产生一些有趣的知识. 我们正在进行的有关运算仅仅是许多方法中的一个最简单的例子，而这些方法是近年来发展起来去得到象(21)式那样的特性的知识的，而在实际上并不用显式去对它们进行求解.

如果我们分部积分(27)式中的第一项，便得到

---

1) 不稳定扰动最终增长得如此之大，以致线性理论变成不合理的. 然而，即使扰动按预期增长时，为了考查起见，大概总可能选择一些初始扰动，它们很小，因此在某个时间间隔内线性化是正确的. 因此，从线性理论推导出来的失稳结果对于静止状态下失稳的预测应该是有意义的，尽管此时线性化理论不能确定最终的流动条件.

$$\overline{W}R\frac{dw}{dz}\Big|_{z=0}^{z=1}-\int_0^1\frac{d\overline{W}}{dz}\left(R\frac{dW}{dz}\right)dz.$$

边界条件(21b)意味着 $\overline{W}(0)=\overline{W}(1)=0$,如此我们从(27)式推得方程

$$\sigma^{-2}\int_0^1\frac{dR}{dz}|W|^2dz$$
$$=\int_0^1 R|W|^2dz+k^{-2}\int_0^1 R\left|\frac{dW}{dz}\right|^2dz. \tag{28}$$

推论 1 如果对 $0\leqslant z\leqslant 1$, 有 $dR/dz>0$(密度随高度连续增加),那末对于某个正值 P,每个 σ^2 值都满足 $\sigma^2=P$. 因此

$$\sigma=\pm\sqrt{P}. \tag{29}$$

这可立即从(28)式得到,因为 k 是实数,这样就使密度是一个正量的下列物理要求明确了:

$$对于\quad 0\leqslant z\leqslant 1,\quad R(z)>0. \tag{30}$$

从(29)式我们看到,(21)式的特征值,*如果存在的话*;则它们将一个正一个负地成对出现. 有关常微分方程的论文中说明,只要 R 满足某些条件,事实上确实就有无穷多个特征值存在. 例如,对于 $0\leqslant z\leqslant 1$, R满足条件(30)并且具有两个连续导数这就足够了. 因此,相应于这种函数 R 的平衡态,由于在(29)式中存在着正根而一定是不稳定的. 不管初始密度扰动是什么,总可以完全以流体最终终止其重流体薄层在顶层的(非稳定的)平衡状态的方式去选择初始速度扰动.

推论 2 如果对于 $0\leqslant z\leqslant 1$, $dR/dz<0$, 那末对某个正量 p,我们得到 $\sigma=\pm i\sqrt{p}$. 对于相应于问题(21)的特征函数的这类扰动,静止状态是随遇稳定的. [这里也是从(28)式立即得到的.]与正常摆绕平衡位置周期振荡相似,当密度随高度的增加而连续减小时,速度、密度、压力将不断振荡. 因此,当稳定分层流体受扰动时,一定可以预期有波动存在. 这种"内波"在大气和海洋现象中是常见的,而且很重要.

我们来叙述一下下列很有价值的结果(Ince, 1927, 第 237

页),以结束我们对从方程(21)得到的一些定性推论的说明. 如果对于 $z_0 < z < z_1$, 有

$$\frac{dR}{dz} > 0, \qquad \text{这里 } 0 \leqslant z_0 \leqslant z_1 \leqslant 1,$$

那末有无穷多个正特征值 σ^2 存在. 因此,分层无粘性流体的一个静止层,如果它包含任何个子层,不论这个子层多薄,只要其中密度随高度增加,那末这个静止层便是不稳定的.

一个特殊分层问题的详细结果

我们现在对一个特殊函数 R 来考虑问题(21). 如果我们对分层流体的兴趣直接为一个具体应用而激励,那末函数 R 就选来代表某些实验测量结果. 这样一个函数可能相当复杂. 精确的分析会给出最终形式方程(21)的解,但数值方法很可能会是更适合于得到具体细节的方法,当我们试图处理实际问题时,往往就希望这样来做. 这里我们的兴趣更为一般. 因此,作为第一步,我们来寻找一个特殊函数 R 使方程(21)尽可能简单. 读者可能喜欢把下一段遮起来,花一点时间试着去找出这样一个函数.

犹如瑞利爵士第一个观察到的那样,可以证明,对于某个常数 β,如果

$$R(z) = \exp(\beta z),$$

那末(21a)简化为下列常系数方程

$$\frac{d^2W}{dz^2} + \beta\frac{dW}{dz} + k^2(\beta\sigma^{-2} - 1)W = 0. \tag{31a}$$

我们仍然有相同的边界条件

$$W(0) = W(1) = 0. \tag{31b}$$

倘若常数 r 是下面的二次方程的一个根,

$$r^2 + \beta r + k^2(\beta\sigma^2 - 1) = 0, \tag{32}$$

那末,常系数线性方程(31a)便有形为 $\exp(rz)$ 的解. 因此

$$r = -\frac{1}{2}\beta \pm \frac{1}{2}\sqrt{Q}, \tag{33}$$

式中

$$Q = \beta^2 - 4k^2(\beta\sigma^{-2} - 1). \tag{34}$$

很容易分别考虑如下几种情况，即方程(32)的根 r_1 和 r_2 为(1)不相等的实数；(2)相等的实数；(3)共轭复数。

情况(1)：$Q > 0$，方程(31a)的通解为

$$W = C_1\exp(r_1z) + C_2\exp(r_2z),$$

式中

$$r_1 = -\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\sqrt{Q},$$

$$r_2 = -\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\sqrt{Q}.$$

为了得到满足 $W(0) = W(1) = 0$ 的非平庸解，直接计算或应用式(24)，得到条件 $\exp(r_1) = \exp(r_2)$，对于正 Q 这条件并不满足。

情况(2)：$Q = 0$. 方程(31a)的通解为

$$W = C_1\exp\left(-\frac{1}{2}\beta z\right) + C_2z\exp\left(-\frac{1}{2}\beta z\right).$$

边界条件(31b)意味着 $C_1 = C_2 = 0$. 与情况(1)相同，没有非平庸解。

情况(3)：$Q < 0$，我们把 Q 写成 $Q \equiv -\mu^2$，因此方程(31a)的通解为

$$W = \exp\left(-\frac{1}{2}\beta z\right) \times \left[C_1\cos\left(\frac{1}{2}\mu z\right) + C_2\sin\left(\frac{1}{2}\mu z\right)\right]. \tag{35}$$

要求 $W(0) = W(1)$ 意味着

$$C_1 = 0, \quad C_2\sin\frac{1}{2}\mu = 0,$$

因而，对于非平庸解，有

$$\frac{1}{2}\mu = n\pi, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots. \tag{36}$$

因为 $Q=-\mu^2$,从(36)和(34)式我们推论得到，如果 $\sigma^2=\sigma_n^2$,这里

$$\sigma_n^2=4k^2\beta(4k^2+\beta+4n^2\pi^2)^{-1}, \tag{37}$$

那末方程(31)具有非平庸解(本征函数)

$$W=\exp\left(-\frac{1}{2}\beta z\right)\sin(n\pi z),\quad n=1,2,3,\cdots. \tag{38}$$

因为 $\sin(-n\pi z)=-\sin n\pi z$,所以在(38)式中允许有 $n=-1$, -2, -3 等,并不得到新的本征函数.

注释. (37)式是一般关系(25)的一个例子,我们断定过,如果本征问题要有非平庸解,那末就必须有这样一个关系把 σ^2 和 k^2 联系起来.

根据(37)式,如果 $\beta<0$ (密度随高度指数减少),那末 σ 是一个纯粹的虚数. 对于W由(38)式给定的那类扰动,平衡状态是随遇平衡的; p、u 和 v 可从(19)和(16)式得到. (记住 $W\equiv\hat{w}$.)

考虑到(37)式,对于 $\beta>0$ (密度随高度指数增加), 按照推论 I, 我们首先注意到 σ^2 是正的(失稳). 其次,让我们探讨一下 n 变化时的影响. 请记住,对于一定的水平扰动周期 $2\pi/k$, 对每个正数 n 就有一个周期为 $2/n$ 的垂直扰动模式. 每个这种扰动都为一个不同的时间因子 $\exp(\sigma_n t)$ 所放大, 这里 σ_n 由 (37) 式给定. 当 $n=1$ 时, 增长率 σ_n 最大, 当 $n\to\infty$ 时, σ_n 单调地趋向于零.

增长率随 n 的变化说明不同的 n 值有不同的流线形状. 图 15.7 示出了这些流线. 沿这些流线流动以不断增加的速度旋转. (在这张图上,为了简化得到这些流线所需的计算, 密度分层化因子取得很小. 练习 2 中要求做这些计算.) 显然, 当重流体在充满整个流体层的单个倾覆涡旋[图 15.7(a)]中下落时,其运动要比有两个涡旋[图 15.7(b)]等情况加速得快.

对于固定的 n,当 k 从零增加到无穷大时, σ^2 单调地从零增加到 β (图 15.8). 可以指望, σ^2 的最大值随 β 的增加而增加. 这就是说,其他条件一样,上面的重流体和下面的轻流体之间的密度差

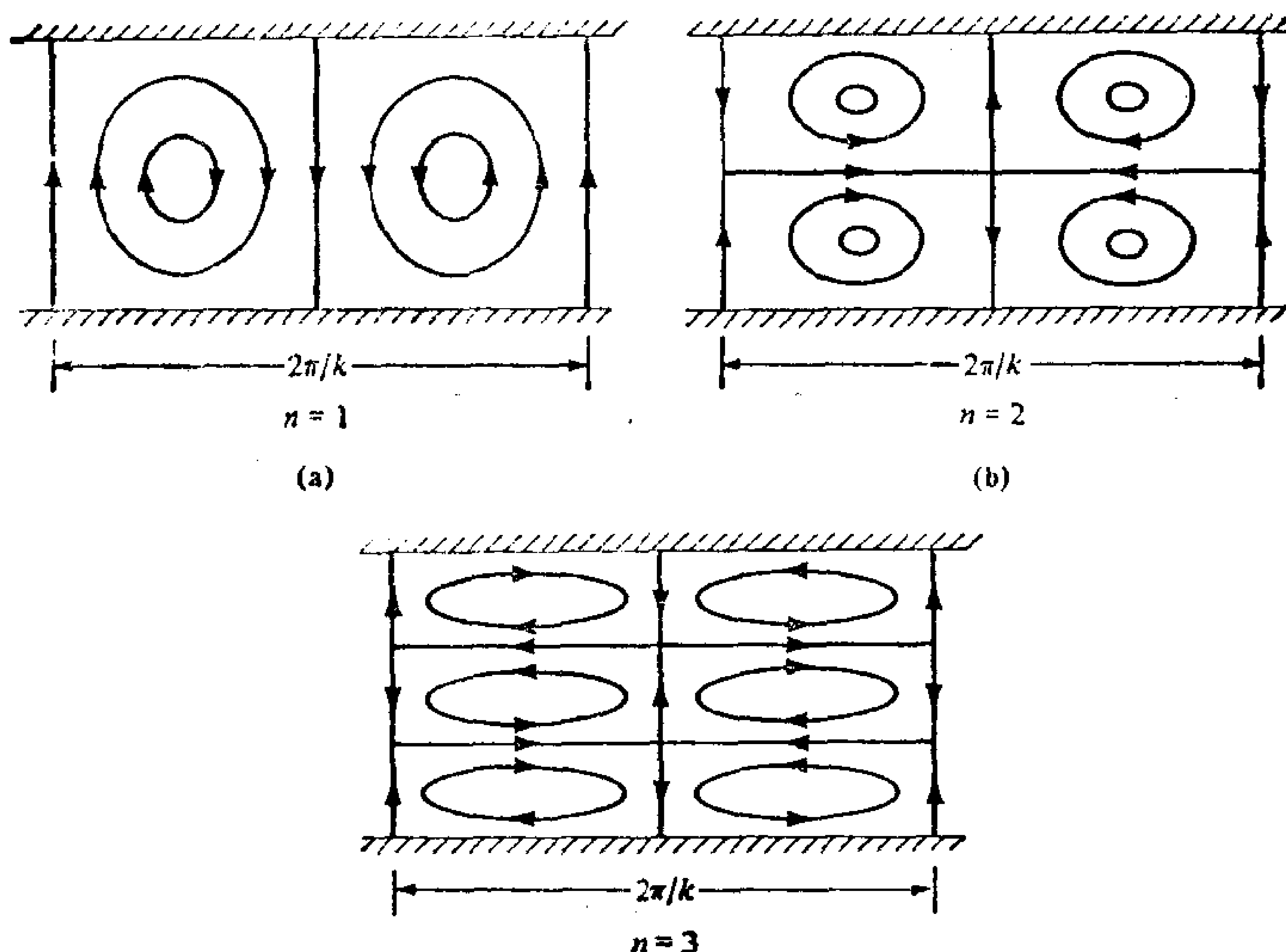


图 15.7 垂直方向上具有不同周期的扰动模式之流线图. 扰动是加在静止流体层上的，后者的密度随高度的变化为 $\exp(\beta z)$，β 是一个小正数. 倾覆运动或旋转运动可以看到是沿涡轴的.

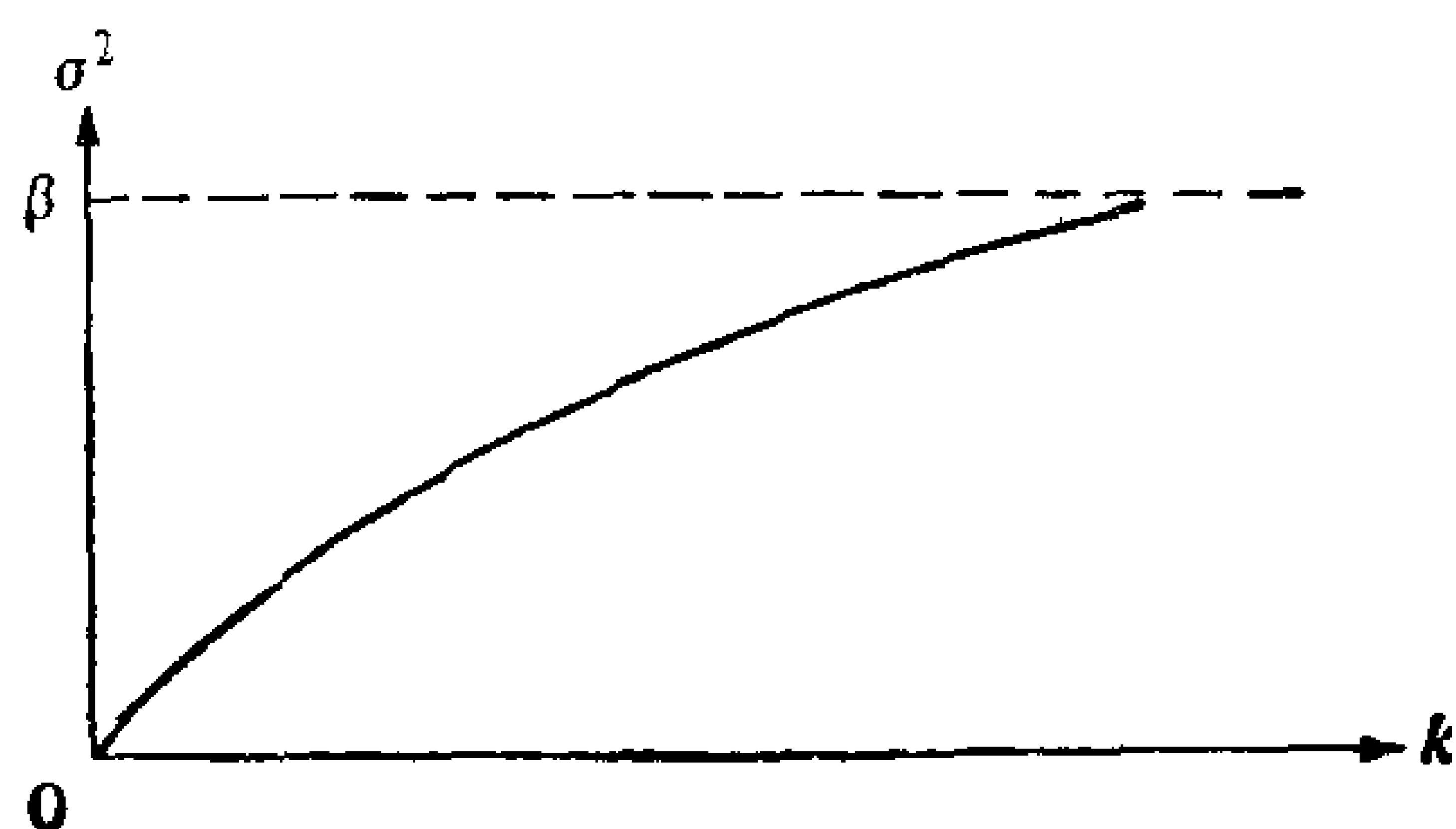


图 15.8 扰动增长率的变化作为水平扰动波数 k 的函数.

越大，运动就越快. 不怎么明显的是为什么 k 越大，因此涡旋越薄，运动越快. 这可用下面这一点来解释：扰动动能增加的速率是与比较重的顶层流体下落所引起的势能减小的速率相等的. 狭窄涡旋中的运动比宽阔涡旋中的运动快，因为后者包含较多的水平运动，而水平运动在势能释放中是不产生的.

根据(37)式，当 $\beta < 0$ 时，可得到类似的结果. 这些都留给读者去做 [练习 1(b)]. 不过，甚至不用更进一步去考虑，读者一定

会同意，通过对(37)式的仔细考察，已经引出了其量惊人的物理理解．还留下一个很自然的问题：这种理解中有多少只适用于(37)式成立的那种特殊的指数函数 R？又有多少适用于所有的函数 R 或它们中的一大类？ 不作进一步研究不可能有令人信服的回答，但是上面一段的一般性解释使我们十分确信它们具有广泛的适用性．

对具体问题的研究往往比有经验的人预料更有成效．就势能释放的机理来说，把注意力集中于某个特殊问题的一个异常的方面常常会导致具有普遍适用性的看法．一个特殊问题的比较平常的一些方面，往往是一大类问题的特性．只有在求解了几个特殊问题并将它们的解答作了比较以后才能想起某类问题有一个共同的方面．通常，这时才能表述某个一般性的论证，而这一论证证明上面的想法是正确的．

正态模的叠加

至此，我们的整个讨论都以某个特解为基础． 例如，在 $R(z)=\exp(\beta z)$的情况下，只考虑由方程(31)的解

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\beta z\right)\sin n\pi z$$

中的一个给出的垂直变化．但是，因为问题是线性的，允许对这些解进行叠加．这种叠加所代表的函数有多大的一般性呢？这就是说，对于合适的常数 d_n， f 是那一类函数下式才成立？

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} d_n\phi(z),\quad 其中\ 0\leqslant z\leqslant 1, \tag{39}$$

式中

$$\phi_n(z)=\exp\left(-\frac{1}{2}\beta z\right)\sin n\pi z. \tag{40}$$

如果我们用 $\exp\left(\frac{1}{2}\beta z\right)$ 乘等式(39)的两边，问题就变为选择常数 d_n 以保证

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin n\pi z, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1,$$

式中

$$F(z) \equiv f(z)\exp\left(\frac{1}{2}\beta z\right).$$

这是一个经典的傅里叶级数问题．在第四章中我们已经详细地讨论了这个问题，在这里不再对它作进一步的研究．

从比较大的方面来看，就如上面提到的那样，我们在考虑第五章中讨论过的**斯图姆-刘维理论**这个基本问题中的一个问题．这个理论讨论以(21)式为代表的一类特征值问题的性质，那末，假定我们考虑(39)式的展开，这里 $\phi_n(z)$ 就是斯图姆-刘维问题(21)的特征函数．我们只假定对于 $0 \leqslant z \leqslant 1$，$R(z)$ 具有两阶连续导数．于是，犹如 Ince (1927) 或 Coddington 和 Levinson (1955) 所做的那样，可以证明，如果

$$d_n=\int_0^1 f(z)\phi(z)dz, \tag{41}$$

那末，只要 $f(z)$ 满足本征函数所满足的同一边界条件(31b)，并且在 $0 \leqslant z \leqslant 1$ 中有两阶连续导数，则(39)式的右端在 $0 \leqslant z \leqslant 1$ 时一致收敛于 $f(z)$．

对各个 k_1 和 k_2 值把形为(14)的解叠加起来(加在一起)，我们还可进一步做下去着手处理一般的水平扰动问题．在第II卷第八章关于水波的讨论中，可以找到这种方法的一个例子．现在我们满足于这样的说法：把满足线性齐次偏微分方程(10)—(12)、边界条件(13)和 $x^2+y^2\to\infty$ 时解保持有界条件的本征函数(14)恰当地叠加起来，我们就可以处理很大一类扰动问题．(上面最后一个条件是用来去掉 k_1 和 k_2 的复值的．)

寻找象(14)式那样的本征函数，希望能用叠加方法处理一般的初值问题，称为稳定性的**正态模方法**．用这种方法得到的本征函数称为**正态模**．我们看到，用严格的正态模方法处理线性问题，不仅需要证明正态模可以合成给定的某类初始条件．而且还要求

证明相应的无穷级数满足方程和边界条件

评注．当正态模方法失败时（有时它确实如此），采用拉普拉斯变换就可挽回局面．例如，参阅 G. F. Carrier 和 C. T. Chang "On an Initial Value Problem Concerning Taylor Instability of Incompressible Fluids", *Q. Appl. Math.* **16**, 436—39 页(1959).[某些读者可能会发现用下列措词来看待这种情况是很有帮助的．正态模相应于孤立的特征值（点谱）．在很多情况下连续谱也存在，因此正态模并不构成一个完备集．为了求解这种初值问题需要积分叠加法.]

非线性效应

我们已讨论了一个扰动集，其中的扰动都很小，因而非线性效应可以忽略．但是这个集是非空集吗？这就是说，我们能否证明线性理论给出的扰动行为具有足够小的幅值．在很多情况下，近期工作已允许对这个问题给出肯定的答案．（这里和下文中，我们讲述普遍的稳定性理论.）

如果线性理论示出即使只有一个增长着的扰动，我们也感到确信，平衡态是不稳定的．非线性项可能起着把扰动的增长限制在非常小的振幅之内的作用．尽管如此，所得到的流动与平衡态也是不同的，因此后者可以合适地称为不稳定的.

相反，按照线性理论，如果所有的扰动都消失，这只表明足够小的扰动最终对平衡态根本不产生影响．这是一个很有用的结果，因为这意味着如果我们足够小心地把平衡流动与扰动隔离开来，那末流动应该持续下去．但是，我们必须多小心呢？是否可能是那些物理上"适中"但却大得足以使线性理论不能应用的扰动使平衡流动失稳的情形呢？这些问题构成了60年代开始发展的非线性理论．有人在一篇文章中指出，有些流动对大幅度的扰动是极其敏感的，而对另外一些流动，增加扰动的幅度并不加速失稳的建立.

计算机是研究大扰动不可缺少的．作为一个已取得结果的例

子，考虑 B. J. Daly 对轻流体层上放着的重流体层失稳的数值研究。Daly 报告说，"密度比为 10:1 时，重流体以大小随时间加速的细长尖峰的形式通过轻流体下落．但是在密度比为 2:1 或更小时，尖峰的顶端加宽了，…… 因此，后来的速度……是常数．"同一作者的较晚一点的计算 [*Phys. Fluid* **12**, 1340 (1969)] 研究了表面张力把尖峰破裂成分开液点的作用．

当扰动很小时，流动一开始的发展的计算结果与线性稳定性理论一致．计算结果完全与有关的实验相符．

已解得的例子：一个粘性流动失稳的模型

还有一个线性稳定性理论的性质没有说明，这就是关于失稳开始时增长着的扰动具有特别有限的波长的预测． 我们已经看到，对于无粘性分层流体来说，当流体是顶重时，所有波长的扰动都是不稳定的．我们关于特例 $R(z)=\exp(\beta z)$的研究表明，因为较小的涡旋在耗尽已有的势能方面比较有效，因此增长速度随波长的增加而减小．然而当考虑粘性时，因为短波长所造成的大的速度梯度耗散了大量的能量，所以很短的波长是不起作用的．一种"综合平衡"导致了中等波长是"最危险的扰动"的结论．

因此，当粘性流体变成足够顶重时，他们以一定的波长开始环流运动．足够的顶重是需要的，因为否则粘性的稳定性质将阻止运动．

继续进行顶重流体稳定性的研究已超出本文的范围． [进一步学习的材料可见 Chandrasekhar 的书 *Hydrodynamic and Hydromagnetic Instability* (New York: Oxford *U.P.*, 1961).] 然而，我们确实希望指出，当造成不稳定的影响足够大时，有许多例子，其失稳是在一定波长下建立起来的． 练习 10 示出了这样的一个例子，该例子研究有扩散存在时的化学反应．现在来概述另一个例子．

如果把简单的粘性流动充分加速，那末它们便变成不稳定的．不用去研究粘性流体运动，而只要对一个模型方程进行分析，便可

理解这一事实．这个方程设计得使分析保持着完整计算的基本性质，但却并不具有后者的复杂性．

例. 考虑分开距离为 d 的两块平板之间的粘性流动（粘性系数 $=\nu$）．设底板固定，顶板以速度 U 运动． 假托无量纲切向速度 $u(x, y, t)$ 满足下列方程和边界条件：

$$R^{-1}[u_{xx}+u_{yy}]-u_{xxxx}-u_t=u_{xx}u_y,$$
$$u(x,0,t)=0, \quad u(x,1,t)=1. \tag{42}$$

真实方程组与方程（42）具有同样的一般结构，特别是无量纲速度参数或"雷诺数" $R=Ud/\nu$ 以相似的方式出现．

易于证明方程(42)具有精确解 $u(x,y,t)=y$[1]．考虑对这个解的形为 $f(y)\cos kx\exp(\sigma t)$ 的小扰动．证明(R, k)平面被划分为图 15.9 所示出的稳定区和失稳区．求 R_c 和 k_c．如果流速从小值缓慢增加，失稳将在波数为 k_c 的 $R=R_c$ 处建立．为什么？

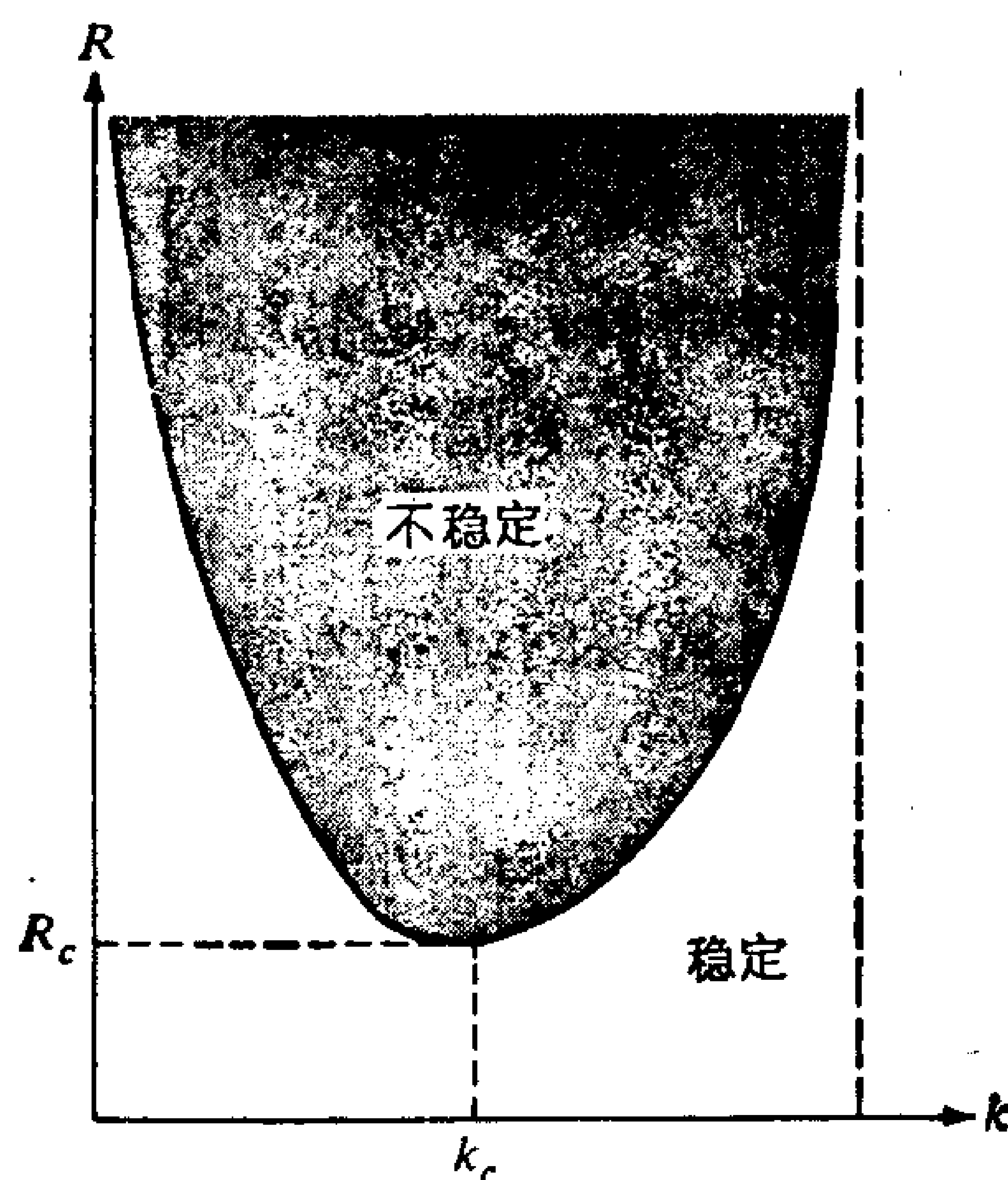


图 15.9 随遇平衡曲线把雷诺数 R 对波数 k 的平面划分为稳定区和失稳区.

---

1) 有量纲速度 u^* 和垂直座标 y^* 以 $u^*/U=u$ 和 $y^*/d=y$ 的形式与 u 和 y 相关．因此，解 $u=y$ 相应于 $u^*=Uy^*/d$，这个流动的速度从静止平板 $y^*=0$ 上为零线性地增加到运动平板 $y^*=d$ 上为 U.

解 如果 $u(x,y,t)=y+u'(x,y,t)$，则 u' 的线性化方程为

$$R^{-1}[u'_{xx}+u'_{yy}]-u'_{xxxx}+u'_t-u'_{xx}=0.$$

如果 $u'=f(y)\cos(kx)\exp(\sigma t)$，那末 f 满足

$$f''+\lambda f=0,\quad f(0)=f(1)=1,$$

式中 $\lambda=R\mu-R\sigma-R\mu^2-\mu.$

f 的这个本征值问题的仅有的一些非平庸解在 $\lambda=n^2\pi^2$ 时出现，$n=1,2,\cdots$. [这些解是 $\sin(n\pi z)$ 的常数倍数]因此

$$R\mu-R\sigma-R\mu^2-\mu=n^2\pi^2,$$

并且当且仅当

$$R<R(\mu,n),\quad 式中\quad R(\mu,n)=\frac{\mu+n^2\pi^2}{\mu-\mu^2}$$

时，$\sigma<0$（稳定）. 随着 R 的增加当上面的不等式反向时，失稳才在 R_c 的最小值 $R(\mu,n)$ 处开始. 通过观察可知，当 $n=1$ 时 R_c 出现最小值. 相对于 μ 取极小值便给出

$$R_c=\frac{\mu_c+\pi^2}{\mu_c-\pi^2},$$

$$式中\quad \mu_c=k_c^2=-\pi^2+\pi\sqrt{\pi^2+1}.$$

对于 $R<R_c$，不论扰动的波数为多少，$\sigma<0$. 当 R 刚好仅比 R_c 大一点，扰动就增长，这就是说，这些扰动的波数是在 k_c 或 k_c 附近.

练　　习

1. (a) 方程(21)下面的课文对波数 **k** 的几何意义作了注释，试证明这些注释.

(b) 当 $\beta<0$ 时，用物理语言讨论(37)式给出的振动频率的变化.

2. 本问题要求对图 15.7 的定性流线图作出校核. 不失一般性，y 轴可以取在沿扰动倾覆的轴上，因此 $v'=0$，$k_2'=0$. 为了简单起见，把你的考虑限止在小 β 的情况. 实际上只要确定流体

沿垂直和水平方向流动的直线 x = 常数和 y = 常数就足够了.

3. 根据(11)式推论,如果区域 D(例如一个矩形或六边形)中的流动具有周期重复的流形,那末,

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_D \frac{1}{2} R(\mathbf{v}'\cdot\mathbf{v}')d\tau = -\iiint_D w'\rho' d\tau$$

$$[\mathbf{v}' \equiv (u', v', w')].$$

(按照线性近似,上面这个方程的左端是扰动动能的改变速率,右端是浮力作功.)

4. 代替假设(14)并且不必去取最终结果的实部的一种方法是假设

$$u' = [\hat{u}_1\cos(k_1x + k_2y) + \hat{u}_2\sin(k_1x + k_2y)]e^{\sigma t},$$

并对其他应变量作类似的假设. 尝试着进行所需的计算,从而使你自己信服这是一种不合算的替代方法. (如果你完成了这一计算,你应该得到与使用复数符号时相同的结果.)

†5. 在生物学中,时间 t 时一个给定群的个体数目 p,常常近似地遵循方程 $dp/dt = kp$,其中 $k = k(t)$ 是繁殖速率. 考虑可能性

$$k = \alpha - \beta p\ (\alpha, \beta \text{ 为正常数}),\ \text{因此}\ \frac{dp}{dt} = \alpha p - \beta p^2.$$

(k 中的 βp 项代表由于分布过密及与此相伴随的食物供应的减少、毒素质含量的增加等而引起的群增长速率的下降.) 显然,控制方程有两个精确的定常解:

$$p = p_0,\quad \text{这里}\ p_0 = 0\ \text{或者}\quad p_0 = \frac{\alpha}{\beta}.$$

试研究这些解对小扰动的稳定性.

6. 本问题与两块无限大的刚性平板 $y = 0$ 和 $y = 1$ 之间的密度为 1 的无粘性流体有关. 忽略重力,只考虑二维运动$\left(w = \frac{\partial}{\partial z} = 0\right)$. 控制方程和边界条件

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla \mathbf{p},\quad \nabla\cdot\mathbf{v} = 0;\quad \text{在}\quad y = 0, 1\ \text{上}\ \mathbf{v} = 0$$

具有解

$$u = U(y), \quad v = 0, \quad p = p_0,$$

式中 U 是一个任意的可微函数，p_0 是常数.

(a) 确定遵循上述方程的小扰动所满足的一组线性偏微分方程.

(b) 假定解正比于 $\exp[i\alpha(x-ct)]$，其中 α 是实数，特别是，取 $v = V(y)\exp[i\alpha(x-ct)]$. 消去压力和水平速度. 从而证明问题可简化为

$$\begin{aligned}&(U-c)(V''-\alpha^2 V)-U''V=0;\\&V(0)=V(1)=0.\end{aligned} \tag{43}$$

为什么方程(43)具有非平庸解意味着 c 和 α^2 之间存在着函数关系？

(c) 令 $c = c_r + ic_i$，假定 $c_i \neq 0$. 用 $U-c$ 去除(43)，再乘 $\bar{V}$（这里 $\bar{V}$ 是 V 的复共轭.），在 0 和 1 之间积分. 进行分部积分. 取所得方程的虚部. 得到

$$c_i\int_0^1 U''|V|^2|U-c|^{-2}dy = 0.$$

推论，如果 $c_i \neq 0$，则 U 至少具有一个拐点，试解释这一结果的意义.

7. 作为流体运动的一个模型，J. M. Burgers 考虑 $u(t)$ 和 $U(t)$ 的下列方程组：

$$\frac{dU}{dt} = P - u^2 - \nu U, \quad \frac{du}{dt} = Uu - \nu u,$$

这里 P 和 ν 都是正常数.

(a) 试证明有一个解是 $U = P/\nu$，$u = 0$，当且仅 $P < \nu^2$ 时，流动是稳定的.

(b) 试证明当 $P > \nu^2$ 时，有另一对稳定解，U 和 u 是常数. [这使我们想起真实流体在驱动"压强梯度" P 取临界值 $P=\nu^2$ 时，比较简单的流动 $(u=0)$ 变成不稳定的，并出现一种新类型的流动，它是稳定的，但更加复杂.]

8. 在这个问题中，我们考虑密度均匀且为 R_1 的无粘不可压缩流体层的稳定性，这层流体以速度 U_1 在另一层密度均匀且为 R_2 以 U_2 运动的流体上运动. 重力垂直向下作用. 在这个问题中我们限于二维运动 $\left(v = \frac{\partial}{\partial y} = 0\right)$，可以合理地推测我们的结果将与风产生的水波有关.

(a) 试求出 $p_1(z)$ 和 $p_2(z)$，以使如果 U_1，U_2 和 R_1 和 R_2 是常数，那末下列各式给出了无粘不可压缩流动方程(1a—c)的一个解.

对于 $0 < z < \infty$: $u^* = U_1$, $w^* = 0$,

$\rho^* = R_1$, $p^* = p_1(z)$.

对于 $-\infty < z < 0$: $u^* = U_2$, $w^* = 0$,

$\rho^* = R_2$, $p^* = p_2(z)$.

也使两种互不相溶的流体之间的界面 $z = 0$ 上的压强保证连续[练习 14.4.8(b)，其中 $s_n = 0$，$\mathbf{t} = -p\mathbf{n}$].

必须考虑运动学边界条件在 $z = \zeta(x, t)$ 上 $w^* = \zeta_t + u\zeta_x$，这里 $z = \zeta(x, t)$ 是交界面方程.（这个条件在第 II 卷 7.1 节推导.）对于现在的简单解，$z = 0$ 是交界面方程，并且运动学边界条件显然满足.

(b) 在上面的层里，写出

$$u^* = U_1 + u_1', \quad w^* = w_1', \quad \rho^* = R_1 + \rho_1',$$
$$p^* = p_1(z) + p_1'. \tag{44}$$

推导扰动[(44)式中带撇的量]的线性偏微分方程组. 对下层的扰动作同一推导.（利用下标 2 表示扰动.）

写出

$$w_i'(x, y, z) = \hat{w}_i(z)\exp[i\alpha(x - ct)]$$
$$(\alpha \text{ 为实数}, \ c \text{ 为复数}),$$

以及 u_i', ρ_i', p_i' 的类似的表达式; $i = 1, 2$. 把(b)中的每一组偏微分方程简化为常微分方程，这两组方程中一组是对

$\hat{w}_1$ 的，另一组是对 $\hat{w}_2$ 的.

(d) 把两层间的扰动后的交界面写作

$$z=\zeta(x,t)=\hat{\zeta}\exp[i\alpha(x-ct)],\quad \hat{\zeta}\text{ 是一个常数}$$

根据运动学边界条件试推导

$$z=\hat{\zeta}\text{ 上},\quad \frac{\hat{w}_1}{U_1-c}=\frac{\hat{w}_2}{U_2-c}.$$

(e) 我们忽略了表面张力，因此压强（不是扰动压强）在 $z=\zeta$ 上必须连续. 推导在 $z=\zeta$ 上有

$$R_1\hat{w}(U_1-c)^{-1}+R_1(U_1-c)\frac{d\hat{w}_1}{dz}$$
$$=R_2\hat{w}_2(U_2-c)^{-1}+R_2(U_2-c)\frac{d\hat{w}_2}{dz}.$$

(f) 在 $z=0$ 处应用边界条件(d)和(e)是与我们的小扰动假设相符的. (为什么?) 考虑情况 $U_1=-U_2=V$ 就使代数方法简化一点. (为什么这确实不会真的丧失一般性?) 利用这两个解释求解 $\hat{w}_1$ 和 $\hat{w}_2$（当 $|z|\to\infty$ 时加上合理的条件），并推导

$$c=c_m+(c_d+c_v)^{1/2},$$

这里 c_m 是两层的加权平均速度:

$$c_m\equiv\frac{R_1U_1+R_2U_2}{R_1+R_2},$$

而 c_d 和 c_v 分别由密度和速度的间断得到:

$$c_d\equiv\frac{g}{\alpha}\frac{R_1-R_2}{R_1+R_2},\quad c_v\equiv\frac{R_1R_2(U_1-U_2)^2}{(R_1+R_2)^2}.$$

(g) 试证明，当重流体在轻流体上面时，总是失稳的（泰勒失稳）

(h) 试把 $V=0$ 的结果与课文中密度随高度按指数变化的结果作比较. 象这里所预示的那样，油水的交界面比空气和水的交界面振动得慢得多. 这个现象已为本杰明 · 富兰克林所注意（*Lamb*, 1932, 第 371 页).

(i) 说明当 $R_1 = R_2$ 时存在着失稳（开耳文-赫姆霍兹失稳）．试证明当 $R_1 < R_2$ 时，足够短的波长仍然是不稳定的．因此与经验相反，最小的微风也应该在水上引起短波的出现．[当把表面张力效应包括进来对这个练习的方法进行修正时，理论预计，在产生水波之前，要求风速远超过每小时 10 英里．这个速度比所观测到的值大得多，因此，必须寻求产生波的更加微妙的机理． 对这个问题已进行了许多研究．例如，参阅 A. Gupta，M. Landahl. 和 E. Mollo-Christensen, *J. Fluid Mech*. **33,** 673—91(1968).]

†**9** 在 $R=$ 常数的情况下，涉及增长速率 σ 的项从式(21)消失了．试重新考虑这种情况． 因为假定与时间有指数依赖关系导致了困难，代之(14)式请从假设

$$u' = \hat{u}(z, t)\exp[i(k_1x + k_2y)];\ 等等$$

开始．

(a) 对于某些函数 α，μ_0，v_0 和 w_0，试证明

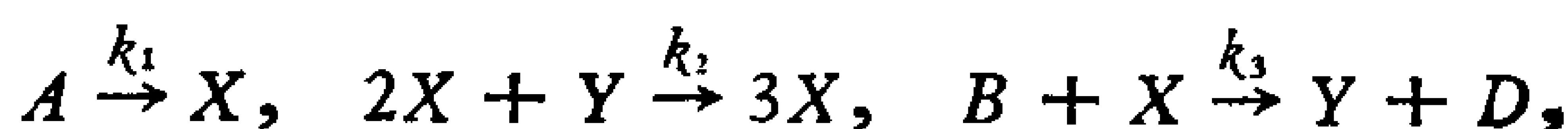
$$\hat{u} = k_1k^{-2}\alpha'(z)t + u_0(z),\quad \hat{v} = ik_2k^{-2}\alpha'(z)t + v_0(z),$$

$$\hat{w} = \alpha(z)t + w_0(z),\quad \hat{\rho} = R[k^{-2}\alpha''(z) - \alpha(z)],$$

$$\hat{p} = -Rk^{-2}\alpha'(z).$$

(b) 解释下列结果：(i) 当把问题看作为考察某均匀密度层（因而 $\hat{\rho}\equiv 0$）的搅拌时；(ii) 当把问题看作为考察初始密度几乎均匀的某层（因而 $\hat{\rho}$ 是 z 的某个给定函数）的最终结果时．

10. 数学家 A. Turing（因为在逻辑学方面的基本工作而著名）发表了一篇论文[1]激起了人们对化学失稳在生物学中起重要作用可能性的兴趣． 这方面的一个贡献是由 I. Prigogine 和 R. Lefever[2] 做出的，他们研究过（模拟）反应方案



$$A \xrightarrow{k_1} X,\quad 2X + Y \xrightarrow{k_2} 3X,\quad B + X \xrightarrow{k_3} Y + D,$$

1) *Proc. Roy. Soc (London)* B237, 37(1952).

2) *J. Chem. Phys.* 48, 1695(1968)



$$X \xrightarrow{k_4} E. \tag{45}$$

为了得到控制方程，他们把扩散项加到质量作用所需的项上去(10.1节). 为了简单起见，我们只考虑一个笛卡儿坐标 r. 读者可能希望验证我们可以得到 x 和 y 的下列方程

$$\frac{\partial X}{\partial t} = k_1 A + k_2 X^2 Y - k_3 BX - k_4 X + D_X \frac{\partial^2 X}{\partial r^2}, \tag{46}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = -k_2 X^2 Y + k_3 BX + D_Y \frac{\partial^2 Y}{\partial r^2}. \tag{47}$$

因为 X 和 Y 在表达式(45)的左端和右端代表相同的分子数，所以(45)式给出了总体的反应方案 $A + B \rightarrow E + D$. 我们将把初始组分看作本质上具有固定的均匀浓度 A 和 B，因此在以后 A 和 B 可取作常数. 本问题的目的是证明有一个浓度失稳开始的临界值.

(a) 为了使计算稍容易一些，我们将假设 D_X 和 D_Y 相等，并取 $D_X = D_Y = D$. 这个假设的物理意义是什么? 何时能指望它成立或接近成立?

(b) 试证明(46)和(47)式具有一个唯一的均匀解 $X = X_0$, $Y = Y_0$，这里 X_0 和 Y_0 为

$$X_0 = \frac{k_1}{k_4} A, \quad Y_0 = \frac{k_3 k_4}{k_1 k_2} \frac{B}{A}. \tag{48}$$

(c) 证明通过引进变量变换

$$x = \frac{X}{X_0}, \quad y = \frac{Y}{Y_0}, \quad \tau = k_1 t, \quad s = \frac{r}{\sqrt{D/k}}, \tag{49}$$

(46)和(47)式变为

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = \kappa + \beta x^2 y - \beta x - \kappa x + \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}, \tag{50}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = -\gamma x^2 y + \gamma x + \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}, \tag{51}$$

其中

$$\kappa=\frac{k_4}{k_1},\quad \beta=\frac{Bk_3}{k_1},\quad \gamma=\frac{k_1k_2A^2}{k_4^2}.$$

如果你已学过量纲分析和尺度化的材料，试全面叙述一下为什么这种变量变换是一个好的想法. 在这样做时，试指出不作进一步的工作，我们能从(50)和(51)式得出什么结论，再说说(如果必须)进一步研究这些问题，现在可用什么样的简化方法

(d) 写出 $x=1+\bar{x}$，$y=1+\bar{y}$，并进而假设

$$\bar{x}=\hat{x}\cos\mu s e^{\sigma\tau},\qquad \bar{y}=\hat{y}\cos\mu s e^{\sigma\tau},$$

试证明均匀解对小扰动的稳定性可从研究下列方程而确定出来:

$$o=\hat{x}(-\sigma-\tilde{A})+\beta\hat{y},\quad o=-\gamma\hat{x}-(\tilde{B}+\sigma)\hat{y},$$

式中

$$\tilde{A}=\kappa+\mu^2-\beta,\quad \tilde{B}=\gamma+\mu^2.$$

(e) 试证明 σ 必须满足形为 $\sigma^2+b\sigma+c=0$ 的方程. 说明当且仅当 $b>0$ 和 $c>0$ 时，扰动才消失. 在这一部分和下一部分，我们考虑由于 c 从正变为负的改变引起失稳的可能性. 在这些情况下，说明对于波数为 μ 的扰动，稳定的充分必要条件为 $\tilde{A}\tilde{B}+\beta\gamma>0$ 或者

$$\beta<\beta_c(m)\quad 这里\quad \beta_c(m)=(m+\kappa)(\gamma m^{-1}+1),$$

$$m\equiv\mu^2.$$

†(f) 继续部分(e)，求当 β 缓慢增加时失稳首先开始的 β 值，求出这种失稳所预期的波数.

†(g) 现在考虑 b 的符号的改变引起失稳的可能性. 求出 β 缓慢增加时这类失稳首先开始的 β 值. 证明这个值比(f)中相应的值小，从而推论出失稳实际上以这里和部分(g)中所描述的振荡方式开始. [如果把假设 D_X-D_Y 掷掉，那末就存在一些参数范围，其中失稳以部分(e)和(f)中描述的方式开始.]

15.3 气体中的压缩波

自然界里气体中充满着压缩波．每天的生活中，我们都要碰到人类通讯噪声和音乐所产生的声波．爆炸产生“激波”，激波是高强度的压缩波．在天体演化晚期的一些阶段中，恒星爆炸并发出激波，后者喷出去的质量很多．在太阳的大气中，人们相信声波是使太阳日冕区域温度保持在一百万度或两百万度的原因，而太阳的表面则处在约为 6000K 这种比较低的温度之下．

本节将简要地描述理想气体压缩波基本理论，我们的讨论将从基本方程及小振幅波理论开始．

对压缩波作一般的讨论，导致了“双曲”型偏微分方程理论的发展．这里我们根本不能深入研究普遍理论，但是我们将重述黎曼早期关于有限振幅一维压缩波的某些工作．因此它是我们在本卷中要稍加一提的几个非线性效应[1]中的一个． 在目前对非线性的比较充分的讨论属于高等课程．同时，关于非线性问题的新方法是当代研究的中心议题．比较老的书籍有时反复灌输这样的看法：非线性的出现是一个为人们视为似乎绝望的问题． 但是，我们却很想要给读者留下一个正确的印象．今天非线性问题给人们提出了要以热情来看待的挑战．也许现在的数值方法和分析方法(至少在经过某些修改以后)仍然有用；或者也许要发明一种新方法才能获得信誉．

完全气体的无粘等熵流动

我们将采用无粘流体力学的下列基本方程： 质量守恒方程(14.1.7)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i)=0; \tag{1}$$

没有体力时的欧拉动量平衡方程(1.10)，

1) 在某些非线性问题中用了第二部分的扰动方法，但在那里非线性并非起这样大的作用．

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}; \tag{2}$$

和热力学方程(14.4.14)

$$\theta\left(\frac{\partial s}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial s}{\partial x_j}\right)=0, \tag{3}$$

式中 ρ 是密度，v_i 是速度分量，p 是压力，θ 是温度，s 是单位质量的熵.

在(3)式中，我们忽略了项 Dh/Dt，这就是说我们假设，一团给定气体在经受显著形变的任何时间里，流进这团气体的热量是可以忽略的. 因此，变形过程可看作绝热的. 此外，我们忽略了机械能向热能的耗损，这是一个与忽略粘性相一致的假设.（试与第II卷练习 3.1.8 作比较)按照(3)式，流动是等熵的.

上述方程要与状态方程一起求解：根据14.4节或者根据以前关于基础热力学的知识，我们记得，我们可以使用下列两个方程中的任何一个：

$$p=R\rho\theta \text{ 或 } p=K_0 e^{s/C_V}\rho^{\gamma}, \quad K_0 \text{是一个常数.} \tag{4a,b}$$

因为如果把上述方程中的一个看作是已知的话（比热可看作常数)，另一个方程便可推导出来. 这里 C_V 是定容比热，满足

$$C_V=(\gamma-1)R, \tag{5}$$

式中 $\gamma=C_p/C_V$ 是比热比，对于给定气体，R是常数.

方程(3)表明，一个流体微团的熵为常数. 我只考虑整个流动中熵都均匀的情况（例如从静止开始运动的流动). 在 $s=$ 常数这些情况中，我们可把形为

$$p=K\rho^{\gamma}, \quad K\text{是一个常数} \tag{6}$$

的(4b)式取作状态方程. 这个方程往往称之为**多方状态方程**. 有时它被代之以更一般的**正压**关系式 $p=p(\rho)$，因为理论并没有因此而大为复杂化.

如果我们把压力看作是密度的已知函数，那末现象便遵循方程(1)和(2). 后者等价于三个速度分量和密度的数量方程. 密度

和速度的初始分布必须事先给定，在任何给定的固体边界上速度的法向分量必须为零．在运动的固体边界上，气体的法向速度必须与边界的法向速度相同．

小振幅波

我们希望考虑对均匀而静止的大气所作的小扰动．令未扰动的大气具有均匀密度 ρ_0．为了考虑小扰动，我们写出

$$\frac{\rho}{\rho_0}=1+\sigma. \tag{7}$$

量 σ 有时称为**压缩率**，它是无量纲密度比 ρ/ρ_0 偏离未扰动值 1 的量度．

我们来寻找一个解，其中压缩率比 1 小，速度分量的数值也很小．因此两个小因子的乘积可以忽略，于是我们的策略是要舍弃所有的非线性项．

把(7)式代入(1)式，我们得到

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma v_i)=0. \tag{8}$$

与第二项相比较，我们忽略第三项并得到线性方程

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=0. \tag{9}$$

如果与 1 相比不仅压缩率 σ，而且它的空间导数也都很小，那末这种线化便是正确的．如果我们也把(2)式加以线化，我们便得到[练习 1(a)]

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}=-c_0^2\frac{\partial\sigma}{\partial x_i}. \tag{10}$$

我们已写下

$$p(\rho)=p(\rho_0)+c_0^2(\rho-\rho_0)+\frac{p''(\rho_0)(\rho-\rho_0)^2}{2!}+\cdots, \tag{11}$$

式中

$$c_0^2 \equiv p'(\rho_0). \tag{12}$$

(10)式中所得到的线性化隐含着什么呢? 请看，若令 U 和 Σ 为速度分量和压缩率的典型值. 让空间导数乘以一个大小约为 L^{-1} 的一个量，并让时间导数乘以一个大小约为 τ^{-1} 的量，那末(9)和(10)式意味着

$$\sum \tau^{-1} \approx UL^{-1}, \qquad U\tau^{-1} \approx c_0^2 L^{-1} \sum. \tag{13}$$

上述方程中消去$\sum$得到

$$L\tau^{-1} \approx c_0. \tag{14}$$

(这是一个量纲上正确的结果，因为 c_0 确实具有速度的量纲.) 因此，如果

$$U^1 L^{-1} \ll U\tau^{-1}, \quad \text{即如果 } U \ll c_0,$$

那末如同所假设的那样，对流加速度 $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ 比局部加速度 $\partial \mathbf{v}/\partial t$ 小.

比值 U/c_0 称之为**马赫数**. 如果流体速度与声速之比值充分小，那末我们的线性化似乎便是正确的.

从(9)式和(10)式我们推出了压缩率 σ 的**波动方程**:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = c_0^2 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_i^2} \quad \text{或} \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = c_0^2 \nabla \sigma. \tag{15}$$

一般来说，速度分量 v_i 并不满足波动方程，但是 $\partial v_i/\partial t$ 和 $\sum_{k=1}^{3} \partial v_k/\partial x_k$ 却是满足的[练习 1(f)].

声速

如果$\sigma = \sigma(x_1, t)$，那末在给定时间，在 $x_1 =$ 常数的平面上密度为常数. 这样一种**平面波**遵循下述方程

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1^2}. \tag{16}$$

在无界空间中已在 12.2 节对这个一维波动方程的解中作过讨论. 在那里方程制约着弹性介质中的小位移. 解的形式上的性质当然是与它们的物理解释是无关的(并且 12.2 节中关于波动方程的讨

论也是与十二章的其余部分无关的.)

方程(16)的平面波解,以速度c_0按照不变的形状传播. 因此, c_0 是密度 ρ_0 时的**声速**. 这个速度在我们的分析中并没有明确地规定,因为(如同我们现在所讨论的那样)可以用不止一种方法去得到假定的正压关系式 $p=p(\rho)$.

在关于声波的研究中,牛顿作了看来似然的假设: 气体的温度在它膨胀和收缩时不变. 因此, 他把状态方程看作具有 $p=p(\rho,\theta)$, 并且 $\theta=$ 常数的形式. 对于理想气体, 这相当于利用 $\theta=$ 常数时的方程(4a),即 $p\rho^{-1}=$ 常数. 由此得到

$$c^2=\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\theta=\frac{p}{\rho}.$$

(实际上是欧拉利用波动方程推得了上面的结果,从而对牛顿的不太正式的论证作了改进.)

观察表明,牛顿-欧拉的等温声速是不正确的. 正是拉普拉斯指出了声波的膨胀和压缩应该看作是绝热过程,因此是等熵过程. [参阅(3)式的讨论.]因此,状态方程 $p=K\rho^\gamma$ 对完全气体是正确的,并且

$$c^2=\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s=\frac{\gamma p}{\rho}. \tag{17}$$

球面波

如果波动具有球对称性,那末,拉普拉斯算符变为

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+2r^{-1}\frac{\partial}{\partial r},$$

式中 $r=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2}$ 是点 (x_1,x_2,x_3) 离原点的距离. 波动方程取下列形式:

$$c_0^{-2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+2r^{-1}\frac{\partial s}{\partial r}. \tag{18}$$

为了求解这个方程,我们引进变量变换

$$\sigma = \frac{\beta}{r}. \tag{19}$$

那末 β 满足平面波方程

$$c_0^{-2}\frac{\partial^2\beta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\beta}{\partial r^2}. \tag{20}$$

我们已研究过上式的解．因此，球面波的通解具有如下的形式：

$$\sigma = r^{-1}f(r - ct) + r^{-1}g(r + ct), \tag{21}$$

这两项分别代表输出波和入射波．

球面波的振幅按照因子 $1/r$ 随距离而减小．用下面的考虑这一点已可加以预测（从而(19)式的变量变换也受到了启发．）波动中的能量正比于振幅的平方．我们的模型中并未包括能量耗散的机理，所以球壳上的能量将在面积以 r^2 增加的面上向外传播．能量守恒要求，能量正比于 r^2，从而扰动振幅本身必须正比于 r^{-1}．

一般，解(21)在 $r = 0$ 处具有一个奇点．然而，在一个物理问题的解中这个奇点并不出现．例如，如果我们考虑一个脉动着的球向外送出球面波，那末，我们便可把小 r 值排除掉．

取

$$f(r - ct) = \sin k(r - ct), \quad g(r + ct) = \sin k(r + ct), \tag{22}$$

便可得到一个具有特殊兴趣的形式为(21)的解，其中 k 是一个常数．由(22)式，(21)式变成

$$\sigma = 2r^{-1}\sin kr\cos ct \tag{23}$$

在整个无限空间中这个**驻波**解是有限的．若把这些球面驻波叠加起来就可得到其他许多有意义的解．

一维非线性波

在波动的线性理论中，波形是保持不变的．当采用完整的流体动力学非线性方程时（这在波动的振幅不再是小量时是合适的），我们并不指望传播的总的性质要加以改变．然而我们确实指望波的形状可能发生畸变．我们也指望向右和向左传播的波可能

会互相作用．为了说明这些效应，我们按照黎曼的方法来考虑非线性问题．

我们的研究首先从寻找仅在一个方面上传播的解开始．在线化的情况下，这种波是 x 和 t 的组合函数，既可以是 $x+ct$，也可以是 $x-ct$．让我们来看一下非线性情况下是否有依赖于某个这种组合的一些解，我们来寻找其中密度和速度是一个量 $\alpha(x,t)$ 的函数的简单波解．

对于只依赖于一个空间坐标并且具有速度 $u(x,t)$ 的流动，连续方程和动量方程(1)和(2)可写作

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0, \tag{24}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{c^2}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}=0, \tag{25}$$

式中 $c^2=dp/d\rho$，引进

$$u=u(\alpha),\quad \rho=\rho(\alpha), \tag{26}$$

我们得到

$$\rho'(\alpha)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}+u\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)+\rho u'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x}=0, \tag{27a}$$

$$u'(\alpha)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}+u\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)+\frac{c^2}{\rho}\rho'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x}=0. \tag{27b}$$

当且仅当

$$c^2\rho^{-2}\left(\frac{d\rho}{d\alpha}\right)^2=\left(\frac{du}{d\alpha}\right)^2 \tag{28}$$

或

$$u=\pm\int c(\rho)\rho^{-1}d\rho \tag{29}$$

时，上述这些方程便是相等的．α 的方程便变为

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}+(u\pm c)\frac{\partial\alpha}{\partial x}=0. \tag{30}$$

方程(30)是**拟线性**的，这就是说，就导数而言，它是线性的．(在一般意义上讲，它并不是线性的，因为“系数”依赖于应变量 u

和 c.)这样一种方程可以用"特征线法"加以处理，而后者我们将不再作详细的讨论. 相反我们将写出(30)式的解，并用直接代入法证明它是正确的.

我们断定，(30)式的通解为

$$\alpha = F(\mu), \quad \mu \equiv x - (u \pm c)t. \tag{31}$$

上式是把 $u \pm c$ 看作一个常数而从(30)式得到的. 为了证明(31)式确实是一个解，我们注意到

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = F'(\mu)\left[1 - t(u' \pm c')\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right],$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = F'(\mu)\left[-(u \pm c) - t(u' \pm c')\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right].$$

由此可知，$\partial\alpha/\partial x$ 和 $\partial\alpha/\partial t$ 的比例为 $-(u \pm c)$，因此(30)式便得到满足.

对(31)式的解释可以按照类似于线性波的方式来进行. 给定 α 值，因此也就给定了 u 和 c 值，以速度 $u \pm c$ 代入右端. 这就是说，相应于一个给定 α 的具体状态，一道简单波以 $u + c$ 的速度传播，而另一道简单波则以 $u - c$ 的速度传播. 换句话说，相对于运动着的流体元，波动的传播具有速度 $u \pm c$. 在这个范围内，所得的结果与线性理论相类似.

然而，与线性理论的结果相反，传播涉及到波形的畸变. 这是下述事实的结果：传播速度 $u \pm c$ 随 α 而变，因而也随物理量 u 和 c 而变，而 c 是与气体密度唯一有关的物理量.

在多方气体的情况下，可以得到一个比较清楚的畸变的图形. 易于把状态方程 $p = K\rho^\gamma$ 写成如下的形式:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma, \tag{32}$$

式中 p_0 和 ρ_0 是某种参考状态下的压力和密度值. 利用这个关系式，定义 $c^2 = dp/d\rho$ 和(29)式的更为明显的形式

$$u = \pm\int_{\rho_0}^{\rho} c(r) r^{-1} dr, \tag{33}$$

不难证明[练习1(e)]

$$u=\pm\frac{2}{\gamma-1}(c-c_0),$$

因而

$$c=\pm\frac{\gamma-1}{2}u+c_0. \tag{34a}$$

由此得到

$$u\pm c=\frac{1}{2}(\gamma+1)u\pm c_0. \tag{35}$$

因此，由(26)，(31)和(35)式，我们得到

$$u=F\left\{x-\left[\frac{1}{2}(\gamma+1)u\pm c_0\right]t\right\}, \tag{36}$$

式中正(负)号是对相对于运动介质向右(左)传播的扰动而取的.

如果(36)式中不存在正比于 $\frac{1}{2}(\gamma+1)$ 的项，那末 u 的图形既可以向左也可以向右以速度 c_0 传播. $\frac{1}{2}(\gamma+1)$ 的存在使传播速度由于加上一个正比于纵坐标的项而发生畸变. 图形的畸变恰好就象在速度随高度线性增加的流动中放置的染色质点所组成的畸变那样. 见图 15.10

可以证明，只要声速以某种方式随密度而增加，那末就象在多方过程中那样，同一定性的特性就成立.

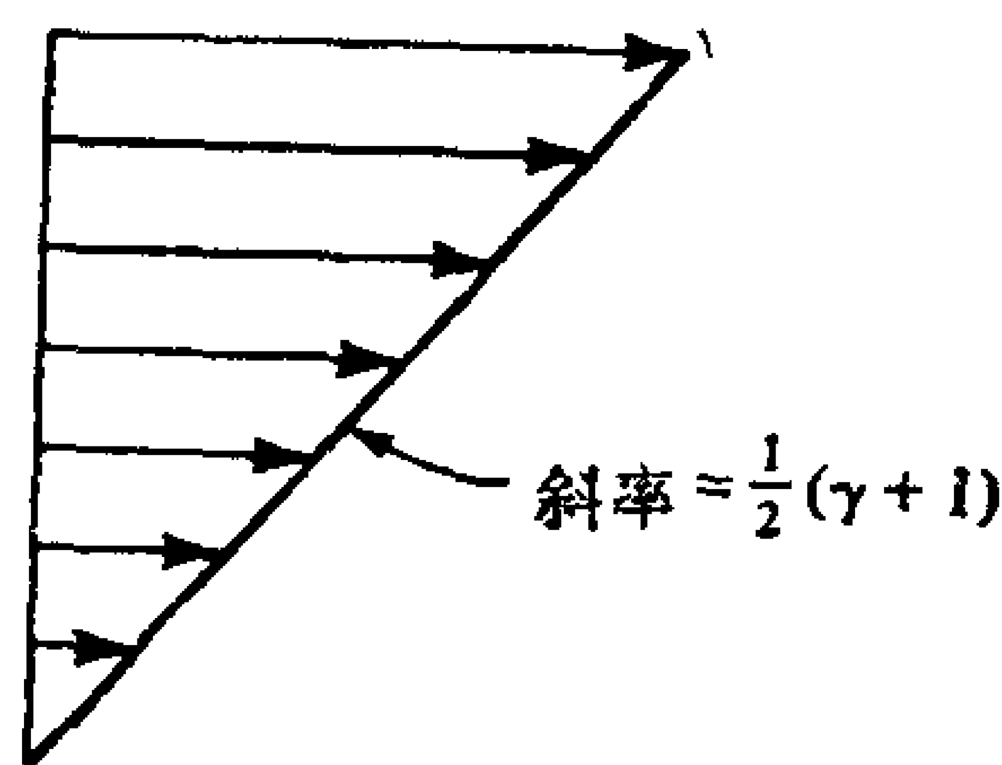


图 15.10 剪切流动的速度剖面. 箭头代表速度矢量；速度随高度而线性增加. (36) 式的图形就好象放在这种流动中的物质线那样改变.

虽然我们已发现了两种简单波，但是却不能把这两种波叠加起来去求解非线性初值问题. 关于这个问题，有一个发展得很好的理论，不过，我们将不再进一步去深究了.

例 (在练习4中我们要求读者给出这个问题的细节.) 考虑

一个活塞从静止逐渐起动并以远小于声速的速度在一根无穷长的管道中推进. 设管道中充满着密度为 ρ_0 的理想气体.

我们将考虑解的初始阶段,在这个阶段中,扰动的主要部分振幅应该非常小. 因此扰动的前缘应该以声速向前运动. 所以我们指望

$$\text{对于}\quad x \geqslant c_0 t,\quad \rho \equiv \rho_0,\quad u \equiv u_0.$$

时间为 τ 时,假定活塞的位置 ξ 为 $\xi = f(\tau)$, 那末, 可以证明,用参数法能够给出合适的简单波解为

$$u = f'(\tau),\ x - f(\tau) = (u + c)(t - \tau);\ f(\tau) \leqslant x \leqslant c_0 t, \tag{37}$$

这里 c 按照(34b)式与 u 相关,并取正号.

激波

当波形畸变着向前传播时, 将会到达一个解具有三个值的位置(图15.11). 在一点密度具有三个值是不符合实际的, 并且必然会出现理论不加修正便不再能描述的引人注目的现象. 事实上, 当形成了激波时,并用无粘理论对它进行描述时,便要求我们承认有间断解.

激波的形成涉及到某些至此仍然被忽略的物理过程, 这便是粘性和热传导的扩散过程. 在解发展出一个无穷大的梯度之前(图 15.11b),无论粘性和热传导系数怎样小,导数都是非常大的,以致扩散过程不能再加以忽略. 如果我们假定在这个扩散区域之外,畸变过程还在继续进行着,那末看来势必会趋向于形成一种间断;这就是激波.

我们可以用另一种方式来设想激波的形式. 考虑上面的例子中所提到的活塞问题. 扰动具有以速度 c_0 传播的波前. 由于受到压缩,波前后面的气体,其局部声速比较高. 因此, 后面的扰动趋向于赶上较前的扰动并产生比较强烈的压缩.

分析包括一般激波在内的压缩波的详细传播过程, 需要做数值计算. 但是, 我们将限于对间断条件的简单探讨.

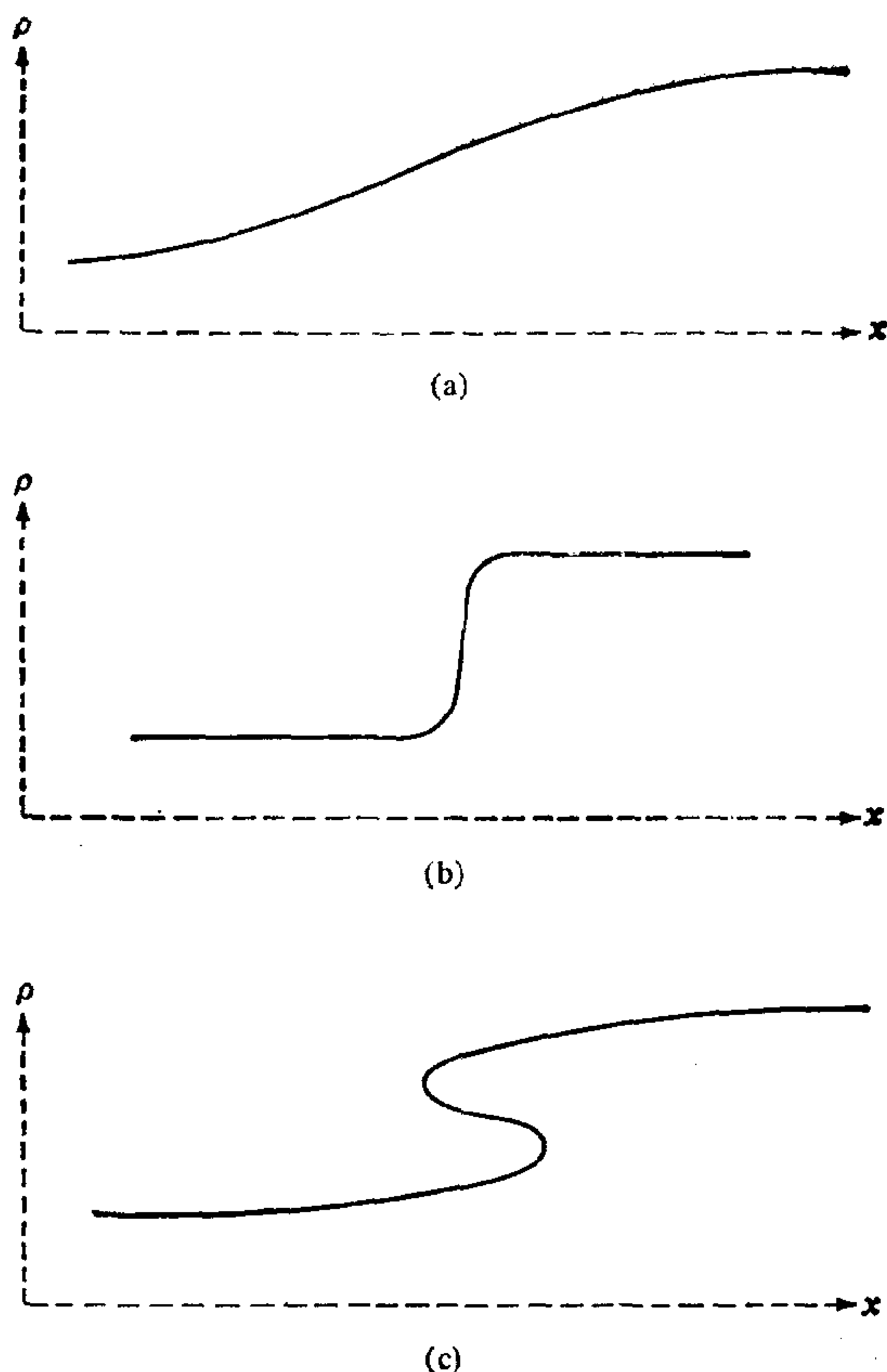


图 15.11　按照简单波理论，密度 ρ 空间变化的三个阶段.

为了弄明白变量是如何"跳跃"过激波间断的，我们考虑一个与激波一起运动的观察者．这个观察者在固定位置上观看激波．我们以下标 a 表示激波前的流动条件，而用下标 b 表示激波后的条件．因此，流到激波上来的流体具有速度 u_a，离开激波的流体具有速度 u_b．易于看到[练习 5(a)]，质量守恒要求

$$\rho_a u_a = \rho_b u_b \equiv m. \tag{38}$$

其他的练习证明，动量关系要求

$$p_a + \rho_a u_a^2 = p_b + \rho_b u_b^2, \tag{39}$$

而能量方程则要求

$$p_a u_a + m\left(\frac{1}{2}u_a^2 + e_a\right)$$
$$= p_b u_b + m\left(\frac{1}{2}u_b^2 + e_b\right), \tag{40}$$

式中 e 是单位质量的内能.

可以忽略薄激波区域内的详细情况，而把激波当作解中的一个间断面来处理，这样便可以很好地描述各种可压缩流动，这是一个值得注意的事实. 间断面两边的应变量的值，则可用象(38)、(39)和(40)式那样的"跳跃"条件把它们关联起来.

可压缩流动理论使用间断条件的成功，向人们强调了下列事实：理论家们总是讨论自然现象的模型. 人们甚至会同意这种说法："自然界实际上是连续改变的"，但是这并不排斥间断解的应用，因为在预测迅速改变的区域(象可压缩流动)时，这种解会为我们提供极好的模型.

在12.3节中我们已讨论了一维弹性力学中的间断解的应用. 14.4节则推导出了经过间断的一般跳跃条件. 练习8和9中要求把普遍结果对激波加以特殊化. 最重要的结果便是下面一点：当无粘性流体经过一道激波时，它的熵不能减少[1](练习9). 这是克劳修斯-Duhem积分不等式(14.4.29)的一个结果.

练　　习

1. 证明下列方程

(a) (10)式

(b) (20)式

(c) (27)式

(d) (28)、(29)和(30)式

---

1) 按照能量方程(3)，一个微团的熵保持常数. 不过，激波作为间断面处理的本质在于把全部耗散过程((3)式中被忽略)都看作是存在的，但只出现在狭窄的激波区域之中，而方程(3)是不能用来确定经过激波的跳跃的.

(e) (34)和(35)式

(f) 证明(15)式后的论点.

2. 表述并求解与从脉动着的球处发出的声波有关的问题.

3. 如果你已学过无量纲化和尺度化的材料. 试把这些概念用于压缩率波动方程的推导. 你的答案应该取简易的形式.

4. (a) 推导(37)式.

(b) 讨论(37)式在特殊情况 $f(z) = a\tau^2$ 下给出的解,其中 a 为常数.

†(c) 对下述陈述发表评论:"因为没有无限长管道这种东西,所以这个问题没有物理意义".

5. (a) 让流入和流出单位激波面的质量流相等,由此推导(38)式.

(b) 由力等于动量的增加率推导(39)式.

(c) 由压力作功率等于能量改变率推导(40)式.

6. 假定无界介质中的气体最初处于静止状态, 但具有非均匀分布 $s = F(x)$ 给出的压缩率扰动. 证明解为

$$s = \frac{1}{2}[F(x - ct) + F(x + ct)].$$

画出在原点处由三角形"鼓包"给出的 $F(x)$.

7. 考虑一端封闭的无穷长管子中的气体. 如果封闭端的边界按照规律 $\xi = G(t)$ 来回运动, 按照线化理论试证明在气体中诱导的运动为

$$u_1 = G'\left(t - \frac{x}{c_0}\right),$$

求相应的密度分布.

8. 考虑没有热流 ($h = r = 0$) 的无粘性流体. 本练习和下面的一个练习把练习 14.4.8 应用于激波, 从而得到有关各量跳跃的一些结果.

按照练习 14.4.7 的符号,因为流体经过激波,便有 $s_n^+ \neq 0$, $s_n^- \neq 0$. 令 $\mathbf{v}_t$ 表示速度 $\mathbf{v}$ 在激波表面投影得到的矢量. 用练习 14.4.8(b) 的公式作计算得到

$$[\![\rho s_n]\!]=0,\quad [\![\rho s_n^2+p]\!]=0,\quad [\![\mathbf{v}_t]\!]=0,$$
$$\left[\!\!\left[\frac{1}{2}s_n^2+I\right]\!\!\right]=0, \tag{41a,b,c,d}$$

式中 $I\equiv e+p\tau$ 称为比焓，$\tau\equiv\rho^{-1}$ 是比容.（符号 v 通常用来表示体积，已经用它表示速度了.）同样，

$$\frac{p^+-p^-}{\rho^+-\rho^-}=s_n^+s_n^-. \tag{42}$$

为了作这些计算，写出 $\mathbf{v}\equiv v_n\mathbf{n}+v_t\mathbf{T}$，其中 $\mathbf{T}$ 是激波表面的切平面. 取动量跳跃条件的 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{n}$ 分量，记住利用无粘流体的本构方程. 利用质量跳跃条件证明 $\mathbf{v}_t$ 必须连续等等.

9. †(a) 试证明对于任何激波，s_n^+ 和 s_n^- 必须同号.

(b) 试证明如果流体流从一到十地经过激波，那末 s_n^+ 和 s_n^- 的共同符号为负. （参阅练习 14.4.7 的定义和附图.）于是区域 R-称为激波的**波阵面**.

(c) 把练习 14.48 加以推广，证明不存在热流的无粘流体中 $[\![\rho s_n s]\!]\geq 0$，其中 s 是比熵.

(d) 推导 $[\![s]\!]\geq 0$.

†(e) 量 $(\tau^- - \tau^+)$ 称为**激波强度**. 可以证明这个量是正的，并且

$$s^+-s^-=K(\tau^- -\tau^+)^3+\cdots.$$

式中 K 是常数，… 表示略去了高阶项. 证明无穷弱的激波相对于流体的运动速度为声速 $(\partial p/\partial\rho)^{1/2}$，从状态方程出发，利用式(42).

10. 利用拉格朗日特征线方法(见 1.2 节)推导(31)式.

15.4 绕圆柱的均匀流动

确定作用在运动流体中的物体上的力，这是几个世纪以来研究流体运动的主要问题. 虽然已取得了很大的进展，但问题的主要方面仍然没有得到解释. 在本节中，我们通过考察二维无粘流体绕一根无穷长圆柱的流动来开始对物体绕流问题的讨论.

表述

我们试图从一个与所研究的一般现象有关的最简单的特殊问题开始讨论．我们考虑浸没在密度均匀的流体中作二维定常流动的一个圆柱

$$x^2+y^2=a^2,\qquad -\infty<z<\infty.$$

假定在远离圆柱的地方流体以匀速 $U\mathbf{i}$ 运动，因此速度矢量 $\mathbf{v}$ 满足

$$\text{当 } x^2+y^2\to\infty \text{ 时，}\quad \mathbf{v}(x,y)\to U\mathbf{i} \tag{1}$$

作一个到本节末才能证明合理的假设，我们便可把速度写作位势函数 ϕ 的梯度．均匀密度的假设要求，如果质量守恒，ϕ 是调和函数．因为 $\rho=$常数，所以 $D\rho/Dt+\rho\nabla\cdot\mathbf{v}=0$ 意味着 $\nabla\cdot\mathbf{v}=\nabla^2\phi=0$.

我们将利用分离变量法去确定一个满足适当边界条件的调和函数 ϕ．一旦确定了这个速度势 ϕ，我们就可得到压力 p，这是因为无粘形式的动量方程把速度和压力联系在一起．压力的积分效应给出了作用在物体上的合力．

因为我们是在考虑一个圆柱体，所以我们应该用依赖于极坐标 r 和 θ 的速度势 Φ：

$$\begin{gathered} r=(x^2+y^2)^{1/2},\quad \theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right),\\ \phi(r\cos\theta,\ r\sin\theta)=\Phi(r,\theta). \end{gathered} \tag{2}$$

我们将需要极坐标中梯度的表达式．根据附录 15.2 的方程(3)或练习 5，这个式子为

$$\nabla\Phi(r,\theta)=\Phi_{,r}\mathbf{e}^{(r)}+r^{-1}\Phi_{\theta}\mathbf{e}^{(\theta)}, \tag{3}$$

式中 Φ 的下标表示偏导数．$\mathbf{e}^{(r)}=\mathbf{e}^{(r)}(r,\theta)[\mathbf{e}^{(\theta)}=\mathbf{e}^{(\theta)}(r,\theta)]$ 也是 (r,θ) 处指向 r 增加（θ 增加）方向的一个单位矢量（见图 15.12）.

我们已为问题的最终表述作好了准备．根据附录 13.1 练习 2 或其他地方我们知道，极坐标下的拉普拉斯方程 $\nabla^2\phi=0$ 为

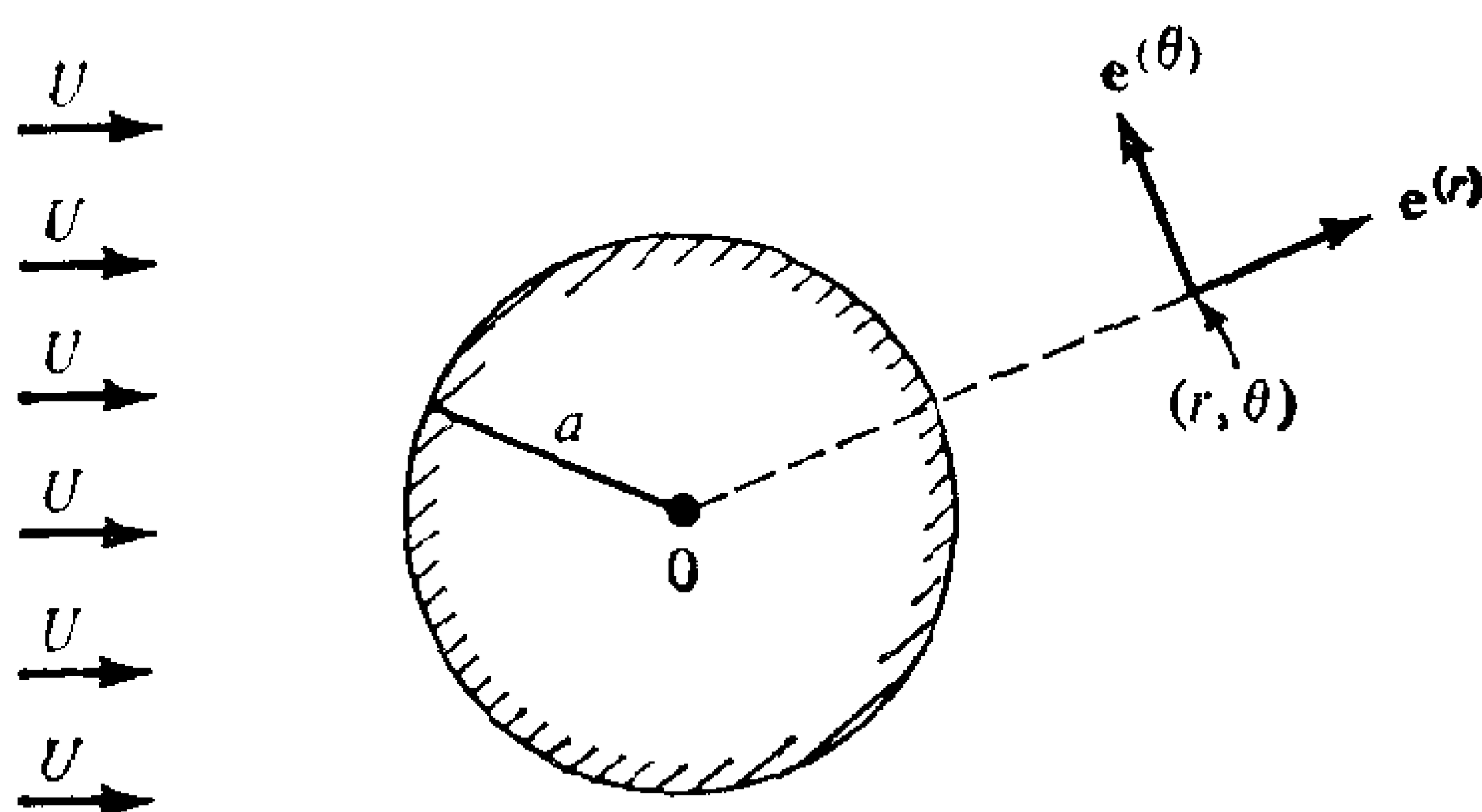


图 15.12 以速度为 U 的均匀流绕一根半径为 a 的直圆柱的流动. 图中示出了构成极坐标基的一对典型的单位矢量 $\mathbf{e}^{(r)}(r, \theta)$ 和 $\mathbf{e}^{(\theta)}(r, \theta)$

$$\boxed{\Phi_{rr} + r^{-1}\Phi_r + r^{-2}\Phi_{\theta\theta} = 0, \qquad r > a.} \tag{4}$$

由(3)和(1)式,我们得到无穷远处均匀流动的条件为

$$\boxed{\text{当 } r \to \infty, \quad \Phi_r \to U\cos\theta, \quad r^{-1}\Phi_\theta \to -U\sin\theta.} \tag{5a,b}$$

因为流体不能穿透圆柱,$\nabla\Phi$ 的径向分量在 $r = a$ 处必须为零,因而

$$\boxed{\Phi_r(a, \theta) = 0.} \tag{6}$$

还必须加上一个条件,因为极坐标为 (r_0, θ_0)的点也具有坐标$(r_0, \theta_0 + 2n\pi)$, $n = \pm 1, \pm 2, \cdots$. 我们要求,无论我们是在 (r, θ) 处还是 $(r, \theta + 2\pi)$ 处来考虑流场时,这个点的速度都必须相同. 因此对 θ 来说,$\nabla\Phi$ 必须具有周期 2π,即

$$\boxed{\Phi_r(r, \theta + 2\pi) = \Phi_r(r, \theta), \ \Phi_\theta(r, \theta + 2\pi) = \Phi_\theta(r, \theta).} \tag{7a,b}$$

周围打上方框的这些方程给出了一个确定的数学问题. 在求解这组方程时,我们看到,如果希望要有一个唯一的解,则还必须给出另一个条件.

用变量分离法求解

虽然几乎可以猜出方程 (4)—(7) 的解,但我们仍将利用分离

变量法求解这些方程．对这个方法以前还没有经验的那些人应该注意，对于任何这类问题，我们应用于这个特殊的分离变量问题的六个步骤(一)—(六)，只要稍作修正或者不作修正便可应用．（试与 4.1 节作比较；也可见练习 7.）

第一步．假定一个乘积解：

$$\Phi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta).$$

第二步．代入基本微分方程：由(4)式

$$R''\Theta + r^{-1}R'\Theta + r^{-2}\Theta'' = 0$$

$$\left(R' \equiv \frac{dR}{dr}, \quad \Theta' \equiv \frac{d\Theta}{d\theta}\right). \tag{8}$$

第三步．分离变量．我们把(8)式写成如下形式

$$\frac{R'' + r^{-1}R'}{r^{-2}R} = -\frac{\Theta''}{\Theta}. \tag{9}$$

现在变量已经分离，上式左边仅是自变量 r 的函数，右边仅是自变量 θ 的函数．作如 (2.4) 式下面的那种推理，我们推断出(9)式的两边必须等于一个**分离常数** k，因此我们得到**分离方程**

$$R'' + r^{-1}R' = kr^{-2}R, \quad \Theta'' = -k\Theta. \tag{10a,b}$$

第四步．从分离方程和适当的齐次边界条件所组成的一个本征值问题确定分离常数的许可值． (10) 式的两个方程都是二阶的，因此，我们寻找一对齐次边界条件．试凑法表明，在各种可能性中，只有从式(7)得到的条件才是恰当的．由(7a)式得到

$$R'(r)\Theta(\theta + 2\pi) = R'(r)\Theta(\theta)$$

因而，不是

$$R' \equiv 0, \tag{11}$$

便是

$$\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta). \tag{12}$$

由(7b)式得到

$$\Theta'(\theta + 2\pi) = \Theta'(\theta). \tag{13}$$

因为 $R=0$ 给出平庸解，除(13)式就没有另外可供选择的解．作为一个决定 k 的本征值问题，我们因此而取(10b)、(12)和(13)式．

(我们将分开考虑(11)式的可能性.)

如果 $k>0$,我们就写作 $k=\mu^2$, $\mu\neq 0$. 于是(10b)式的通解可写作

$$\Theta=c_1\cos\mu\theta+c_2\sin\mu\theta. \tag{14}$$

根据(12)和(13)式

$$\begin{aligned} &C_1[\cos\mu(\theta+2\pi)-\cos\mu\theta]\\ &+C_2[\sin\mu(\theta+2\pi)-\sin\mu\theta]=0, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} &C_1[-\mu\sin\mu(\theta+2\pi)+\mu\sin\mu\theta]\\ &+C_2[\mu\cos\mu(\theta+2\pi)-\mu\cos\mu\theta]=0. \end{aligned} \tag{16}$$

除非我们要求系数行列式等于零,方程(15)和(16)只具有平庸解. 利用简单的三角恒等式,这个要求便是

$$\begin{aligned} &\mu[\cos\mu(\theta+2\pi)-\cos\mu\theta]^2\\ &+\mu[\sin\mu(\theta+2\pi)-\sin\mu\theta]^2=0, \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} &2-2[\cos\mu(\theta+2\pi)\cos\mu\theta\\ &+\sin\mu(\theta+2\pi)\sin\mu\theta]=0, \end{aligned}$$

或

$$\cos 2\pi\mu=1 \quad 因而 \quad \mu=\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\cdots. \tag{17}$$

当 μ 为整数时,对任何常数 C_1 和 C_2, (15) 和 (16) 式确实得到满足.

如果 $k=0$,(10b)、(12)和(13)式仅有的非平庸解为 $\Theta=\theta_0$,此处 θ_0 是一个非零的常数. 如果 $k<0$,(10b)、(12)和(13)式便没有非平庸解[练习 1(a)].

第五步. 当分离常数取第四步所确定的值时,求解剩下的分离方程. 当 $k=n^2$ 时,等尺寸方程或欧拉方程(10a)具有一个 r^n 和 r^{-n} 的线性组合作为通解. 当 $k=0$ 时,通解便是 1 和 $\ln r$ 的线性组合 (Boyce 和 DiPrima, 1963, 第 4.4 节).

第六步. 把所有可能的乘积解叠加起来以满足其余的边界条件. 所谓"叠加",我们指的是"形成一个线性组合". 为了把所有可能的乘积解包括在这个组合中,我们必须考虑(11)式的可能性.

方程(11)和(8)意味着 $\Theta''=0$，并得到如下的结论：θ 的任何倍数都是(8)式和(7)式的乘积解. 从这个结论以及第四步和第五步的结果，导致我们假定 Φ 是无穷级数.

$$\Phi(r,\theta)=A\theta+B_0+B_1\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}[(C_n r^n+c_n r^{-n})\cos(n\theta)+(D_n r^n+d_n r^{-n})\sin(n\theta)]. \qquad (18)$$

如果

$$C_1=U;\quad D_1=0;\quad C_n=D_n=0;\quad n=2,3,4,\cdots.$$

那末在无穷远处的条件(5)便满足. 于是，边界条件(6)式便要求

$$B_1=0;\quad c_1=Ua^2;\quad d_1=0;\quad C_n=d_n=0;\quad n=2,3,4,\cdots.$$

因此，在所有的方程和边界条件下，有解

$$\Phi=A\theta+U(r+a^2r^{-1})\cos\theta, \qquad (19)$$

这很容易用直接代入加以验算.

解的解释

(19)式中存在项 $A\theta$ 是值得注意的. 这一项与 U 无关，但却依赖任意常数 A，因而有无数个绕圆柱的均匀流动. 利用极坐标梯度公式(3)，相应于 $A\theta$ 的速度矢量为

$$\nabla(A\theta)=Ar^{-1}\mathbf{e}^{(\theta)}, \qquad (20)$$

相应的流动完全是圆环形的. 当 $r\to\infty$ 时速度趋向零，因此，无穷远处的均匀流动不受这种环形流动的影响.

作为一个流动中总体旋转的量度，1869 年开尔文引进了**环绕一条单圆封闭曲线 C 的环量 K(C)** 的概念，他用下列线积分来定义这个量:

$$K(C)=\oint\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}. \qquad (21)$$

当 $\mathbf{v}=\nabla\phi$ 时，我们可以[象在练习 1(c)中那样]毫无困难地证明，

$$\text{在给定方向上绕}C\text{的环量} = \text{在给定方向上绕}C\text{一周}\phi\text{的改变量}$$

当ϕ由（19）式给定，曲线C沿反时针方向绕圆柱体一周的$K(C)=2\pi A$［而对于并不包围圆柱体的任何曲线 C，$K(C)=0$］.

因此如果我们要求，当 $r\to\infty$ 时，不仅速度趋向一个常数U,而且环量趋向于常数$2\pi A$，那末我们的分离变量法便给出了唯一的解答.

让我们回到启发我们作这个研究的问题：作用在圆柱上的力是什么？为了得到这个力我们必须从定常运动的动量方程计算压力．由(1.10)式以及 $\mathbf{f}=0$[1)],我们得到

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}=-\rho^{-1}\nabla p$$

或

$$(\nabla\phi\cdot\nabla)\nabla\phi=-\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right). \qquad (22a,b)$$

(22)式左端已知,所以 p 可以从直接计算得到．然而,即使利用极坐标,这多少也有点使人讨厌．不过,(22)式可写作

$$\nabla\left(\frac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi+\frac{p}{\rho}\right)=0,$$

因而

$$\frac{1}{2}|\nabla\phi|^2+\frac{p}{\rho}=\text{常数}. \qquad (23)$$

看出这一点就能使我们得到一个较简单的方法．考虑 $r\to\infty$ 极限下的(23)式,我们就可确定其中的常数．最终结果为

$$\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2+\frac{p}{\rho}=\frac{1}{2}U^2+\frac{p_\infty}{\rho}\quad\left(p_\infty\equiv\lim_{r\to\infty}p\right) \qquad (24)$$

(这是练习 1.7 中所证明的伯努利方程的一种特殊情况.）作用在半径为a的圆柱上的力$\mathbf{F}$是由外法线$\mathbf{n}$和弧长s以下式给出的

$$\mathbf{F}=\int\mathbf{t}ds=-\int p\mathbf{n}ds$$

1）如果要考虑重力的影响,就仅仅多一个由浮力引起的升力(练习 9).

$$= -\int_0^{2\pi}(\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j})pad\theta. \tag{25}$$

利用(24)和(19)式，稍作计算便可证明[练习 1(c)]

$$\mathbf{F} = -\rho UK\mathbf{j} \quad (K = 2\pi A = \text{逆时针方向的环量}). \tag{26}$$

如果无穷远处流动沿 X 增加的方向，**升力**和**阻力**便定义为 $\mathbf{j}$ 和 $-\mathbf{i}$ 方向的分力. 我们发现，升力正比于环量，并且没有阻力. 为了把没有阻力这一点说得更富于戏剧性，我们可以由此作如下的预测：如果你把手臂放在尼亚加拉瀑布里面，那末便没有向下方面的力作用在手臂上. 显然，什么地方有东西错了.

嫌疑首先落在假设 $\mathbf{v} = \nabla\phi$ 上. 但是这是无粘流理论一个主要结果，该理论指出，即使引进了重力，并且即使也考虑了密度的变化，只要状态方程具有 $p = p(\rho)$ 的形式，那末对于从静止开始的流动便有 $\nabla\wedge\mathbf{v} = 0$，因此 $\mathbf{v} = \nabla\phi$ 这个假设是不可避免的(练习 1.6).

也许，还有另一种并未为分离变量法所揭示的绕圆柱形物的流动. 也许无阻力的佯谬只适用于完全对称的圆柱形物体，对于一般形状的物体，会出现更合理的结果. 但是，可以证明，对于绕任何刚性封闭物体的均匀无粘不可压缩流动，

当 $r \to \infty$ 时，
$$\mathbf{v} = U\mathbf{i} + Ar^{-1}\mathbf{e}^{(\theta)} + O(r^{-2}), \tag{27}$$

而且(26)式继续给出了作用在物体上的力(库塔-儒可夫斯基定理).

(27)式在三维情况下变为

$$\mathbf{v} = U\mathbf{i} + O(r^{-3}).$$

并且 $F = 0$，这甚至是一个多少更令人感到惊异的结果.

在 15.1 节中，我们说过，似乎可以合理地假设在水和空气中剪应力总是等于零的. 当使用无粘流体的假设来讨论分层不可压缩流体稳定性和气体中的可压缩波时，得到了很好的结果. 但是我们却不能接受这个理论给出的绕二维和三维物体的流动中没有阻力的结果. 这里有两条有价值的教训. (i)一个"合理的"假设可能是一个好的假设，也可能不是一个好的假设；(ii)一个给定的

数学模型在某些情况下可能完全满足要求，而在另一些情况下则不满足要求.

不存在阻力的预测称之为**达朗伯佯谬**[1]. 人们听到这样一种违反直观的结果后，第一个反应是它是作为推理中的一种错误而得出来的. 只有数学证明才能使人完全信服恰恰是基本假设本身是有毛病的. 附录 15.1 概述了三维情况下的证明.

解决达朗伯佯谬要求对粘性流体作研究，这时，考虑了剪切应力的可能性. 第 II 卷第三章中做到了这一点. 人们发现，无论粘性系数多么小，在邻近固体边界的薄层中，也许还有其他地方，剪切应力总是重要的. 当粘性系数趋向于零时，这些层的厚度也趋向于零；但对于"钝体"来说，粘性对阻力却有一种并不趋向于零的效应. 另一方面，对于诸如机翅那样的流线型物体，薄层对流动只有很小的作用；当粘性变为零时，阻力趋向于零. 这样，对于流线形物体，达朗伯佯谬实际上是一种正确的结果，这是因为作用在物体上的阻力很小. 此外，二维力公式 (26) 也是解释机翼升力的基础.

总之，无粘性模型为我们提供了研究绕流线型物体流动的一个很好的一级近似，但是，绕钝体的流动与经典的无粘流动理论的简单预测是非常不同的. 绕流线型物体流动理论的最重要的原理在第 II 卷第三章加以讨论. 然而，读者将找不到绕钝体流动的明确的处理方法；这里的主要问题仍然没有解决.

练　　习

1. (a) 如果 k 是负的，那末(10b)、(12)和(13)式没有非平庸解.

(b) 试用直接代入法证明，(19) 式满足所有需要的方程和边界条件.

(c) 试证明(26)式.

---

1) 1745 年欧拉给出了二维情况下的证明. 1752 年达朗伯"再次发现或正确地估价了"这个佯谬. 后来(1768 年)"他以耸人听闻的措词再次断言了这一现象". (Truesdell 和 Toupin, 1960, 第 541 页.)

(d) 利用伯努利方程（24）给出的压力和速度之间的关系证明(26)式是似然的.

(e) 试证明式(21)下面叙述的环量和 ϕ 的改变之间的关系.

2. (a) 我们已证明,描述均匀流绕圆柱体的速度势由(19)式给出.确定相应的**驻点**,即 $\mathbf{v}=0$ 的点. 务必把下列几种情况区分开来: $2aU>A$, $2aU=A$, $2aU<a$. 指出在这几种情况下相应于圆柱的驻点位置.

(b) 假定 $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ 是可微的,并证明除了驻点外,流线具有意义明确的正切.再得出结论: 流线只能在这些(驻)点上相交.

3. 注意到无穷远处的流动是均匀的,圆必是流线的一部分,在驻点处流线可以分支，那末我们就可以对上面的问题画出惊人精确的流线图. 请按照这种方法去做.

4. 假定存在速度势 ϕ, 试证明 $\phi(p_1)-\phi(p_2)$ 等于速度沿连接 p_0 和 p_1 点的曲线的线积分. 从而给出了势函数的一种意义.

5. (a) 假定速度场 $\mathbf{v}(x,y)$ 存在着一个速度势 $\phi(x,y)$. 考虑到极坐标的变换. 试证明径向速度分量 $V_r(r,\theta)$ 与极坐标下的速度势 $\Phi(r,\theta)$ 之间的关系是 $V_r=\partial\Phi/\partial r$. 以如下的方法用直接计算来做. 因为 $\mathbf{e}^{(r)}=\cos\theta\mathbf{i}+\sin\theta\mathbf{j}$ 是与正 x 轴成 θ 角的单位矢量,并且 $V_r=\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}^{(r)}$,于是

$$V r=\frac{\partial\phi}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial\phi}{\partial y}\sin\theta.$$

利用连锁法则把 $\partial\phi/\partial x$ 和 $\partial\phi/\partial y$ 改变成对极坐标的微分.

(b) 通过证明并完成下列步骤证明方位角速度分量 V_θ 可以表示为 $V_\theta=r^{-1}(\partial\Phi/\partial\theta)$:

$$V_\theta=\nabla\phi\cdot\mathbf{e}^{(\theta)}=\frac{d\phi}{dS}=\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dS}=\cdots,$$

这里 $d\phi/ds$ 是 θ 增加方向的方向导数.

†6. 利用动量交换方程推导(26)式. (参阅练习 14.2.5)

†7. 考虑均匀密度的无粘流体绕半径为 a 的圆球的位势流动（$\mathbf{v}=$

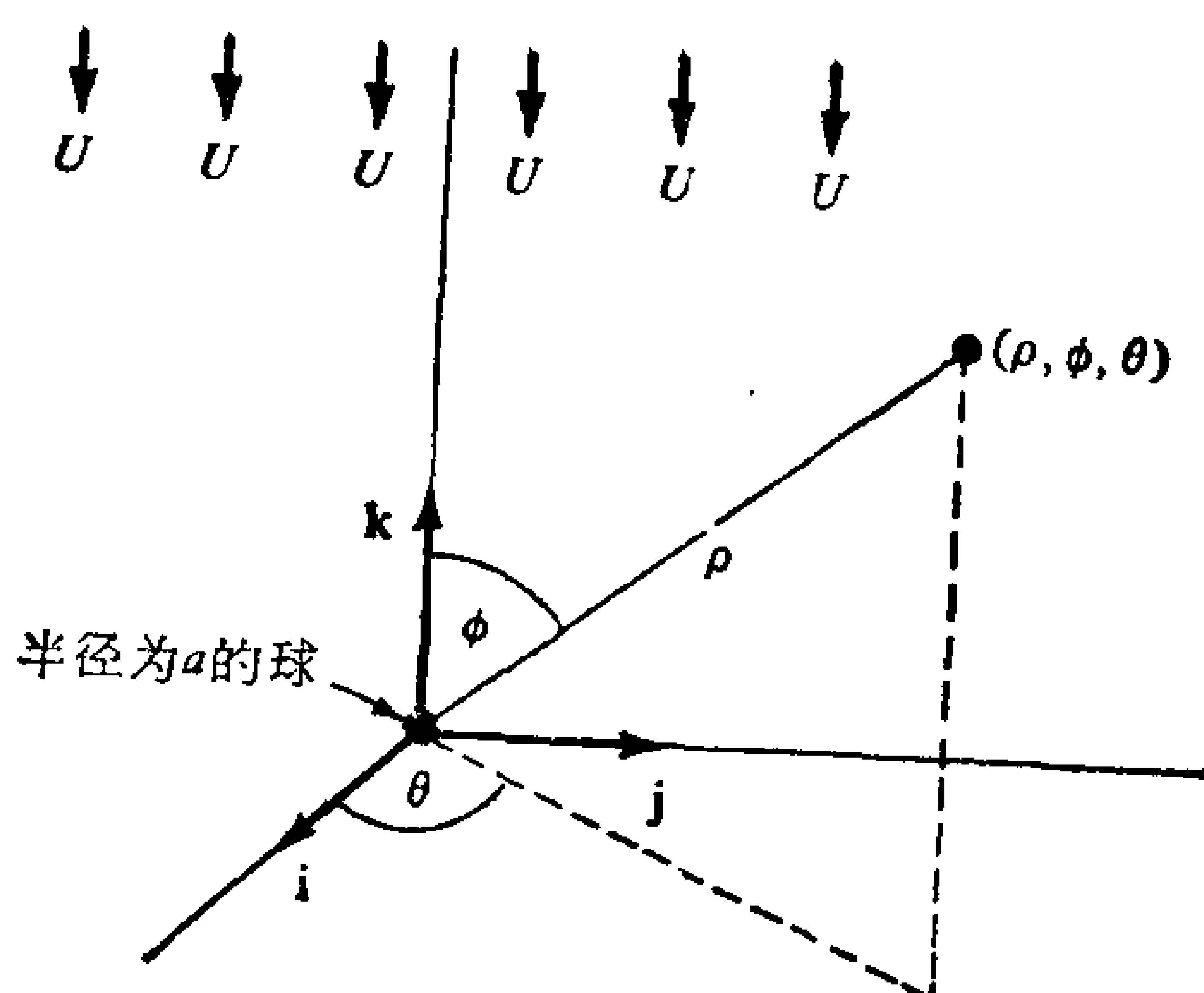


图 15.13　练习 7 所讨论的情况的示意图

$\nabla\Phi$). 调整坐标轴,使远离圆球 $\rho=a$ 处,均匀流速为 $-U\mathbf{k}$, U 是常数. 使用球坐标. (见图 15.13) 寻找一轴对称流动 ($\partial/\partial\theta=0$),并证明问题可归结为 $\Phi(\rho,\phi)$ 的下列方程:

$$\sin\theta\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)=\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right)=0;$$

$$\text{当 }\rho\to\infty\text{ 时},\quad \Phi\to -U\rho\cos\phi;$$

$$\text{在 }\rho=a\text{ 处}\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}=0.$$

求出用分离变量法得到的最一般的解. 你将需要下列事实: $y(\phi)$ 的勒让德方程是

$$\frac{1}{\sin\phi}\frac{1}{d\phi}\left(\sin\phi\frac{dy}{d\phi}\right)+ky=0.$$

对于所有的 ϕ,仅当 $k=n(n+1)$, $n=0,1,2,\cdots$时,这个方程的解才是有限的. 相应的解是 $P_n(\cos\phi)$ 的倍数, 其中 P_n 是 n 阶(勒让德)多项式. 例如,

$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1).$$

8. 求由练习 7 的流动作用在球上的净力. 通过积分压强的局部效应来进行.

9.(a) 如果把体力项 $\rho^{-1}\mathbf{f} = -g\mathbf{j}$ 加到(22a)式的右端，试说明(23)式会如何改变。

(b) 证明(a)中所考虑的效应将以浮力项加到 $\mathbf{F}$ 的公式(26)中去。

附录 15.1　三维情况下达朗伯佯谬的一种证明

考虑一个封闭物体的运动所产生的三维无粘流体的无旋运动，并假定流体在无穷远处是静止的．令 $\mathbf{v} = \nabla\phi$，这里 ϕ 是速度势．如果流体的密度均匀，那末 $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$，$\phi$ 是调和的，并且(16.1.18)式可以应用．这个方程代表点 P 处的一个调和函数，它是用包围着 P 点的区域 R 的边界 ∂R 上的积分来表示的．如果 P 是原点，那末这个方程为

$$\phi(0) = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial R}\left[\phi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]d\sigma \quad (\partial/\partial n = \text{外法向导数}).$$

稍作重新解释，我们便可写出

$$\phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial R}\left[\phi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r'}\right) - \frac{1}{r'}\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]d\sigma, \tag{1}$$

式中 r' 是从 $\mathbf{x}$ 到在 ∂R 上移动的积分变量之间的距离．

设 R 为内部以 S 为边界、外部以 Σ 为边界包含着 $\mathbf{x}$ 的一个区域，这里 S 是包含上述物体的一个曲面，Σ 为以 $\mathbf{x}$ 为中心 ρ 为半径的一个大球面(见图 15.14)．

不难证明(练习 1)，(1)式意味着

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\rho^2}\iint_{\Sigma}\phi d\sigma + \frac{1}{4\pi\rho}\iint_{\Sigma}[\nabla\phi\cdot\mathbf{n}]d\sigma + \frac{1}{4\pi}\iint_{S}\left[\phi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r'}\right) - \frac{1}{r'}\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]d\sigma. \tag{2}$$

在(2)式及以后，并不明确地指明时间 t，因为在我们的全部讨论

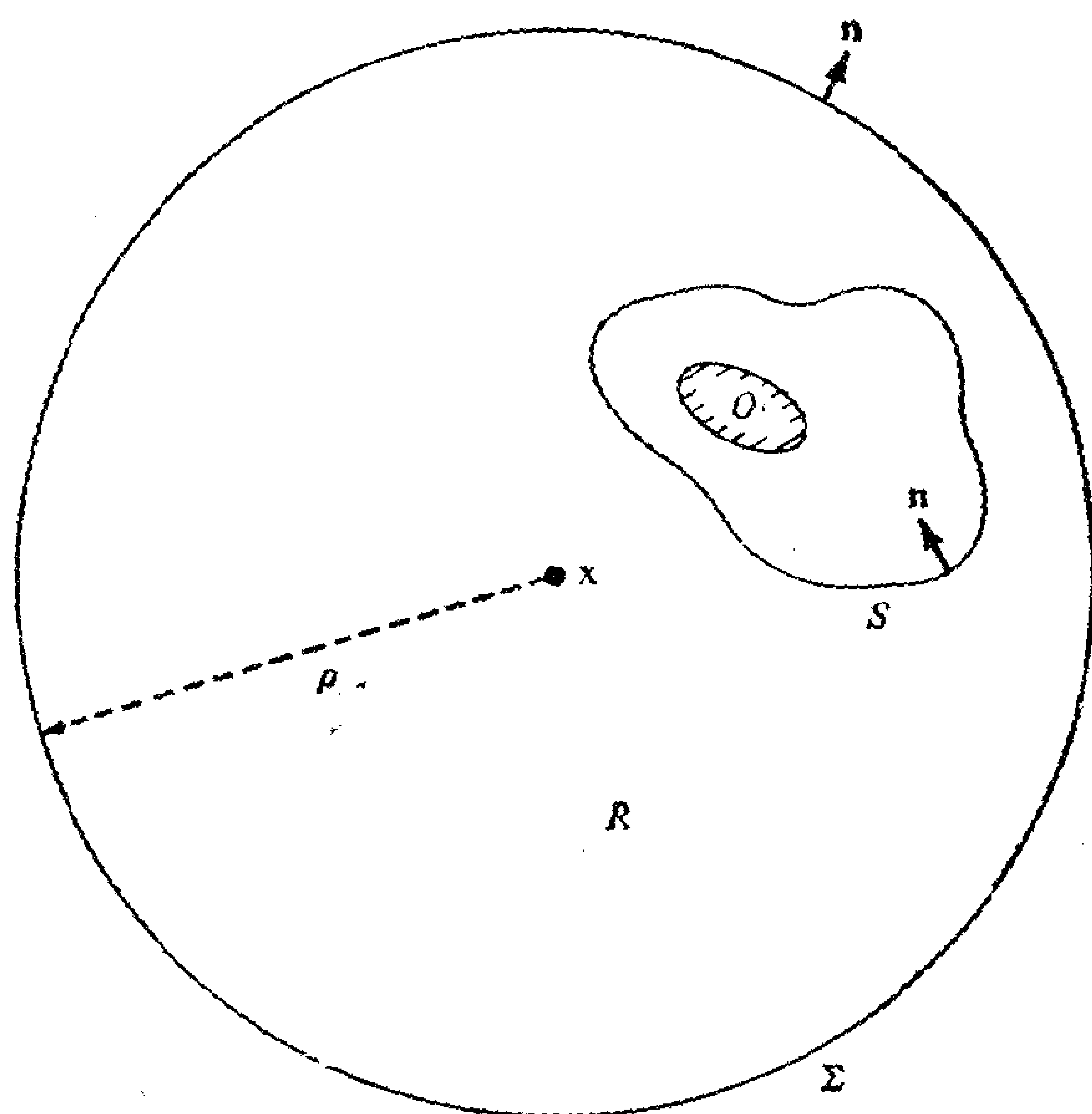


图 15.14　对于绕物体 O 的流动，用来表示 $\mathbf{x}$ 处速度势的区域 R. 矢量 $\mathbf{n}$ 是 R 的典型的单位外法线.

中，都把时间看作是固定的.

(2)式的第一个积分是 ϕ 在以 $\mathbf{x}$ 为中心，ρ 为半径的球面上平均值．让我们暂时认为下面的说法是理所当然的，即这个积分值在 $\rho\to\infty$ 时的极限与 $\mathbf{x}$ 无关．我们将在下面对这种说法作一梗概的证明.

(2)式的第二个积分在上述极限下趋向于零，因为已假定在无穷远处流体没有运动，所以这个结论可从在离原点距离很大时根据 $\nabla\phi\to 0$ 这一事实推论出来.

现在假定物体以均匀速度 $-\mathbf{U}$ 运动．取相对于老坐标轴以速度 $-\mathbf{U}$ 运动的新坐标轴．(在新的坐标系统下，物体是固定的，远离物体的流体以速度 $\mathbf{U}$ 运动.)利用到此为止所作的推导，我们知道，速度势满足

$$\phi(\mathbf{x})=\mathbf{U}\cdot\mathbf{x}+\text{常数}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint_S\left[\phi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r'}\right)-\frac{1}{r'}\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]d\sigma \tag{3}$$

练习 2 证明，当 $r=|\mathbf{x}|\to\infty$ 时，我们可从(3)式推得

$$\phi(\mathbf{x})\to U\cdot\mathbf{x}+\text{常数}-\frac{F}{4\pi r}+O(r^{-2}), \tag{4}$$

式中

$$\mathbf{F}=\iint_S\frac{\partial\phi}{\partial n}d\sigma=\iint_S\nabla\phi\cdot\mathbf{n}d\sigma=\iint_S\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}d\sigma$$

是流体通过 S 的净流出量．因为没有源，我们必然有

$$F=0. \tag{5}$$

为了证明这一点，请注意散度定理指出

$$F-\iint_{\text{物体}}\nabla\phi\cdot\mathbf{n}d\sigma=0. \tag{6}$$

但是式 (6) 中的第二个积分为零，因为在固定的物体上 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=0$。

根据 (4)、(5) 式和伯努利方程 (4.24)，我们得到如下的结论[练习 2(b)]

当 $r\to\infty$ 时，

$$\mathbf{v}=\mathbf{U}+O(r^{-3}),\quad p=p_\infty+O(r^{-3}). \tag{7}$$

因为我们知道速度和压力以上面的方式趋向于它们在无穷远处的值，由练习 14.26 可知，没有力作用在物体上．

注评．对于二维物体，不能用上面的讨论来对无穷远处的性质作出估计，因为速度场可能是多值的．我们可以应用解的泊松积分表达式[1]，或者可以根据解析函数理论来进行．

剩下来要证明的是下列引理： ϕ 在半径为 ρ 的球 S_x 上的平均值与它的中心点位置 $\mathbf{x}$ 无关． 用 $M\rho(x)$ 表示这一平均值，并令 $\mathbf{u}$ 代表单位矢量．于是

$$M\rho(\mathbf{x}+a\mathbf{u})-M\rho(\mathbf{x})$$

---

1) 泊松积分表达式是(16.2.13)式的二维形式，具有一个对数奇点．

$$= \frac{1}{4\pi\rho^2}\iint_{S_{\mathbf{x}+a\mathbf{u}}} \phi d\sigma - \frac{1}{4\pi\rho^2}\iint_{S_{\mathbf{x}}} \phi d\sigma$$

$$= \frac{1}{4\pi\rho^2}\iint_{S_{\mathbf{x}}} (\phi^* - \phi) d\sigma, \tag{8}$$

式中 ϕ^* 是 ϕ 按照必须把第一个积分中积分区域从 $S_{\mathbf{x}+a\mathbf{u}}$ 移动到 $S_{\mathbf{x}}$ 的变量变换得到的. 根据积分中值定理,我们从(8)式推得

$$M\rho(\mathbf{x} + a\mathbf{u}) - M\rho(\mathbf{x}) = \phi^* - \phi = \nabla\phi \cdot (\text{数值 } a \text{ 的矢量}), \tag{9}$$

式中 $\phi^* - \phi$ 和 $\nabla\phi$ 都是在 S 上的某点计算的. 因为当 $\rho \to \infty$ 时, $|\nabla\phi| \to 0$, 我们推论得到, 对于任意的 a 和 $\mathbf{u}$,

$$M_\infty(\mathbf{x} + au) - M_\infty(\mathbf{x}) = 0,$$

因此 $M_\infty(\mathbf{x})$ 为常数.

练　　习

1. 证明方程(2)、(3)和(6);

2. (a) 证明(4)式,

(b) 证明(7)式;

3. 明确地完成(8)式所需要的变换,从而得到(9)式中提到的"数量 a 的矢量"表达式.

附录 15.2　极坐标和柱坐标

令 $\mathbf{e}^{(r)}(r_0, \theta_0)$ 是点(r_0, θ_0)处"r 变化"的坐标曲线 $\theta = \theta_0$ 的单位切矢量. 令 $\mathbf{e}^{(\theta)}(r_0, \theta_0)$ 是同一点处"θ 变化"的坐标曲线 $r = r_0$ 的单位切矢量. $\mathbf{e}^{(r)}$ 和 $\mathbf{e}^{(\theta)}$ 分别指向 r 和 θ 增加的方向(练习 15.15). 在极坐标中, 矢量 $\mathbf{v}(r, \theta)$ 的分量定义为 $v^{(r)}$ 和 $v^{(\theta)}$, 式中

$$\mathbf{v}(r, \theta) = v^{(r)}(r, \theta)\mathbf{e}^{(r)}(r, \theta) + v^{(\theta)}(r, \theta)\mathbf{e}^{(\theta)}(r, \theta). \tag{1}$$

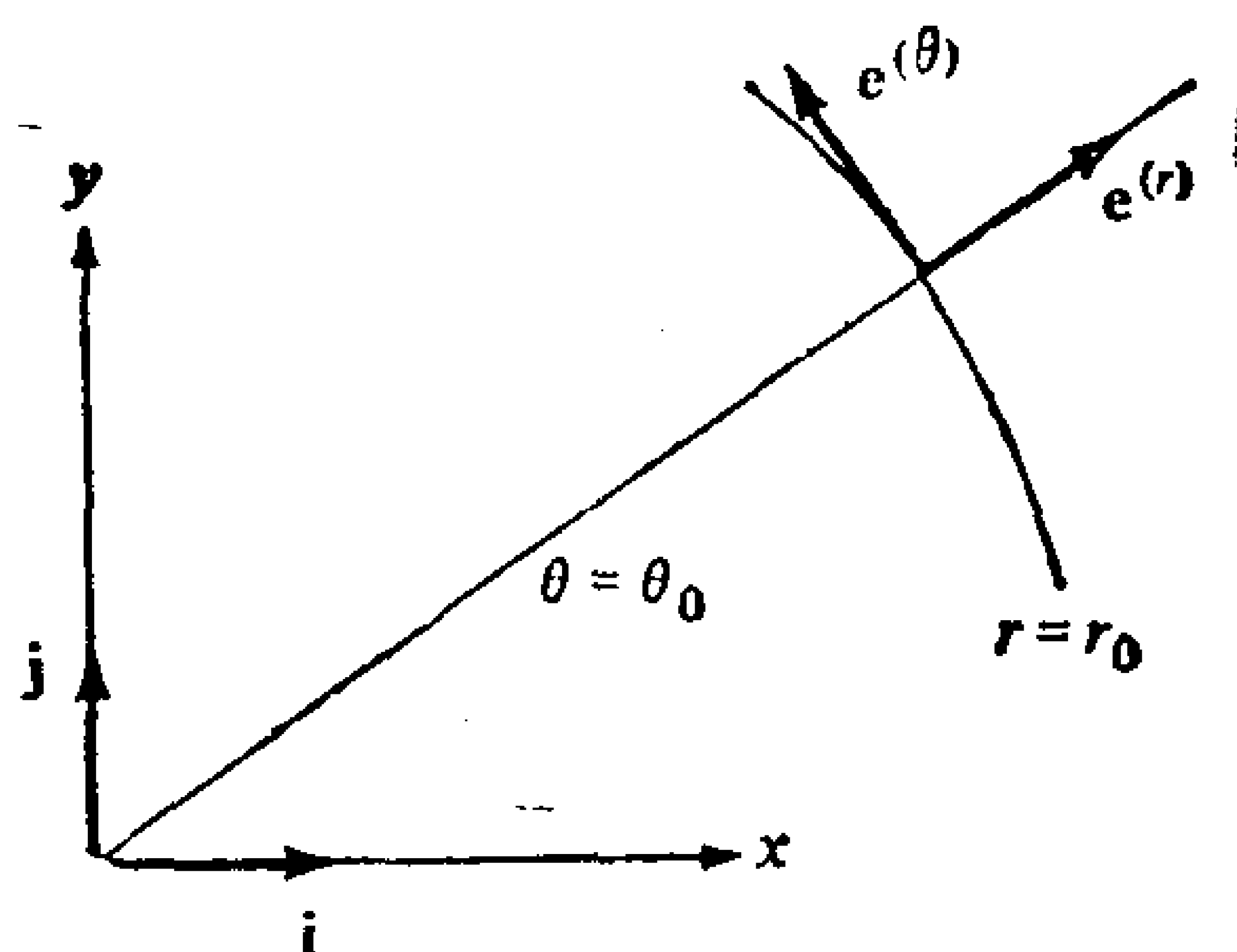


图 15.15　固定的笛卡儿单位矢量 **i** 和 **j**,以及一对典型的变化着的极坐标单位矢量 $\mathbf{e}^{(r)}$ 和 $\mathbf{e}^{(\theta)}$

因为 $\mathbf{e}^{(r)}$ 和 $\mathbf{e}^{(\theta)}$ 是正交单位矢量,所以

$$v^{(r)}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}^{(r)},\qquad v^{(\theta)}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}^{(\theta)}. \tag{2}$$

特别是,当 $\mathbf{v}=\nabla\Phi$ 时,关系式

$$v^{(r)}=\frac{\partial\Phi}{\partial r},\quad v^{(\theta)}=r^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}. \tag{3}$$

几乎直接从下列单位矢量 **e** 方向上的 Φ 的方向导数的公式而来.

$$\frac{d\Phi}{dS}=\nabla\Phi\cdot\mathbf{e}.$$

下列公式把极坐标与笛卡儿坐标(单位矢量 **i** 和 **j**, 速度分量 u 和 v)联系在一起. 如果

$$\mathbf{i}=C_1\mathbf{e}^{(r)}+C_2\mathbf{e}^{(\theta)},$$

那末

$$\mathbf{e}^{(r)}\cdot\mathbf{i}=C_1,\qquad C_1=\cos\theta;$$

$$\mathbf{e}^{(\theta)}\cdot\mathbf{i}=C_2,\qquad C_2=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right).$$

因此

$$\mathbf{i}=\cos\theta\mathbf{e}^{(r)}-\sin\theta\mathbf{e}^{(\theta)}. \tag{4}$$

类似地,

$$\mathbf{j}=\sin\theta\mathbf{e}^{(r)}+\cos\theta\mathbf{e}^{(\theta)}, \tag{5}$$

并且

$$\mathbf{e}^{(r)} = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}, \tag{6}$$

$$\mathbf{e}^{(\theta)} = -\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}. \tag{7}$$

根据(1)、(6)和(7)式，因为 $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$

$$v^{(r)} = u\cos\theta + v\sin\theta, \tag{8}$$

$$v^{(\theta)} = -u\sin\theta + v\cos\theta. \tag{9}$$

类似地，利用(4)和(9)式，

$$u = v^{(r)}\cos\theta - v^{(\theta)}\sin\theta, \tag{10}$$

$$v = v^{(r)}\sin\theta - v^{(\theta)}\cos\theta. \tag{11}$$

在柱坐标中，(x, y) 平面内用极坐标，而 z 分量则与笛卡儿坐标是相同的. 例如，$\mathbf{e}^{(r)}(r_0, \theta_0, z_0)$是点 (r_0, θ_0, z_0) 处曲线 $r = r_0$，$z = z_0$ 的单位切向矢量. 速度矢量 $\mathbf{v}(r_0, \theta_0, z_0)$ 的分量为

$$[v^{(r)}(r_0, \theta_0, z_0),\ v^{(\theta)}(r_0, \theta_0, z_0),\ w(r_0, \theta_0, z_0)],$$

因而

$$\mathbf{v} = v^{(r)}\mathbf{e}^{(r)} + v^{(\theta)}\mathbf{e}^{(\theta)} + w\mathbf{k}$$

像往常一样，$\mathbf{k}$ 表示沿 z 轴的单位矢量.

第十六章　位势理论

引力位势理论及其在静电学、电磁波和声波理论中的推广，为说明数学分析的威力提供了一些极好的例子；但也引起了一系列非常难以捉摸的挑战性的问题．在本章中，我们将讨论这个论题中的一些最精采的部分，以使读者对它的推断和结果的范围有一个感性的认识．

在引力位势的启示下，我们在16.1节中推导了拉普拉斯方程和泊松方程的各种结果．16.2节主要讨论了格林函数的结构及其应用；静电学为此提供了物理基础．最后一节论述了一个归结为赫姆亥兹（*Helmholtz*）方程的无粘流动问题，即一道平面声波碰到屏幕上的一个小孔时所产生的衍射问题．

16.1　拉普拉斯方程和泊松方程

本节最主要的公式方程(7)给出了由分布在整个空间中各个区域上的质量所引起的引力位势 $V(\mathbf{x})$．我们证明，如果 $\mathbf{x}$ 在质量分布区域之外，$V(\mathbf{x})$ 便满足拉普拉斯方程(3)．而如果 $\mathbf{x}$ 在质量分布之内，$V(\mathbf{x})$ 便满足泊松方程(8)．然后，我们反过来简要地讨论在有界区域 R 内满足这些方程的函数，其目的是用在 R 的边界 ∂R 上的积分公式来表示这些函数．对于拉普拉斯方程，这种表示方法给出了中值定理和调和函数的最大值原理．我们也得到这样的结论：只要以某种方式规定满足泊松的方程的函数在无穷远处的性质，那末方程(7)就为这个函数所满足．本节以某些有关的唯一性的论述为结束，同时，似乎以定理证明的文体来叙述较为合适．

离散质量分布的引力位势

如同引论性物理教程中所讨论的那样，一个位于源点 $\boldsymbol{\xi}$ 处的

点质量m在场内某点$\mathbf{x}$处所引起的引力位势V为

$$V(\mathbf{x}) = -G\frac{m}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|} \tag{1}$$

(这里，G是万有引力常数，其值为6.67×10^{-8}达因·厘米^2/克^2).按照定义,引力位势是一个标量,其负梯度给出引力$\mathbf{g}$. 同时，从(1)式,我们得到二个点质量m所引起的与距离平方成反比的力:

$$g_i(\mathbf{x}) = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = -Gm\frac{x_i-\xi_i}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|^3}. \tag{2}$$

很容易证明[练习 1(b)],除了 $\mathbf{x}=\boldsymbol{\xi}$ 以外,引力势满足拉普拉斯方程:

$$\nabla^2 V = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} = 0. \tag{3}$$

在复杂的问题中,例如,在除了最简单形状以外有边界存在的问题中,就不可能推导出位势的精确表达式. 在这种情况下，通常最好从位势所满足的微分方程着手. 当我们对这些情况有了准备,就会看到,通过寻找偏微分方程(3)在$\boldsymbol{\xi}$点有**奇点**的解,我们就可得到(1)式. 这样一种说明实际上是相当含糊的,因为还有其他满足同一的普遍要求的解[例如,(1)式的偏导数]. 在说明奇点的性质时,我们必须更精确些. 事实上,为了重新获得(1)式,我们应该加上限制条件

$$\lim_{r\to0} rV = -Gm. \tag{4}$$

由位于$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_s$的许多质点$m_1, m_2, \cdots, m_s$所引起的引力位势为

$$V(\mathbf{x}) = -G\sum_{k=1}^{s}\frac{m_k}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}_k|}. \tag{5}$$

当 $\mathbf{x}\neq\boldsymbol{\xi}_k$ 时,这个函数V也满足微分方程(3). 为了从(3)式获得(5)式,我们必须规定

$$\lim_{\mathbf{x}\to\boldsymbol{\xi}_k}|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}_k|V = -Gm_k,\quad k=1,2,\cdots,s. \tag{6}$$

我们以后将看到,还有一个在无穷远处要规定的条件.

连续介质分布区的引力位势

如果有一种密度为 $\rho(\boldsymbol{\xi})$ 的质量分布，那末引力位势为下式所给出

$$V(\mathbf{x}) = -G\iiint \frac{\rho(\boldsymbol{\xi})d\tau}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}. \tag{7}$$

式中 $d\tau$ 是体元，积分是对 $\boldsymbol{\xi}$ 进行的. 如果把没有质量的区域看作 $\rho = 0$，那末很容易把无穷空间取作积分区域. 对于在这些区域中的 $\mathbf{x}$，拉普拉斯方程仍然满足. 那末关于充满质量区域中的某一点情况又怎样呢？

首先，有一个积分收敛的问题，但这一点可毫无困难地加以证明. 其次，如果我们希望通过从形式上计算(7)式的梯度去计算力矢量的话，问题就变得比较严重了，但(7)式的形式上的微分仍然可以证明是合理的. 然而，当我们试图计算 (7) 式的二阶导数时，形式上的步骤就不再是正当的了. 事实上，我们发现，引力势(7)式不再满足拉普拉斯方程(3)，但却满足**泊松方程**

$$\nabla^2 V = 4\pi G\rho. \tag{8}$$

虽然，我们将立即看到这种关系的形式上的推导是相当容易的，但对于充分光滑的密度分布，二阶导数存在性的证明却更为复杂[参阅 Jeffreys 和 Jeffreys (1962)，见 6.04 节]我们的讨论将从一个把引力通量与质量相关联在一起的著名公式开始.

定理 1（高斯） 引力场 $\mathbf{g} = -\nabla V$ 的通量 F 定义为

$$F = \oiint_{\partial R} \mathbf{g}\cdot\mathbf{n}d\sigma, \tag{9a}$$

式中 $\mathbf{n}$ 是沿 ∂R 的外法线方向的单位矢量，而 ∂R 是一个包围区域 R 的表面(假定光滑得足以允许作各种运算). 通量 F 与 ∂R 所包围的总质量 m 由下式相关联

$$F = -4\pi GM. \tag{9b}$$

我们把一个位于表面上的质量点看作一半在里面一半在外面.

证明 首先考虑一个点质量. 如果表面 ∂R 并不包围它，那

末我们由散度定理得到

$$\oiint_{\partial R} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_R \nabla \cdot \mathbf{g} d\tau$$

$$= -\iiint_R \nabla^2 V d\tau = 0. \tag{10}$$

如果 R 内部有一个质量点，譬如说是点 P，那末上述定理便不能运用. 但是，让我们画一个中心在点质量 P 处、半径为 ε 的小球（图 16.1）.[1]因为如果把(10)应用于 S 和 ∂R 之间的区域，它是成立的，所以我们有

$$\oiint_{\partial R} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \oiint_S \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0.$$

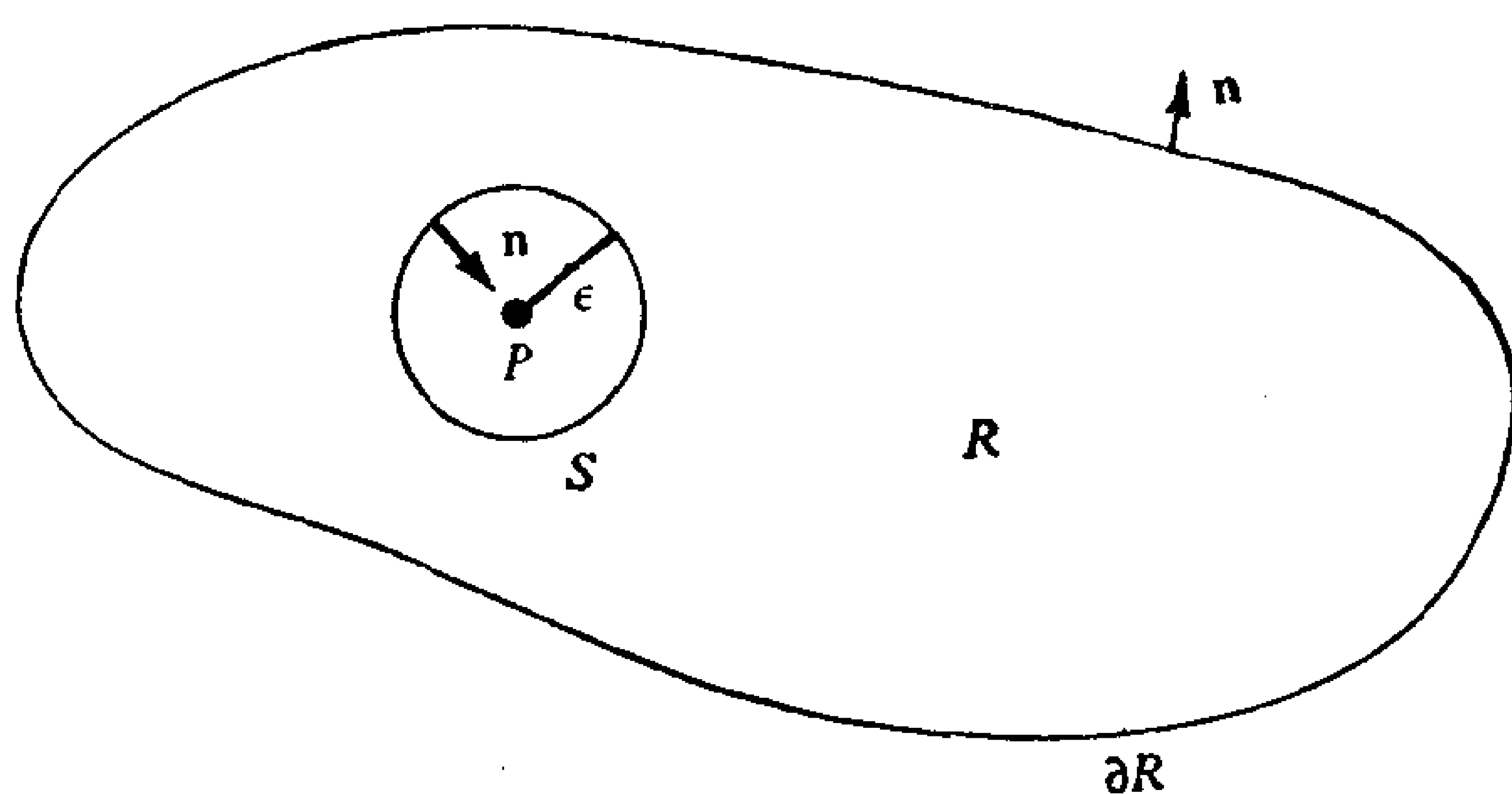


图 16.1 用一个半径为 ε 的小球去去掉奇异点 P. 矢量 $\mathbf{n}$ 是 S 和 ∂R 所包围区域的外法线之间的单位矢量.

在这个方程中，表面 ∂R 和 S 的单位法向量 $\mathbf{n}$ 都是从这两个面所包围的区域指向外面的，特别是 S 的法线指向质点 P. 在表面 S 上平方反比定理使我们能够计算这个通量[练习 3(a)]，于是我们立即得到所希望的一个点质量的结果 (9b) 式. 根据叠加原理，这个公式也适用于一般情况.

定理 2 如果 $\mathbf{x}$ 处在包含密度为 ρ 的质量连续分布的区域之中，那末(7)式的位势 $V(x)$ 满足泊松方程(8).

---

1) 用一个小球去去掉奇异点，这是一个很有用的方法. 今后我们还将要用到它.

证明 我们把(9)式写作

$$\oiint\limits_{\partial R} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} d\sigma = -4\pi G \iiint\limits_{R} \rho d\tau.$$

如果可以把散度定理应用于这个方程的左端，那末对于任意区域 R 我们便有

$$\iiint\limits_{R} (\nabla \cdot \mathbf{g} + 4\pi G\rho) d\tau = 0. \tag{11}$$

因此，对于被积函数是连续函数的一个邻域内的任个一点，利用 Dubois-Reymond 引理(4.1 节)，我们可得到所望的结果

$$-\nabla \cdot \mathbf{g} = \nabla^2 V = 4\pi G\rho \tag{12}$$

关于调和函数的定理

在区域 $\mathscr{D}$ 中满足拉普拉斯方程的函数，称之为 $\mathscr{D}$ 中的**调和函数**. 例如，如(3)式所述，函数

$$r^{-1} = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^{-1} \tag{13}$$

就是以 $\mathbf{x}$ 为变量而 $\boldsymbol{\xi}$ 不变的任何不包含点 $\boldsymbol{\xi}$ 的区域中的调和函数. 这个函数对 $\boldsymbol{\xi}$ 为变量而 $\mathbf{x}$ 固定它在不包含 $\mathbf{x}$ 的任何区域也是调和的.

我们现在来证明关于调和函数的三个定理. 第二个定理也许是这三个定理中最重要的一个，它指出，*调和函数 ϕ 在 $\mathbf{x}$ 处的值是任何的 $\mathbf{x}$ 为中心的球面上(和函数区域中)该函数的平均值*. 如果把 ϕ 解释为定常温度 (4.1 节)，那末在物理上这个定理是合理的，因为如果在 $\mathbf{x}$ 处的温度不等于它的平均值，那末为了把温度分布"弄平滑"，我们就会指望有热流动. 如果赋予 ϕ 以 3.3 节中的概率的解释，那末这个定理就陈述了十分似然的结果，即对于一个从 $\mathbf{x}$ 处起动的质点，离开边界某一指定部分的概率等于在围绕 $\mathbf{x}$ 的球上(和在函数的定义区域之内)出发的各质点的相应概率的平均值.

定理 3 区域 R 内的调和函数 $\phi(x)$ 由它在 R 的边界 ∂R 上

的值及其法向导数所确定．其公式为(18)式．(为了完成这一证明的各步，我们假定函数充分光滑．)

证明 我们从对称的格林公式

$$\iiint_R (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)d\tau = \oiint \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma \tag{14}$$

出发，式中 $\partial/\partial n$ 表示沿外法向的导数．公式(14)是散度定理的直接结果．(参阅练习 3.4.8.)在(14)式中，我们令

$$u = \phi, \quad v = r^{-1} \tag{15}$$

并把 ξ 看作是积分的变量． $v = |x - \xi|^{-1}$ 在坐标为 x 的点 P 处有一个奇异点．为了排除这一点，我们再次用一个小 ε 为半径的球来包围 P(图 16.1)．然后把(14)式用于 R 和 S 之间的区域．因为(14)的左端恒等于零，所以

$$\iint_{\partial R}\left[\phi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right]d\sigma + \iint_S\left[\phi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial n}\right]d\sigma = 0. \tag{16}$$

在 S 上，法向导数满足 $\partial/\partial n = -\partial/\partial r$，因此，第二个积分变为

$$\iint_S\left[\frac{\phi}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\phi}{\partial r}\right]d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{\phi}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\phi}{\partial r}\right]\varepsilon^2\sin\xi d\xi d\eta, \tag{17}$$

式中 ξ 和 η 分别为球坐标的极角和方位角．

现在如果我们令球 S 的半径 ε 趋于零，从(16)式，我们得到

$$\iint_{\partial R}\left[\phi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]d\sigma + 4\pi\phi(\mathbf{x}) = 0,$$

或

$$\phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial R}\left[\phi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{\gamma}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]d\sigma. \tag{18}$$

表达式(18)非常有用，事实上，我们已经用它证明过达朗伯佯谬(附录 15.1).

定理 4 (调和函数的中值定理). 令 $\mathbf{x}$ 为半径为 ρ 的球 R 的中心. 假定 ϕ 在一个包含 R 的区域中是调和的. 那末

$$\phi(\mathbf{x})=\frac{1}{4\pi\rho^2}\oiint_{\partial R}\phi d\sigma.$$

证明 应用(18)式，并利用在 ∂R 上 $\partial/\partial n=\partial/\partial r$ 的事实，我们得到

$$\phi(\mathbf{x})=\frac{1}{4\pi\rho^2}\oiint_{\partial R}\phi d\sigma+\frac{1}{4\pi\rho}\oiint_{\partial R}\frac{\partial\phi}{\partial n}d\sigma.$$

利用散度定理，我们立即看到第二项的积分等于零，因为它等于

$$\iint_{\partial R}(\mathbf{n}\cdot\nabla\phi)d\sigma=\iiint_R\nabla^2\phi d\tau=0.$$

这个中值定理现在将用来证明非平庸的调和函数在内部不可能具有的最大值和最小值. (试比较 4.1 中关于传热方程极值原理的注解.)

定理 5 (调和函数的极值原理). 令 ϕ 为区域 R 内的一个调和函数. 那末 ϕ 或者为常数，或者在 R 的边界上出现极大值或极小值.

证明 假定 ϕ 在点 $\boldsymbol{\xi}$ 处有一个在区域 R 内的局部极大值 M，因此对充分小的 ε，并且 $|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|\leqslant\varepsilon$，有 $|\phi(x)|\leqslant M$. 应用定理 4，把 $\boldsymbol{\xi}$ 取作半径为 ε_1 的球的中心，此处 $\varepsilon_1<\varepsilon$，这就得到

$$\phi(\xi)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_1^2}\iint\phi d\sigma\leqslant\frac{1}{4\pi\varepsilon_1^2}\iint M\,d\sigma=M.$$

但是 $\phi(\xi)=M$，因而在上述方程中等号必然成立. 于是 [练习 4(a)]

$$\phi(\mathbf{x})\equiv M,\quad|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|\leqslant\varepsilon. \tag{19}$$

现在取一系列中心位于 $\boldsymbol{\xi}$，半径为 $|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|=\varepsilon$ 的新圆，重复上述论点，即得所需的结果. 而去掉域内极小值的证明本质上是相

同的. ▯

泊松方程解的积分表达式

让我们再次使用格林等式(14). 象以前一样,我们令 $v=r^{-1}$, 但现在令 $u=V$ 为满足泊松方程 (8) 的一个函数. 我们就得到有界区域R内满足泊松方程的一个函数V的积分表达式如下 [练习 4(b)]:

$$V=-\frac{1}{4\pi}\oiint_{\partial R}\left[V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}\right]d\sigma$$

$$-G\iiint_{R}\frac{\rho}{r}d\tau. \tag{20}$$

(20)式的最后一项就是体积分(7),给出了由密度分布ρ所引起的引力势. 其他项代表曲面S的贡献, 我们也可以给出它们的物理意义. 这些解释在我们考虑静电学问题时是很实际的, 但对于引力问题,却是相当人为. 在后一种情况下,表面积分事实上应该看作是由于R之外的质量分布而给出的贡献. 因而, 我们将考虑表面 $\partial R\to\infty$ 的情况. 在极限情况下, 我们是在讨论无界区域中的质量分布,因而可望得到(7)式.

如果(7)式成立,那末就可以对V和∇V在无穷远处的量级作出形式上的估计,我们得到

$$\text{当 } r\to\infty \text{ 时},\ V\sim r^{-1},\quad \nabla V\sim r^{-2}. \tag{21}$$

条件(21)应该看作是对我们所寻找的解的限定. 否则就不能保证唯一性;事实上,象 $r^{-n}\cos n\theta$ 这样的调和函数可以叠加到V上去. 在加上了条件(21)以后,当表面∂R后退到无穷远时,(20)式中的面积分事实上便趋向于零, 要证明这一点是一个简单的计算问题[练习 5(b)]. 于是,我们便得到如下的结果.

定理 6 (定理 2 的部分逆定理) 令V在区域R内满足泊松方程. 如果R有界且它的边界充分光滑,那末表达式 (20) 适用. 如果R无界,并且在大r时V具有性质(21)式,那末(7)式成立.

唯一性

由公式(18)，我们可以这样假定，一旦一个调和函数的值和它的法向导数在一个区域的封闭曲面上已知时，那末这个函数便在这个区域上完全规定了. 这个假定肯定是正确的，但是在实际上，这个函数既可为曲面上的函数值也可为曲面上的该函数的法向导数所唯一地确定.（在后一种情况下，仍然存在着一个任意可加常数的自由度.）如果由已知的边界值去寻找一个调和函数，习惯上便叫做调和函数的**奇利赫里（Dirichlet）问题或第一类边值问题**. 如果在边界上给定函数的法向导数，那末文献上便称作为**诺依曼（Neumann）问题或第二类边值问题.**

对于奇利赫里问题和诺依曼问题（或者它们的组合），可以按照类似于证明热传导问题唯一性的论证（练习 6）去证明它的唯一性. 另外，极值原理仍可应用（练习 7）. 把这些证明推广到泊松方程是很简单的（练习 8）.

练　　习

1. (a) 证明(2)式.

(b) 试证明，除了 $\mathbf{x}=\boldsymbol{\xi}$ 处外，(1)式所定义的函数 V 满足(3)式

2. 给出(7)式的积分号下可以进行两次导数的充分条件，从而证明当 $\mathbf{x}$ 为无质量区域中的一点时，$V(\mathbf{x})$ 满足拉普拉斯方程.

3. (a) 完成定理 1 的形式证明.

(b) 写出完成该证明所需的细节.

4. (a) 利用 Dubois-Reymond 引理证明(19)式.

(b) 试证明(20)式.

5. (a) 给出表明(7)式包含着(21)式的形式上的计算

(b) 试证明，如果条件(21)得到满足，那末(20)式中的面积分在表面趋向无穷时趋向于零.

6. (a) 按照得到(4.1.17)式的一般方法，证明奇利赫里问题的唯一

性定理.（目前情况下的证明实际上是比较容易的.）

（b）对于诺依曼问题，证明两个解至多可以差一个常数. 给出这是一个合理结果的物理论据.

（c）所求的调和函数其值已在部分边界上给定，并且在其余边界上其法向导数也已给定，对于这个问题，试证明其唯一性定理.

7.（a）利用极大值原理，证明奇利赫里问题至多只有一个解.

（b）利用极大值原理，证明奇利赫里的解连续地依赖于边界上的已知条件.

8. 把上述各证明加以推广，使它们适用于泊松方程.

16.2 格林函数

在本节我们构造各种类型的格林函数. 大体上讲，这些函数给出了集中在 $\boldsymbol{\xi}$ 点的一个单位(热、静电势、引力势等的)源点对在场点 $\mathbf{x}$ 处的影响. 显式的格林函数公式是对自由空间和存在平面或球面边界的情况给出的. 我们要证明一旦确定了这些函数怎样便能求解相应的一般边值问题.

狄利克莱问题的格林函数

为了加深我们对调和函数的理解并给出求解这些问题的一个有用的方法，我们应该引进格林函数的概念. 这一点已在静电学课程中做得很好了.

考虑一个位势为零(接地)的理想导体中的一个空腔. 如果在内点 ξ 处有一个正的点电荷 e（**源点**），那末在表面上就会感应出一些负电荷. 这些电荷会以这样一种方式分布以使得表面上的位势保持为零. 那末在其他任何内部点 $\mathbf{x}$（**一个场点**）的位势就是一个很确定的量了，而且我们可以用 $eG(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ 来表示它. G 是一个**格林函数**. 通常，格林函数可看作由于在 $\boldsymbol{\xi}$ 处的单位“原因”(电荷)在 $\mathbf{x}$ 点处所引起的影响(位势). 在点 $\boldsymbol{\xi}$ 附近，我们会指望直接由于电荷 e 所引起的位势超过表面电荷的作用，因此我们预期

$$当\ r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| \to 0\ 时, \quad G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \sim r^{-1}. \tag{1}$$

此外,位势(除了一个因子 e 以外)

$$G_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - r^{-1} \tag{2}$$

必然是仅仅由被感应的表面电荷所引起的. 因此 $G_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ 不可能有来自区域内的奇点所作的贡献，在空腔内这个函数必然处处调和.

因此,区域D上的格林函数 $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ 在数学上可以定义作为拉普拉斯方程在 $\mathbf{x} \neq \boldsymbol{\xi}$ 处的解，这个解 (i) 在D的边界上为零; (ii)满足条件(1)式. 这个函数也称作为区域D上(拉普拉斯方程)的**基本解**，并代表函数$1/r$ 的推广，而$1/r$ 是无限空间上的基本解.

格林函数的存在性是不容易证明的,显然,它的存在性的证明与函数 $G_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ 的存在性的证明是等价的. 而 $G_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ 在D中是调和的,并且满足边界条件 $G_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -1/r$. 这个具体的边界条件并不使问题有所改善，因此$G$的存在性的证明一般亦不比狄利克莱问题本身的存在性的证明容易.

利用格林函数表示调和函数

我们现在来证明，格林函数提供了调和函数的一种表达式. 与(1.18)相反这个表达式既不利用边界上函数的值，也不利用边界上的法向导数. 我们断定，区域R上的任何内点处的调和函数的值可以表示为

$$\phi(x) = -\frac{1}{4\pi}\oiint \phi\frac{\partial G}{\partial n}\,d\sigma. \tag{3}$$

为了证明这个关系式，我们可完全按照与证明定理1.3相同的步骤来进行. 用G代替$1/r$,因为G在边界上等于零,所以(1.18)式右端的第二项现在就为零所代替.

于是，(3) 式利用调和函数在边界上的值定义了这个调和函数,这与唯一性定理是相符的.

格林函数的对称性

在自由空间中，放置在点 $\boldsymbol{\xi}$ 处的单位电荷在点 $\mathbf{x}$ 处所引起的位势与在 $\mathbf{x}$ 处的单位电荷在 $\boldsymbol{\xi}$ 点处所引起的位势是相同的，这是因为 $1/r$ 对 $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ 是对称的．这一点对于导体内部的某个空穴里的位势也是成立的，因此我们指望

$$G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = G(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1). \tag{4}$$

为了证明这种互易性质，我们仍按照证明定理 1.3 的同一步骤来进行．在格林写出(1.14)中，我们利用函数

$$u = G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \quad v = G(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi}),$$

式中 $\boldsymbol{\xi}$ 是积分变数．详细的计算留给读者去完成(练习 1)．

简单区域的显公式

格林函数给求解调和函数边值问题提供了一条线索．不幸的是除了最简单的那种区域外，并不可能写出格林函数．我们现在来考虑其中格林函数已知的两个有关的情形：(i) 以一个无穷平面为界的半无穷空间；(ii)一个球内或球外的区域．这两种情况下的几何形状由一个反演过程相联系．

无穷平面　如果有两个符号相反的电荷，处在相对于一个平面 $x_1 = 0$ 的镜象位置上，那末这个平面上的位势为零．因此，对于 $x_1 \geqslant 0$，格林函数为

$$G(x, \xi) = \frac{1}{|x - \xi|} - \frac{1}{|x - \xi'|}, \tag{5}$$

式中 $\boldsymbol{\xi}$ 与 $\boldsymbol{\xi}'$ 有如下的关系：

$$(\xi_1', \xi_2', \xi_3') = (-\xi_1, \xi_2, \xi_3) \tag{6}$$

(点 ξ 和 ξ' 互为相对于平面 $x_1 = 0$ 的镜象)．于是按照 (3) 式就得到右半空间中狄利赫里问题的解(练习 2)为

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{2\pi}\iint \phi(0, \xi_2, \xi_3)|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^{-3} d\sigma, \tag{7}$$

式中(相对于 $\boldsymbol{\xi}$ 的)积分是在无穷平面 $\xi_1 = 0$ 上进行的．

球 考虑一个中心为 O、半径为 a 的球，在这种情况下，可以证明源点 $\boldsymbol{\xi}$ 的“象” $\boldsymbol{\xi}'$ 可用下列关系式

$$|\boldsymbol{\xi}|\cdot|\boldsymbol{\xi}'|=a^2, \tag{8}$$

加上点和象位于同一径线上的要求来定义． 如果场点 $\mathbf{x}$ 位于球上，那末按照格林函数的定义 $\mathbf{x}$ 处的位势为零． 图 16.2 画出了在这种情况下的几何位置．三角形 $OQ'P$ 与 OPQ 相似，因此，

$$\frac{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}'|}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}=\frac{a}{|\boldsymbol{\xi}|}. \tag{9}$$

为了得到零值边界条件，那末与位于 Q 的电荷相比，位于 Q' 的电荷除了小 $a/|\boldsymbol{\xi}|$ 倍外，还必须符号相反，因此，对于球外的某点 $\mathbf{x}$，格林函数为

$$G(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})=\frac{1}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}-\frac{a/|\boldsymbol{\xi}|}{|1-\boldsymbol{\xi}'|}, \tag{10}$$

而对于球内的某点 $\mathbf{x}$，格林函数为

$$G(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})=\frac{1}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}'|}-\frac{|\boldsymbol{\xi}|/a}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}. \tag{11}$$

由这些函数，经过一些计算以后，可以证明球外一点 $\mathbf{x}$ 的解（练习 4）为

$$\phi(\mathbf{x})=\frac{|\mathbf{x}|^2-a^2}{4\pi a}\iint\limits_{|\xi|=a}\frac{\phi(\boldsymbol{\xi})d\sigma}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|^3}. \tag{12}$$

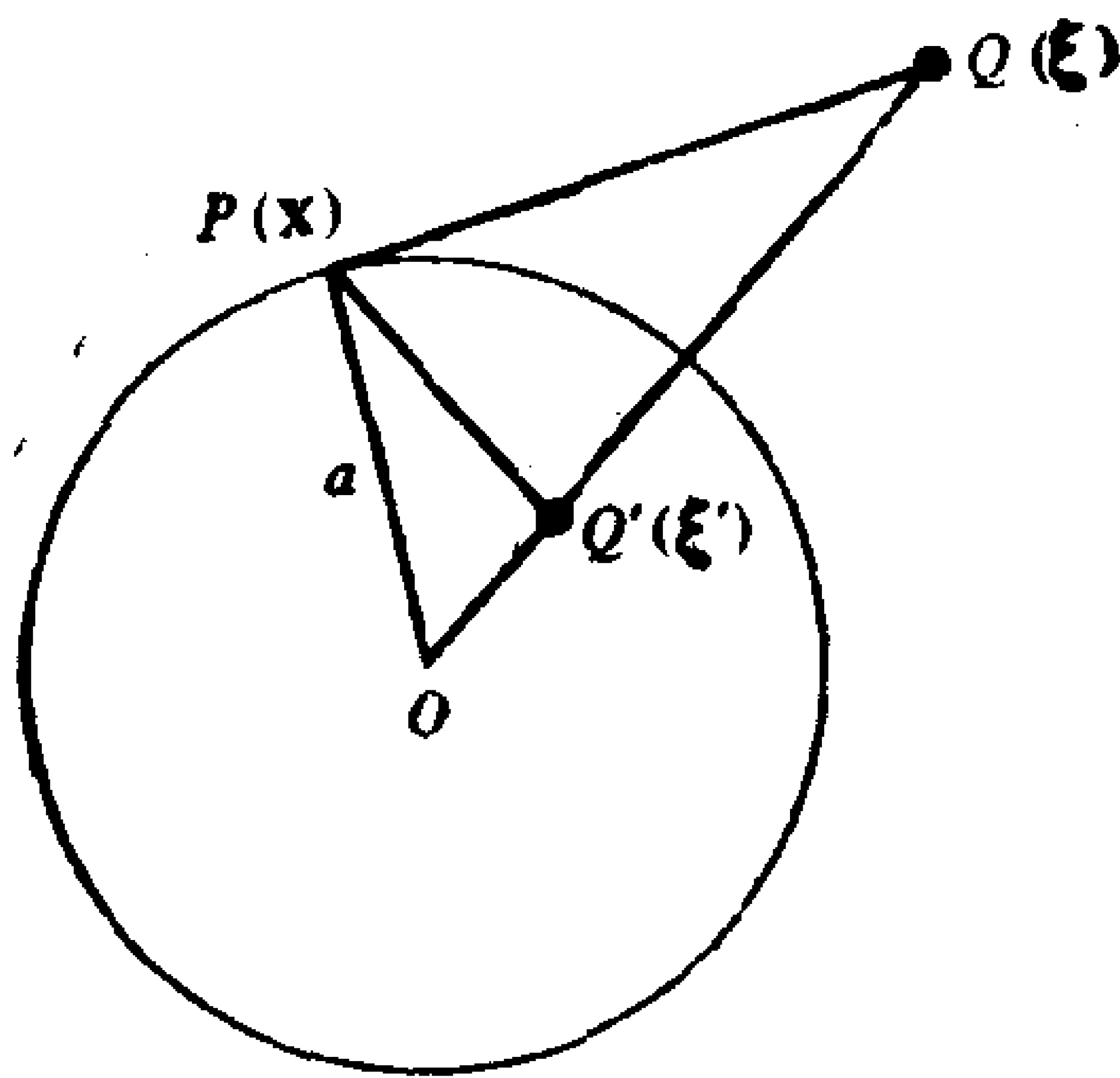


图 16.2　一个半径为 a 的导电球的源点 Q 和象点 Q'．场点 $\mathbf{x}$ 位于球上，所以那里的位势必然为零．

而球内一点 $\mathbf{x}$ 的解(练习 5)为

$$\phi(\mathbf{x})=\frac{(a^2-|\mathbf{x}|^2)}{4\pi a}\iint_{|\xi'|=a}\frac{\phi(\xi')d\sigma}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}'|^3},\tag{13}$$

(12)和(13)式称之为**泊松积分公式**.

源、象以及倒易概念的广泛应用

我们一直在讨论的有关狄利克莱问题的一般概念可广泛应用. 我们已在第三章的扩散方程中用到了它们. 在那里与这里一样, 我们用包括源解的积分求解了一般问题. 我们也用过镜象方法. 我们要特别提一下的是倒易性质(4)式也适合于作为传热方程的基本解 $u_0(x-\xi, t)$ [我们从 3.4 节记得, 这个解是点 x 处时间 t 时的温度, 它的存在是由于时间为零时从点 ξ 处释放的单位热量所引起的. 从显公式(3.4.4)中可以看到, 如果交换 x 和 ξ, 那末 $u_0(x-\xi, t)$ 的值仍然不变.]

于是,在第三章和这一章中,我们看到了热流、万有引力和静电学中固有的倒易关系. 但是这远不是完整的概念. 我们再举另外一个例子,由于对不可逆热力学所作的贡献,特别是由于发现了传导系数的某些倒易关系,L. Onsager 在 1968 年获得了诺贝尔化学奖.

我们现在通过考虑拉普拉斯方程的不同边界条件, 并通过处理新的方程

$$\nabla^2 u+k^2 u=0,\quad k>0\tag{14}$$

来推广上面关于格林函数的讨论. 我们以后要看到, 这个**霍姆亥兹方程**出现在波动的传播问题中. 因此, 我们将给出在三大经典数学物理领域[波传播、(由拉普拉斯方程制约的)平衡和扩散]中应用源解的例子.

诺依曼问题的格林函数

狄利赫里问题中, 格林函数的边界条件使我们得到了解(3), 这个解仅依赖于 ϕ 的边值而与它的法向导数无关. 还有关于边界

条件的另一种选择. 我们可以选择定义一个满足下列边界条件的第二类格林函数 $H(\mathbf{x}, \xi)$.

在边界上

$$\frac{\partial H}{\partial n} = 0. \tag{15}$$

为了更精确起见,除了式(15)外,当 ξ 固定, $\mathbf{x}$ 为不断改变的变量时, 函数 $H(\mathbf{x}, \xi)$ 在除去 $\boldsymbol{\xi}$ 点以外的无穷区域 D 上是拉普拉斯方程的解,而在 $\boldsymbol{\xi}$ 点附近,我们有

$$H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \sim r^{-1}, \quad r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|. \tag{16}$$

如果我们按照 16.1 节的推理(练习 6),代之以(3)式我们将得到

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial R} H \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma. \tag{17}$$

在这里应该作一点不很重要的观察, 如果 H 是一个第二类格林函数,那末, $H +$ 常数便是另一个第二类格林函数. 然而公式(17)并不受这种改变的影响, 因为(如同在定理 1.4 中所证明的)额外的一项为零. 因此, 我们得到了第二类边值问题的一个形式的公式. 我们看到, 调和函数 ϕ 完全由它在边界上的法向导数所规定. 然而请记住, 差一个常数的二个函数具有相同的法向导数.

第二类格林函数的最好的物理解释出现在流体动力学例子之中. 在 16.3 节中,我们将详细一点讨论这样一个例子.

第二类格林函数的显式表达式也可能在像平面或球这样的简单边界问题中存在. 在平面 $x_1 = 0$ 的情况下, 仍可应用镜象法(练习 7) 得到解

$$H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} + \frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}'|}, \tag{18}$$

式中 $\boldsymbol{\xi}$ 和 $\boldsymbol{\xi}'$ 为由(6)式相关的镜象点. 这里, 不像狄利赫里情况下的 (5) 式, 有两个同号项. 读者应该解出圆球情况下的格林函数.

霍姆亥兹方程的格林函数

格林函数的概念可推广到其他偏微分方程中去．考虑霍姆亥兹方程(14)．在球坐标 (ρ, ϕ, θ) 情况下，它是

$$\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\mathscr{D}\right]u+k^2u=0, \tag{19}$$

式中

$$\mathscr{D}=\frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)+\frac{1}{\sin^2\phi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}. \tag{20}$$

如果解是球对称的，那末 $\mathscr{D}=0$，我们可把(19)式写作

$$\frac{d^2}{d\rho^2}(\rho u)+k^2(\rho u)=0. \tag{21}$$

ρu 的这个常系数方程有解

$$u=\rho^{-1}e^{\pm ik\rho}. \tag{22}$$

解 (22) 中的任何一个与位势理论 ($k\to 0$) 下的基本解 r^{-1} 相对应．因此我们可以构造两个格林函数

$$G^{(1)}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},k)\sim\frac{e^{ik|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|} \tag{23a}$$

和

$$G^{(2)}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},k)\sim\frac{e^{-ik|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}. \tag{23b}$$

这两个解是除了 $\boldsymbol{\xi}$ 点外霍姆亥兹方程(14)的球对称的解，它们在 $r\to\infty$ 时满足合适的边界条件 $G\to 0$.

练　　习

1. (a) 试证明(4)式.

2. (a) 试证明(5)式具有格林函数所要求的性质.

(b) 证明半无穷大球上的一个积分可以忽略，从而推导(7)式.

3. (a) 试证明(9)式.

(b) 证明(10)和(11)式都是合适的格林函数.

4. 推导(12)式.
5. 推导(13)式.
6. 推导(17)式.
7. (a) 试证明(18)式给出了半空间上诺依曼问题的格林函数.
(b) 把(a)的结果推广到球的情况.

16.3 小孔对声波的衍射

光波仅能作为一个狭窄的光束通过壁面上的一个小孔而传播，而声波却可以相当自由地传播．后一种情况是波长比孔的线度大得多的波的衍射情况．我们现在借助具有任意长度的波的格林函数来考察这一现象．我们将看到，当处理波长可与孔的大小相比较的问题时，衍射现象是非常有趣的．对于这种长度的波，我们推导出有声和无声互相交替的环形特征衍射图样．

表述

考虑由下列线化的无粘流体动力学方程所制约的声波方程式(15.3.9)和(15.3.10)式

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=0, \tag{1a}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}=-C_0^2\frac{\partial \sigma}{\partial x_i}, \tag{1b}$$

式中 C_0 是静止介质中的声速，$\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ 是点 $\mathbf{x}$ 处时间 t 时介质的速度．压缩度 $S(\mathbf{x}, t)$ (无量纲密度扰动)与密度[1]$\sigma(\mathbf{x}, t)$ 由下列公式相关:

$$\sigma=\sigma_0(1+S), \tag{2}$$

式中 σ_0 是未扰动介质的密度．如果我们从(1a)和(1b)中消去 v_i，那末便得到压缩度 S 的波动方程:

1) 我们把经常表示密度的符号 ρ 留下作为一个球坐标来用.

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}=C_0^2\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 S}{\partial x_i^2}. \tag{3}$$

在固体边界上，法向速度分量为零．因此，利用(16)式，我们得到

$$0=\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\cdot\mathbf{n}=-C_0^2\mathbf{n}\cdot\nabla\sigma=-C_0^2\frac{\partial\sigma}{\partial n},$$

即

$$\frac{\partial S}{\partial n}=0 \tag{4}$$

方程(3)和(4)可用作研究声波的基础

另一方面，如果我们引进速度势 ϕ，使其满足

$$v_i=\frac{\partial\phi}{\partial x_i}. \tag{5}$$

那末，从(16)式我们可导得关系式

$$\sigma=-C_0^{-2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}, \tag{6}$$

因此从(1a)式得到 ϕ 的波动方程

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=C_0^2\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i^2}. \tag{7}$$

从(4)式及 ϕ 的定义得到条件

$$\text{在固定边界上}\qquad \frac{\partial\phi}{\partial n}=0, \tag{8}$$

我们将用(7)和(8)式代替(3)和(4)式作为基本方程．

考虑处于具体频率 ω 下的波动，我们来研究方程(7)具有下列形式的解

$$\phi=e^{-i\omega t}\psi(x). \tag{9}$$

空间函数 ψ 满足霍姆亥兹方程

$$\nabla^2\psi+k^2\psi=0,\qquad k^2=\frac{\omega^2}{C_0^2}. \tag{10}$$

这个方程将在固壁边界条件

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=0 \tag{11}$$

下求解。

注释。根据方程(10)，k是所研究的波的波数，$2\pi/k$是它的空间周期。[与(12.29)式的讨论作比较.]

让我们来考虑一趋近于具有一个小孔的屏 $x_3=0$ 的平面波(图16.3)。我们假定，屏下的波将为一个可忽略的量所修正。这种理想化与用一个振动活塞在小孔处模拟的入射平面波相等价。这就是说我们假定小孔处的运动为

$$\dot{V}_3=ve^{-i\omega t}, \tag{12}$$

式中 v 是 x_1 和 x_2 的一个已知函数。我们对求解屏上面的半空间上的解感到兴趣。那末在束缚着的屏上，外法线指向 x_3 轴的负方向。因此在小孔上我们有边界条件

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=-\frac{\partial\phi}{\partial x_3}=-v_3$$
$$=-ve^{-i\omega t}, \tag{13}$$

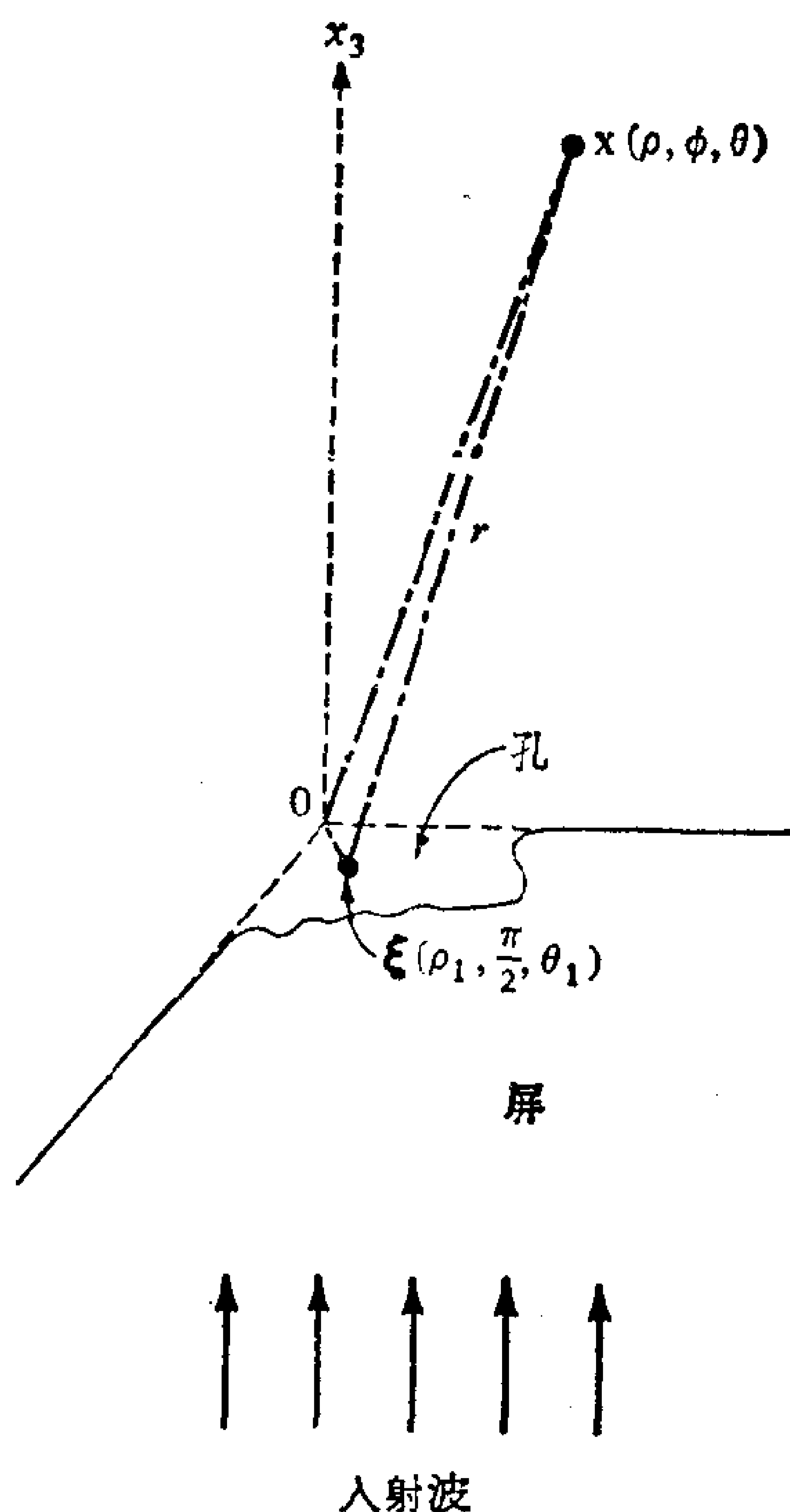


图16.3 由屏上的一个小孔所衍射的波.（仅示出了屏的四分之一）在场点 $\mathbf{x}$ 处所引起的效应是由分布在小孔上的源点 $\boldsymbol{\xi}$ 处来的影响叠加而成.

因此，由(9)式得到

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}=-v. \tag{14}$$

必须引进另一个物理上的考虑。我们对从下面而不是由别的原因到达屏上的波所产生的效应感到兴趣。这些效应必然仅仅是

向外运动的一些波的叠加。因此，我们加上了上面用着重号叙述的那段话适用的条件。（这样一种**辐射条件**已在 12.2 节讨论纵向弹性波时碰到过。）

作为总结，我们列出表示屏上一个小孔所引起的平面声波的衍射这个数学问题的最终表述[1]。 我们用 Ω 表示对应于用小孔的一组坐标 (x_1, x_2).

$$\nabla^2\phi + k^2\phi = 0, \quad x_3 > 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = -v; \quad x_3 = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Omega. \tag{14}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0; \quad x_3 = 0, \quad (x_1, x_2) \notin \Omega. \tag{11}$$

解必须是向外运动的波的合成波。

k^2 和 $v(x_1,x_2)$ 是已知的。

选择合适的格林函数

在 (2.22) 式中，我们记下了球对称霍姆亥兹方程 (10) 的解。利用(9)式，我们得到了速度势 ϕ 的下列基本源解：

$$\rho^{-1}\exp(-i\omega t + ik\rho) = \rho^{-1}\exp[ik(\rho - ct)], \tag{15a}$$

$$\rho^{-1}\exp(-i\omega t - ik\rho) = \rho^{-1}\exp[-ik(\rho + ct)], \tag{15b}$$

式中 ρ 是从某原点量起的球坐标，而 $c = \omega/k$.

上述两个解中，第一个相应于出射波，第二个相应于入射波。两组波都以速度 c 运动，而且在两种情况下，其效果都可以看作是由于集中在原点的"原因"所引起的。我们希望考虑位于小孔中任何一点 ξ 处的"原因"。我们已规定只考虑出射波，因此，我们利用

1) 把与这个问题有关的各种细节都包括进去，仍然是一个要继续进行研究的问题。有一篇附有早期工作参考文献的近期文章是 A. V. Chinnaswamy 和 R. P. Kanwal 的 "Uniform Asympototic Theory of Diffraction by a Plane Screen by the Method of Boundary Layers" *SIAM J. Appl. Math.* **23**, 339—55 (1972).

具有奇点的格林函数

$$\frac{e^{ik|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}.$$

因为问题涉及到法向导数的给定值，所以我们选择第二类格林函数

$$H^{(1)}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},k)=\frac{e^{ik|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}+\frac{e^{ik|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}'|}}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}'|},\tag{16}$$

式中 $\boldsymbol{\xi}'$ 是 $\boldsymbol{\xi}$ 在壁面内的映象，因此，如果 $\mathbf{x}_w$ 是壁面上的一个点，那末 $\mathbf{x}_w-\boldsymbol{\xi}=-(\mathbf{x}_w-\boldsymbol{\xi}')$. 在(16)式中选择正号，那末我们用镜象法构造了一个壁面上法向导数为零的格林函数。

衍射积分的推导

我们现在将证明，解为“衍射积分”

$$\phi(\mathbf{x})=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Omega}H^{(1)}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},k)\frac{\partial\phi}{\partial n}d\sigma,\tag{17a}$$

式中积分变量为 $\boldsymbol{\xi}$，积分是在屏的小孔上进行的. 这里 $\partial\phi/\partial n$ 假定已知. 在壁面上 $H^{(1)}=2e^{ikr}/r$，其中 $r=|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|$. 因此积分(17a)也可写作下列形式

$$\phi(\mathbf{x})=\frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega}\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial\phi}{\partial n}d\sigma.\tag{17b}$$

这个公式的物理解释是不难领悟的. 在任何一点 $\mathbf{x}$ 处的波幅可用从小孔处单位面积强度为 $(2\pi)^{-1}\partial\phi/\partial n$ 的“扫描”源产生的波的叠加得到. 每一个源点 $\boldsymbol{\xi}$ 都与它自己的 $r=|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|$ 相联系，因此，每一种效应在其传播到场点 $\mathbf{x}$ 的过程中都要有一种适当的位相迟后. 复杂的波动现象可以看作源点发出的具有适当的相位差和伴随的相消和相补点的波叠加而成的，这一事实称之为 Huygen 原则。

解(17)式的形式可从(2.17)式即第二类调和函数边值问题的解来预测. 因为在无穷远处的条件(17)式的推导需要更为巧妙的讨论。

如果我们考虑一个由固壁和屏上小孔上某点为中心的一个半球面与所包围的区域(练习 3),那末我们可以容易地推导出解的下列表达式:

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\Omega} H^{(1)} \frac{\partial\phi}{\partial n}\, d\sigma + \frac{1}{4\pi}\iint_{\Omega}\left(H^{(1)}\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial H^{(1)}}{\partial n}\right) d\sigma. \tag{18}$$

当半球面 S 的半径取作无穷大时,人们指望(并且必须证明),半球面上的积分趋向于零,然后就可得到(17a)式.

为了证明在极限情况下,来自 S 的贡献趋向于零,让我们注意,$H^{(1)}$ 和 ϕ 中的最大项具有如下的性质:

$$H^{(1)} \sim \frac{e^{ikr}}{r}, \quad \phi \sim \frac{e^{ikr}}{r'}, \tag{19a,b}$$

式中 r 是从半球面 S 上一点 $\boldsymbol{\xi}$ 到离屏有限距离的一点 $\mathbf{x}$ 之间的距离,而 r' 是从 $\mathbf{x}$ 到镜象点 $\boldsymbol{\xi}'$ 的距离(见图 16.4)。因此,出现在(18)式中的被积函数 $H^{(1)}(\partial\phi/\partial n) - \phi(\partial H^{(1)}/\partial n)$ 中,最大的项是由指数因子的导数引起的,并且具有如下的形式

$$\frac{e^{ikr}}{r}\frac{e^{ikr'}}{r'} ik\left(\frac{\partial r}{\partial n} - \frac{\partial r'}{\partial n}\right), \tag{20}$$

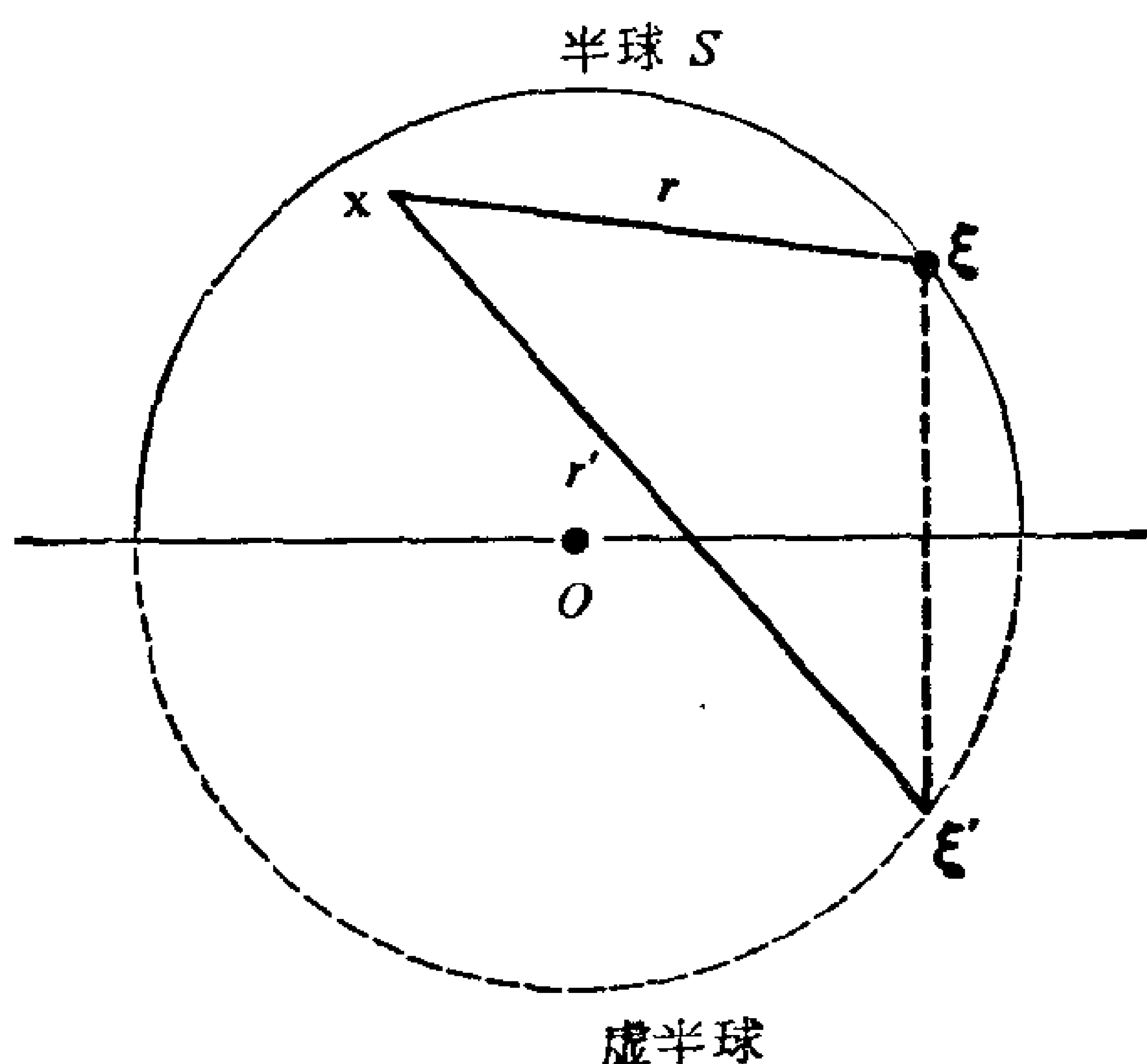


图 16.4 源点 $\boldsymbol{\xi}$ 及其镜象 $\boldsymbol{\xi}'$.

而当 $r \to \infty$ 时，其他项为 $O(r^{-3})$[1]. 一些计算证明（练习4）

$$\frac{\partial r}{\partial n} - \frac{\partial r'}{\partial n} = O\left(\frac{1}{r}\right). \qquad (21)$$

因此在球面上的被积函数为 $O(r^{-3})$. 由于半球的面积为 $O(r^2)$，因此所希望的结果成立.

衍射积分的近似计算

为了比较容易地进行计算，可将衍射积分(17)式加以简化. 对于场点 x 我们将采用球坐标 (ρ, ϕ, θ)，而把原点放在小孔中一个合适的点上(图 16.3). 在(17b)式中，我们仅关心位于屏平面中的源点 $\boldsymbol{\xi}$，我们把这些点的球坐标取作 $(\rho_1, \pi/2, \theta_1)$. 我们将在假设 $\rho \gg \rho_1$ 之下对积分作近似；即我们仅考虑离开小孔有许多倍小孔"直径"的场点. 利用余弦定律，我们得到

$$\begin{aligned} r &= (\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1\cos\psi)^{1/2} \\ &= \rho\left[1 - \frac{\rho_1}{\rho}\cos\psi + O\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^2\right], \end{aligned} \qquad (22)$$

式中 ψ 是 $\mathbf{x}$ 和 $\boldsymbol{\xi}$ 之间的夹角，在 $\mathbf{x}$ 和 $\boldsymbol{\xi}$ 方向上的单位矢量则为

$$\mathbf{i}\cos\theta\sin\phi + \mathbf{j}\sin\theta\sin\phi + \mathbf{k}\cos\phi$$

和

$$\mathbf{i}\cos\theta_1 + \mathbf{j}\sin\theta_1,$$

取两个矢量的数量积，我们得到

$$\begin{aligned} \cos\psi &= \sin\phi(\cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1) \\ &= \sin\phi\cos(\theta - \theta_1). \end{aligned} \qquad (23)$$

而且，在大多数情况下，小孔足够小，以致可以证明能把被积函数中的 $\partial\psi/\partial n$ 看作常数 v. 有了这个假设，再利用(22)和(23)式，我们得到

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \phi, \theta) \approx & \frac{\exp(ik\rho)}{\rho}\frac{v}{2\pi} \\ & \times \iint_{\Omega} \exp[-ik\rho_1\sin\phi\cos(\theta_1 - \theta)]d\sigma. \end{aligned} \qquad (24)$$

1）关于 O 符号的定义请参阅附录 3.1.

在半径为 a 的圆孔情况下，我们知道 $d\sigma = \rho_1 d\rho_1 d\theta_1$，$\rho$ 从 0 变到 a，而 θ_1 从 0 变到 2π. 我们可以在被积函数中令 $\theta = 0$，而不影响结果. 但是式(3.1.29)给出了用零阶贝塞耳函数 J_0 表示的所得积分的表达式.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(-ik\rho_1 \sin\phi \cos\theta_1)d\theta_1 = J_0(k\rho_1 \sin\phi). \qquad (25)$$

因我们得到最终的结果(练习 5)为

$$\psi(\rho,\phi,\theta) \approx va^2 \frac{J_1(ka\sin\phi)}{ka\sin\phi}\frac{e^{ik\rho}}{\rho}, \qquad (26)$$

式中 J_1 是一阶贝塞耳函数,并且下式与 J_0 相关

$$\frac{d}{dx}[xJ_1(x)] = xJ_0(x). \qquad (27)$$

我们从 (26) 式看到,波幅在 $J_1(ka\sin\phi) = 0$ 的方向 ϕ 上为零. 方向 $\phi = 0$ 是一个例外,因为

$$\lim_{\phi\to 0}\frac{J_1(ka\sin\phi)}{ka\sin\phi} = \frac{1}{2}.$$

因此,"静环"由 J_1 的正零点所定义

$$ka\sin\phi = 3.832,\ 7.016,\ 10.173,\ 13.323,\ \text{等等}. \qquad (28)$$

正如人们会从物理上的考虑预期的那样,在 $\phi = 0$ 处的强度是一个最大值.

请注意,因为总有一个满足方程组 (28) 中任何一个方程的实角 ϕ，所以 $ka \geqslant 3.832$. 这就是说,波长 $2\pi/k$ 必然比 $2\pi a/3.832 \approx 0.8(2a)$ 小. 除非波长多少比小孔的直径小一点，否则就不存在"静环". 另一方面,如果波长太小,环就会靠得太近以致不能很满意地加以分辨.许多类型的波遵循波动方程 (7) 及其为零的条件 (8),而上述计算只要稍加修正或不加修正便能适用. 为了说明物质波动的性质，G. P. 汤姆森把电子束送过一个小孔，并得到了刚才算得的这种衍射图案.

练　　习

1. 证明在遵循方程式(1)的问题中引进［如(15)式那样的］速度势是合理的.
2. 写出一段或二段有关假设(12)式的优点和局限性的文字，能否引进限制较少的假设而不引起太多的额外的努力.
3. (a) 证明 $H^{(1)}$ 的法向导数在壁面上为零.

   (b) 推导(18)式
4. 证明(19),(20)和(21)式
5. (a) 根据练习 3.1.21 中贝塞耳函数的级数定义证明（27）式成立.

   (b) 求(26)式.
6. 讨论由(26)式给出的各种最大强度的位置和大小.
7. 证明：镜象点 ξ' 正好是（19b）式中可以选择的一个点；屏后的任何点都可以用来实现我们的目的.

参 考 书 目

一般应用数学

COURANT, R., and D. HILBERT. (1953) *Methods of Mathematical Physics*. Vol. I. New York: Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, Inc. 561 pp.

“把起源于物理问题的数学方法加以发展，并努力使结果形成统一的数学理论。”(第二卷并不具有第一卷的经典风格，但却是偏微分方程理论中重要结果的一个概要。)

FRIEDMAN. B. (1956) *Principles and Techniques of Applied Mathematics*. New York: John Wiley & Sons, Inc. 315 pp.

“写这本书是企图证明由……抽象研究发展出来的有力方法如何能用来使求解应用数学问题的方法和技巧加以系统化。”

GENIN, J., and J. S. MAYBEE. (1970) *Introduction to Applied Mathematics*, Vol. 1. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc. 289 pp.

“由于或多或少受到各个领域中提出的现实问题的激励，我们已尝试着以统一的方式来叙述这些材料。同时我们也尝试着清晰地描述一下可以用所提出的方法获得的实际知识的性质和范围。”——大学三、四年级水平。

JEFFREYS, H., and B. JEFFREYS. (1962) *Methods of Mathematical Physics*. New York: Cambridge University Press. 716 pp.

“这本书的目的是叙述物理学中通常最需的纯粹数学的那些部分，……作为示例，我们给出了对具体问题的大量应用。”

KÁRMÁN, T. von, and M. A. BIOT. (1940) *Mathematical Methods in Engineering*. New York: McGraw-Hill Book Company. 505 pp.

"关于数学应用于工程问题的艺术，有两种教学方法．一种是按排由选定的数学分支组成的系统课程，其中包括为应用而选出的适当的例子．另一种方法是选择某几组有代表性的工程问题说明求解它们的数学方法，…… 这本书可认为是第二种方法的一个实验。"

POLLARD, H. (1972) *Applied Mathematics: An Introduction*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., Inc. 99 pp.

"我希望……通过叙述少量有选择但却十分重要的问题，……使学生既对成功又对失败引起注意，使高年级大学生和开始学习的研究生相信……应用数学是有趣的。"

SAGAN, H. (1961) *Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics*. New York: John Wiley & Sons. Inc. 381 pp.

一本高年级研究生的教科书，它为本书第一部分的大部分材料提供了可供选择的很好的参考资料.

高等微积分

FRANKLIN, P. (1940) *A Treatise on Advanced Calculus*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1940. Reprinted by Dover Publications, Inc., New York, 1964. 595 pp.

HILDEBRAND, F. B. (1962) *Advanced Calculus for Applications*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc. 646 pp.

KAPLAN, W. (1952.) *Advanced Calculus*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., Inc. 678 pp.

微分方程

BOYCE, W., and R. DIPRIMA. (1969) *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc. 583 pp.

"本书是从……应用数学家的观点来写的，应用数学家对微分方程的兴趣可能同时是相当理论，又十分实际的。"

Coddington, E., and N. Levinson. (1955) *Theory of Ordinary Differential Equations*. New York: McGraw-Hill Book Company. 429 pp.

权威性的高等工作.

Garabedian, P. (1964) *Partial Differential Equations*. New York: John Wiley & Sons, Inc. 672 pp.

一本研究生的教科书，"为工程师和物理学家以及数学家写的."

Ince, E. (1927) *Ordinary Differential Equations*. Essex, England: Longman Group Ltd. Reprinted by Dover Publications, Inc., New York, in 1956. 558 pp.

经典理论的一本极好的原始资料.

Kellogg, O. (1929) *Potential Theory*. Reprinted by Dover Publications, Inc., New York, 1953. 384 pp.

"大量地求助于物理直觉和示例说明，这是本书主题的性质所固有的，而这一点是做到了. 然而，为了使本书给学生以正确的概念，同时也能为数学家所用，既能作为参考资料，又能用作进一步发展的基础，我们用严谨的方法给出了证明."

Moser, J. (1973) *Stable and Random Motions in Dynamical Systems, with Special Emphasis on Celestial Mechanics*. Princeton, N. J.: Princeton University Press. 198 pp.

一个很新很深的研究课题.

Tychonov, A., and A. Samarski. (1964) *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Vol. I. San Francisco: Holden-Day, Inc. 390 pp. Vol. II, 1967, 250 pp.

这本书是一大类书籍的代表作，比较简洁，很好地示明了如何使用数学.

量纲分析

Birkhoff, G. (1960) *Hydrodynamics—A Study in Logic, Fact,*

and Similitude, 2nd ed. Princeton, N. J.: Princeton University Press. Also reprinted by Dover Publications, Inc., New York, 1955. 186 pp.

本书值得注意的是利用群论把量纲分析和相似理论的概念统一起来.

Bridgman, P. W. (1931) *Dimensional Analysis*, rev. ed. New Haven, Conn.: Yale University Press. (Paperback edition, 1963.) 113 pp.

清晰而深刻地对课题的基本方面作了讨论.

Huntley, H. E. (1967) *Dimensional Analysis*. New York: Dover Publications, Inc. 158 pp.

一本非常宝贵的一般性参考书.

Kline, S. J. (1965) *Similitude and Approximation Theory*. New York. McGraw-Hill Book Company. 229 pp.

对量纲分析和尺度化作了有益的讨论.

Lighthill, M. J. (1963) *Laminar Boundary Layers*, Chap. 1, L. Rosenhead (ed.). New York: Oxford University Press.

本章的第三部分只有 11 页,对量纲推理及其在简化流体力学问题中的应用作了精辟的讨论.

扰动方法

Cole, J. (1968) *Perturbation Methods in Applied Mathematics*. Waltham, Mass: Ginn/Blaisdell. 260 pp.

"本书完全是从应用数学家的观点来写的;与对基本概念刨根究底相比,我们尽量很少把注意力放在数学的严密性上."

Lagerstrom, P. A., and R. G. Casten. (1972) "Basic Concepts Underlying Singular Perturbation Techniques." *Society for Industrial and Applied Mathematics* (*SIAM*) *Review* 14, 63—120.

一篇值得一读的最新的评述.

Nayfeh, A. H. (1973) *Perturbation Methods*. John Wiley &

Sons, Inc. 425 pp.

有关本课题的最近和最全面的书籍。

VAN DYKE, M. (1964) *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. New York: Academic Press, Inc. 229 pp.

关于扰动方法这个课题的第一本现代书籍，它包括了许多见解。

概率及其与微分方程的关系

FELLER, W. (1968) *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. I. New York: John Wiley & Sons, Inc. 509 pp.

"本书的目的在于避免非数学的概念，严格地把概率论当作一个独立的课题来处理。同时，本书力图描述经验基础，为广泛类型的实际应用发展感性知识"。

WAX, N. (ed.) (1954) *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes*. New York: Dover Publications, Inc. 337 pp.

六篇重要论文的汇编。课文参考 S. Chandrasekhar 的"Stochastic Problem in Physics and Astronomy" and M. Kac 的"Random Walk and the Theory of Brownian Motion"。

连续介质力学基础

ARIS, R. (1962) *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc. 286 pp.

"着手证明张量微积分是最适于合理地研究物理场论的语言。"通过详细地考虑流体力学方程来示明这一论点。

JAUNZEMIS, W. (1967) *Continuum Mechanics*. New York: Macmillan Publishing Co., Inc. 604 pp.

研究生教科书，对课题的论述采用"最新的"严格的方法。重点在弹性理论。

SOMMERFELD, A. (1950) "Mechanics of Deformable Bodies," in *Lectures on Theoretical Physics*, Vol. II. New York: Academic Press, Inc. 396 pp.

"我们的目的是为读者描绘一幅许许多多各式各样物质的生动的图画，当选定了合理地提高的有利的观点后，这些物质便进入了理论研究的范围之中，"不象其他参考书，本书不需要张量知识.

TRUESDELL, C., and W. NOLL (1965) "The Non-linear Field Theories of Mechanics," in *Encyclopedia of Physics*, S. Flugge (ed.), Vol. III/3, New York: Springer-Verlag New York, Inc. 602 pp.

"探求与具体明确的物理解释相一致的最大的数学普遍性."

TRUESDELL, C., and R. TOUPIN. (1960) "The Classical Field Theories," in *Encyclopedia of Physics*, S. Flugge (ed.), Vol. III/1, pp. 226—790. New York: Springer-Verlag New York, Inc.

"我们叙述场观点的共同基础，目的在于为读者提供研究工具的总的情况. 因而由于不仅能占有最新近的发现，而且还能占有很深奥的但是人们却都经常忘却的前几代人的成就，他自己就可以作为一个理论家而开始工作. 这篇专著是为专家而不是为初学者而写的".

弹性理论

GREEN, A. E., and W ZERNA. (1954) *Theoretical Elasticity*. New York: Oxford University Press, Inc. 442 pp.

"本书主要与弹性理论的三个方面有关. 这些方面近年来吸引着人们的注意力，……它们是有限弹性形变，二维问题的复变函数方法……和薄壳理论."

LOVE, A. E. H. (1944) *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. 4th ed. New York: Dover Publications, Inc. 643 pp.

"我们希望……在各个方面给出这个课题的清晰的描述： 作

为一种数学理论，它与一般物理学有重要的关系，在工程上有重要的应用。"虽然不易阅读，但这是经典的参考书。

PRESCOTT, J. (1924) *Applied Elasticity*. Essex, England: Longman Group Ltd. 666 pp. Reissued by Dover Publications, Inc., New York. 1946.

"在写这本书时，我力图从工程师而不是从数学家的观点来看待这个课题。"

SOKOLNIKOFF, I. S. (1956) *Mathematical Theory of Elasticity*. New York: McGraw-Hill Book Company. 476 pp

也许是最好的一本参考书。"这本书试图从统一的观点来叙述弹性理论的几个方面，并且与熟知的弹性理论的场方程一起示出了某些二维问题的几种新的一般求解方法。"

TIMOSHENKO, S. P., and J. M. GOODIER, (1970) *Theory of Elasticity*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill Book Company. 567 pp.

"主要目的在于尽可能以解题所允许的简单形式为工程师提供弹性理论最重要的基本知识以及汇编一些工程实践及设计上很重要的具体问题的解法。"

主要的期刊是 Journal of Applied Mechanics

流体力学

BATCHELOR, G. K. (1967) *An Introduction to Fluid Dynamics*. New York: Cambridge University Press. 615 pp.

"这一本可为学应用数学的学生采用的教科书，它把过去研究所得到的物理的理解和知识结合在一起。"

LAMB, H. (1932) *Hydrodynamics*, 6th ed. New. York: Cambridge University Press. 738 pp.

经典结果的百科全书式的汇编。

LANDAU, L. D., and E. H. LIFSCHITZ. (1959) *Fluid Mechanics*. Elmsford, N. Y.: Pergamon Press, Inc. 536 pp.

"本书把流体动力学作为理论物理的一部分来阐述，这在很大程度上决定了本书的性质。"

PRANDTL, L., and O, G, TIETJENS. (1934) *Applied Hydro-and Aeromechanics*. New York: McGraw-Hill Book Company. 270 pp. Also available from Dover Publications, Inc., New York, 1957, as *Fundamentals of Hydro- and Aero Mechanics*.

简洁、便宜. 有大量的物理理解.

SEEGER, R. J., and G. TEMPLE (eds.). (1965) *Research Frontiers in Fluid Dynamics*. New York: Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, Inc. 738 pp.

收集了许多有用的评述文章.

SERRIN, J. B. (1959) "Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics," in *Encyclopedia of Physics*, S. Flügge (ed.), Vol. VIII/1, pp. 125—263. New York: Springer-Verlag New York, Inc.

"我们的目的……是以形式上简洁、数学上正确的方法，又并不是对基础一提而过的方式叙述经典流体力学原理."

两种主要的期刊是 Journal of Fluid Mechanics 和 Physics of Fluids. 从 1969 年开始 Annual Review of Fluid Mechanics 已为 *Annual Review Inc., Palo Alto Calif*. 出版，它收集了研究进展的权威性的概述.

数值分析

RALSTON, A. (1965) *A First Course in Numerical Analysis*. New York: McGraw-Hill Book Company. 578 pp.

一本标准的引论性教科书.

WILKINSON, J. (1963) *Rounding Errorsin Algebraic Processes*. London: Her Majesty's Stationery Office. 161 pp.

一本薄书，有很多概念.

手册和图表

ABRAMOWITZ, M., and I. STEGUN. (1964) "Handbook of Mathematical Functions," *National Bureau of Standards Applied Mathematics Series* 55, 1046 pp. Reprinted by Dover Publications, Inc., New York, 1965.

这是一本非常宝贵的公式、图表集.

FREIBERGER, W. (ed.) (1960) *The International Dictionary of Applied Mathematics*. New York: Van Nostrand Reinhold Company. 1173 pp.

本书就数学在31个科学和工程领域中的应用定义了术语，描述了方法. 书中还列出了本书所定义的术语在法文、德文、俄文和西班牙文中的名词.

MURPHY, G. (1960) *Ordinary Differential Equations and Their Solution* New York: Van Nostrand Reinhold Company. 451 pp.

列出了 2315 个方程及其解答.

提示和答案

（只限于有†的练习）

3.3 节

7(b). 提示：把项 $q[w(m+1,N-1)-2w(m,N-1)+w(m-1,N-1)]$ 分开.

3.4 节

9(a). $P(r)=(\ln R-\ln r)/(\ln R-\ln \varepsilon)$.

(b). $P(\rho)=(R^{-1}-\rho^{-1})/(R^{-1}-\varepsilon^{-1})$.

4.2 节

2(a). 提示：把问题化为交错级数.

5 提示：利用分部积分.

5.1 节

6. $\kappa=0.004\text{cm}^2/\text{sec}$.

7. 按照已有的资料，冷却过程大约要用 3×10^6 年. 现在大家相信，放射性物质放出的热量是所观察到的温度梯度的主要来源.

6.2 节

3(c). $T/(L/g)^{1/2}=f(A/L)$，这里 A 是摆锤的初始线位移. 当 A/L 很小时，$f(A/L)$ 可以用 $f(0)$ 代替，因此这部分的结果可简化为(b)的结果.

10(b). 提示：你必须求解形为 $[y,\partial f(y_1,\cdots,y_n)/\partial y_1]/f(y_1,\cdots,y_n)=0$ 的方程.

6.3 节

2. $U=A\exp(-ab)$, $L=a^{-1}$.

9(b). 按照 $a=0$ 时的零阶解(7.1.2)，时间尺度应该仍然是 ω_0^{-1}；Θ^* 的尺度为 $\Omega\omega_0^{-1}$.

(c). 如果 a 显著地比 $\Omega\omega_0^{-1}$ 大，那末角尺度应该是 a(或 $\Omega\omega_0^{-1}$).

如果这两个量的大小差不多，那末就可用这两个尺度之一或它们的平均或几何平均.

7.1 节

2(a). 提示：利用导数的定义.

4. 提示：推导一个表示能量守恒的方程，并考虑它的结果.

7.2 节

1. 提示：如果 $\dot{x}=v$，则 $dv/dt=(dv/dx)(dx/dt)=vdv/dx$.

11(a). $\lambda_1^{(n)}=-2n^2/\pi\int_0^\pi x\sin^2 nx dx$

$$=-(2n^2/n)\left(\frac{1}{4}\pi^2+\frac{1}{8}n^{-2}\right).$$

8.2 节

6(a). 部分答案. 对于任意 Δx，定常状态的质量守恒方程为 $F_s(x)-F_s(x+\Delta x)=0$，所以 F_s 为常数.

9.1 节

2(b). 如课文中指出的那样，由引进 $s=\varepsilon m$ 到(1)式开始，式中 s 可以确实地假定为具有以 ε 为幂次的麦克劳林展开式.

3. 提示：在展开平方根时，把$(4-\varepsilon)^{1/2}$写成等于 $2\left[1-\varepsilon\right]^{1/2}$ 是很有帮助的，然后再利用二项定理.

4(f). 提示：引进新变量 $y=x\varepsilon^{1/2}$.

8(a). 用 εE^2 除(13)式.

(b). 用 E 除(13)式，记住 $\bar{m}$，因此 E 在 $\varepsilon\to 0$ 时亦不趋近于非零极限.

9.2 节

2(c). $y_0(x)=\exp\left(-\frac{3}{2}x^{2/3}\right)$, $y_I(\xi)=k\int_0^\xi \exp\left(-\frac{3}{4}s^{4/3}\right)ds$;

$$k^{-1}=\int_0^\infty \exp\left(-\frac{3}{4}s^{4/3}\right)ds.$$

4(c). 部分答案. 平衡微分方程的头两项，我们就看出小 t 时的

时间尺度为 μk^{-1}. 按照第二个初始条件，那末就可得到 $l\mu^{-1}$ 是位移的正确的尺度.

5. 提示: 在 $x=1$ 和 $x=-1$ 附近边界层的厚度为 $O(\varepsilon^{1/2})$.

8. 如果 $\varepsilon x=o(1)$,极限为 1;如果 $\varepsilon x=k+o(1)$,极限为 e^{-k};如果 $1/x=o(\varepsilon)$,极限为 0.

10.2 节

3(c). 提示: 利用待定系数法.

5(a). 提示: 利用(2)式,证明 s_1 的方程有一个比较简单的积分因子,并可写成

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\kappa+s_0}{s_0}s_1\right)=\left[\frac{-\kappa}{s_0(s_0+\kappa)}+\frac{\kappa\lambda}{s_0(s_0+\kappa)^2}\right]\dot{s}_0.$$

因此完成求解过程要求计算

$$\int\left[\frac{-\kappa}{u(u+\kappa)}+\frac{\kappa\lambda}{u(u+\kappa)^2}\right]du,$$

这可以采用部分分数来完成.

8(d). 提示: 把分子分母乘上同一个参数常常很有帮助.

11.2 节

3. 提示: 出现一个与(20)式十分类似的方程组. 方法是再去寻找一个类似于 A^2+B^2 的方程. 当完成了这两步后,将发现有关的函数中有一个恒等于零.

7(b). 在建立边界条件时,忽略试探项.

12.1 节

6. 提示: 首先用莱布尼茨法则进行微商. 然后用积分中值定理去变换积分. 最后考虑极限 $N\to M$.

12. 提示: 利用积分中值定理.

12.2 节

14(b). 提示: 首先分别考虑两个特殊情况 $f=0$ 和 $g=0$

16(a). $Q=(1-\kappa^2+2i\kappa)/(1+\kappa^2)$, $B=1$, $\delta=\tan^{-1}[2\kappa/(1-\kappa^2)]$.

13.2 节

1. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + (x_1 - t)\mathbf{k}$.

2(b). 提示：微团的轨迹由 $x = x(t)$，$y = y(t)$ 给出，这里 $dx/dt = y$，$dy/dt = x$. 这两个方程的解可以用消去 x 或消去 y 的方法得到.

3(a). $x^2 + x = (t/t_0)(yt_0 - y_0t_0 + x_0^2 + x_0)$.

(b). $x = \frac{1}{2}t^2 + x_0$，$y = \frac{1}{6}t^3 + (x_0 + 1)t + y_0$.

4(a). $x = -\exp(-y)\cos t +$ 常数.

(b). $$x = \frac{1}{2}\exp(-t + t_0 - B)(\sin t - \cos t) + A - \frac{1}{2}\exp(-B)(\sin t_0 - \cos t_0),\quad y = t - t_0 + B.$$

13.3 节

1. 部分答案. $\delta(\mathbf{A}, t) = A_1\exp(t) + A_2\sin t\exp(-t)$.

13.4 节

4(a). $J = 1$.

(b). $J = \frac{1}{2}A_1^{-1/2}$.

附录 13.1

2. $\partial^2\tau/\partial r^2 + r^{-1}\partial\tau/\partial r + r^{-2}\partial^2\tau/\partial\theta^2$.

3(a). $$\rho^{-2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\tau}{\partial\rho}\right) + (\rho^2\sin\phi)^{-1}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial\tau}{\partial\phi}\right) + (\rho^2\sin^2\phi)^{-1}\frac{\partial^2\tau}{\partial\theta^2}.$$

附录 13.3

2. 提示：(a) 利用三角不等式.

(b) 利用 0 是 $R^{(n)}$ 的内点这一事实.

14.2 节

2. $(10)^{-1/2}(2T_{11} - 2T_{12} - T_{22})$.

3(c). 零.

6. 提示：在半径为R的球上积分．利用积分的绝对值不大于被积函数绝对值的$4\pi R^2$倍这一事实．

14.3 节

3(a). 提示：利用积分中值定理．

14.4 节

4. 提示：写出 $\mathbf{v} = \Delta\phi + \mathbf{w}$. 试证明 $\mathbf{K}^* = K +$ 非负项．

15.1 节

1. 提示：把 $\oiint p\mathbf{n}$ 变换成体积分并利用p的流体静力学表达式．

4 和 5. 提示：利用等式 curl (grad g) = 0.

5. $\rho^{-1}\Delta p = \nabla\int \rho^{-1}dp$.

8. 提示：利用伯努利方程和一种简单形式的连续条件．

10. 提示：利用一种简单形式的连续方程．

15.2 节

5. 第一个定常解不稳定，第二个定常解稳定．

9(a). 提示：如果 $Q \equiv \partial^2\hat{w}/\partial t^2$，试证明 $\partial^2 Q/\partial z^2 = kQ$.

(b). 情况(i)扰动速度维持其初值． 因为没有改变初始扰动的机理，所以既没有增长也无衰减，(只要存在着最小的粘性，这种情况下扰动就会消失．)情况(ii)压强的微小变化以及由此引起的压强梯度，会使流动随时间而增加，直至线性化不再成立．

10(f). 失稳在$\beta_c(m)$的极小值即$(\sqrt{\gamma}+\sqrt{\kappa})^2$处开始，当 $m = m_c = (\gamma\kappa)^{1/2}$ 时出现这个极小值． 因此预期的失稳波长为 $2n/(\gamma\kappa)^{1/4}$.

10(g). 按照这里研究的可能性，失稳会在β首先开始超过值 $\gamma + \kappa$ 的时候建立．

15.3 节

4(c). 对于实际管道中的某个给定点，在扰动到达管端并且有反射扰动返回到达所研究的这个点之前，这个解是合适的．

9(a). 提示：利用(41b)式并引进 $\rho^+S_n^+$ 和 $\rho^-S_n^-$ 的共同值 m，(41a)式保证了 m 的存在性。

(e). 提示：利用泰勒公式去近似 $p^+ - p^- = p(\rho^+, s^+) - p(\rho^-, s^-)$。

15.4 节

6. 提示：把柱面体 $x^2 + y^2 = R^2$，$z = \pm 1$ 用作控制面。令 $R \to \infty$。

7. $\Phi = -U\rho\left[1 - \frac{1}{2}(a/\rho)^3\right]\cos\phi$。

[General Information]
书名=自然科学中确定性问题的应用数学
作者=()林家翘(Lin, C.C.)，西格尔(Segel, L.A.)著
页数=678
SS号=10070641
出版日期=

目录
正文